# Введение в топологию

## Лекция 5

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 2 курс, осень 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

30 сентября 2021 г.

# Клеточные пространства (напоминание)

Клеточным пространством (клеточным комплексом, CW-комплексом) называется хаусдорфово топологическое пространство $X$, представленное в виде объединения $\bigcup_{q=0}^{\infty}\bigcup_{i\in\mathcal{I}} e_i^q$ попарно непересекающихся подмножеств $e_i^q$, называемых клетками, таким образом, что для каждой клетки $e_i^q$ существует отображение $\Phi_i\colon D^q \to X$, называемое характеристическим отображением клетки $e_i^q$, ограничение которого на внутренность шара $\operatorname{int} D^q$ есть гомеоморфизм на $e_i^q$. При этом предполагаются выполненными следующие аксиомы:

(C) граница $\bar{e}_i^q \setminus e_i^q$ клетки $e_i^q$ содержится в объединении конечного числа клеток размерности $< q$;

(W) подмножество $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любой клетки $e_i^q$ замкнуто пересечение $Y \cap \bar{e}_i^q$.

## Пример

Разбиение диска $D^2$ на его внутренность и отдельные точки граничной окружности удовлетворяет аксиоме (W), но не удовлетворяет аксиоме (C).

## Пример

Пусть $X$ — множество, получаемое из счётного семейства единичных отрезков $\{I_k\colon k=1,2,\ldots\}$ отождествлением всех их нулевых концов. На $X$ естественным образом вводится топология, происходящая из метрики: расстояние между точками $t\in I_k$ и $s\in I_l$ равно $|s-t|$, если $k=l$ и равно $t+s$, если $k\ne l$.

Разбиение пространства $X$ на внутренности отрезков и оставшиеся точки удовлетворяет (C), но не (W): последовательность точек $\frac{1}{k}\in I_k$ сходится к 0, т. е. является незамкнутым множеством, но её пересечение с замыканием любой клетки состоит из одной точки и потому замкнуто.

## Пример

Другой способ введения топологии на том же множестве — топология бесконечного букета $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$, т. е. топология факторпространства бесконечного объединения $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k$ по объединению нулевых концов $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} 0_k$. Букет $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$ является клеточным пространством относительно разбиения на внутренности отрезков и оставшиеся точки; аксиома (W) здесь следует из определения фактортопологии.

Однако в этой топологии больше замкнутых множеств (она слабее в терминологии Уайтхеда), чем в метрической топологии на том же множестве, описанной выше. Можно доказать (задача), что топология бесконечного букета $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$ не происходит ни из какой метрики. В частности, $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$ нельзя вложить в $\mathbb{R}^n$ ни для какого $n$.

## Конструкция (факторпространства и произведения)

Пусть $X, Y$ — клеточные пространства. Рассмотрим разбиение произведения $X \times Y$ на клетки вида $e \times e'$, где $e$ — клетка в $X$, а $e'$ — клетка в $Y$. Если хотя бы одно из пространств $X, Y$ локально конечно, то это разбиение на клетки задаёт на $X \times Y$ структуру клеточного пространства. Если же пространства $X$ и $Y$ не являются локально конечными, то данное разбиение произведения $X \times Y$ на клетки может не удовлетворять аксиоме (W) относительно топологии произведения. Эта проблема возникает, например, в случае бесконечных букетов отрезков (задача). В этом случае топологию произведения $X \times Y$ необходимо ослабить (сделать тоньше).

Факторпространство клеточного пространства по клеточному подпространству само является клеточным пространством (задача). В частности, цилиндр, конус и надстройка над клеточным пространством — клеточные пространства.

## Пример (сфера)

Сфера $S^n$ имеет клеточное разбиение из двух клеток: точки $e^0 = (1, 0, \dots, 0)$ и множества $e^n = S^n \setminus e^0$. Характеристическое отображение $D^n \to S^n$, соответствующее второй клетке, переводит границу шара в точку $e^0$. Например, можно взять отображение

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{cases} (-\cos \pi r, \frac{x_1}{r} \sin \pi r, \dots, \frac{x_n}{r} \sin \pi r), & \text{если } r \neq 0, \\ (-1, 0, \dots, 0), & \text{если } r = 0. \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

Другое клеточное разбиение сферы $S^n$ состоит из $2n + 2$ клеток $e^0_\pm, e^1_\pm, \dots, e^n_\pm$: клетка $e^k_\pm$ состоит из точек $(x_0, \dots, x_n) \in S^n$, у которых $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$ и $\pm x_k > 0$. Здесь замыкание каждой клетки гомеоморфно шару.

## Пример (вещественное проективное пространство)

**Вещественное проективное пространство** $\mathbb{R}P^n$ определяется как множество проходящих через 0 прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Топология в $\mathbb{R}P^n$ вводится как фактортопология пространства $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ по отношению эквивалентности, при котором отождествляются точки, лежащие на одной прямой, проходящей через 0.

Эта топология эквивалентна топологии, происходящей из угловой метрики: расстояние между прямыми равно углу между ними.

## Пример (вещественное проективное пространство)

Координаты $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ направляющего вектора прямой (определённые с точностью до пропорциональности) называются **однородными координатами** точки из $\mathbb{R}P^n$; при этом используется обозначение $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$.

Точки, у которых $i$-я координата отлична от 0 составляют $i$-ю **аффинную карту**

$$U_i = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n \colon x_i \neq 0\}.$$

Отображение

$$U_i \to \mathbb{R}^n, \quad [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mapsto \left(\tfrac{x_0}{x_i}, \dots, \tfrac{x_{i-1}}{x_i}, \tfrac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \tfrac{x_n}{x_i}\right)$$

определяет гомеоморфизм аффинной карты на $\mathbb{R}^n$ и задаёт в ней координаты.

## Пример (вещественное проективное пространство)

Имеется отображение $S^n \to \mathbb{R}P^n$, которое переводит точку сферы в прямую, проходящую через эту точку и 0. При этом диаметрально противоположные точки сферы переходят в одну прямую. Таким образом, $\mathbb{R}P^n$ получается из $S^n$ отождествлением диаметрально противоположных точек.

Верхняя полусфера $S^n_{\geqslant} = \{\boldsymbol{x} \in S^n \colon x_n \geqslant 0\}$ гомеоморфна шару $D^n$ посредством отображения проекции, забывающего последнюю координату. Сужение отображения $S^n \to \mathbb{R}P^n$ на $S^n_{\geqslant}$ задаёт отображение $D^n \to \mathbb{R}P^n$, при котором в одну точку отображаются только диаметрально противоположные точки граничной сферы $S^{n-1} \subset D^n$.

## Пример (вещественное проективное пространство)

При отображении $S^n \to \mathbb{R}P^n$ клетки $e^k_+$ и $e^k_-$ разбиения сферы $S^n$ из предыдущего примера склеиваются и получается разбиение пространства $\mathbb{R}P^n$ на $n+1$ клетку, по одной клетке $e^k$ в каждой размерности $k \leqslant n$. Мы имеем

$$e^k = \{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{R}P^n \colon x_k \neq 0,\ x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\}.$$

Другими словами, $e^k = \mathbb{R}P^k \setminus \mathbb{R}P^{k-1}$, где пространства $\mathbb{R}P^k$ образуют цепочку вложений $pt = \mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \ldots \subset \mathbb{R}P^n$. Характеристическим отображением для клетки $e^k$ является композиция

$$D^k \to \mathbb{R}P^k \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$$

проекции и вложения.

## Пример (бесконечномерные пространства)

Рассмотрим множество $\mathbb{R}^\infty$ финитных (т. е. нулевых, начиная с некоторого места) последовательностей $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ вещественных чисел. Множество $\mathbb{R}^\infty$ можно отождествить с бесконечным объединением $\bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{R}^n$ вложенных пространств $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \ldots$, где $\mathbb{R}^n$ вкладывается в $\mathbb{R}^\infty$ при помощи отображения

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots).$$

Топология в $\mathbb{R}^\infty$ вводится правилом: подмножество $A \subset \mathbb{R}^\infty$ замкнуто тогда и только тогда, когда все пересечения $A \cap \mathbb{R}^n$ замкнуты в своих пространствах $\mathbb{R}^n$. Это — самая тонкая топология, в которой все вложения $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$ непрерывны, она называется топологией прямого предела.

Бесконечномерная сфера $S^\infty$ определяется как единичная сфера в пространстве $\mathbb{R}^\infty$. Мы имеем $S^\infty = \bigcup_{n=1}^\infty S^n$ — бесконечное объединение вложенных сфер $S^1 \subset S^2 \subset S^3 \subset \ldots$.

## Пример (бесконечномерные пространства)

Бесконечномерное вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^\infty$ — это объединение вложенных проективных пространств $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3 \subset \ldots$. Эквивалентно, $\mathbb{R}P^\infty$ — это множество проходящих через 0 прямых в $\mathbb{R}^\infty$. Пространство $\mathbb{R}P^\infty$ получается из $S^\infty$ отождествлением диаметрально противоположных точек.

Клеточные разбиения сфер $S^n$ и проективных пространств $\mathbb{R}P^n$ из предыдущих примеров дают клеточные разбиения $S^\infty$ и $\mathbb{R}P^\infty$.

Разбиение $S^\infty$ имеет по две клетки $e^k_+$ и $e^k_-$ в каждой размерности $k \geqslant 0$, а разбиение $\mathbb{R}P^\infty$ — по одной клетке $e^k$ в каждой размерности. При этом аксиома (W) для каждого из этих клеточных разбиений вытекает из определения топологии прямого предела.

## Пример (комплексное проективное пространство)

Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ определяется как множество проходящих через 0 прямых в $\mathbb{C}^{n+1}$. Как и в случае $\mathbb{R}P^n$, на пространстве $\mathbb{C}P^n$ имеются однородные координаты $[z_0 : z_1 : \ldots : z_n]$ (определённые с точностью до умножения на ненулевое комплексное число), и $\mathbb{C}P^n$ покрывается $n+1$ аффинными картами, каждая из которых гомеоморфна пространству $\mathbb{C}^n$.

Рассмотрим единичную сферу

$$S^{2n+1} = \bigl\{(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \colon |z_0|^2 + |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1\bigr\}.$$

Мы имеем отображение

$$S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n, \quad (z_0, z_1, \ldots, z_n) \mapsto [z_0 : z_1 : \ldots : z_n],$$

при котором прообразом точки $[z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \in \mathbb{C}P^n$ является окружность в $S^{2n+1}$, состоящая из точек $(z_0 z, z_1 z, \ldots, z_n z)$ с $|z| = 1$.

## Пример (комплексное проективное пространство)

Рассмотрим также шар

$$D^{2n} = \{(z_0, z_1, \dots, z_n) \in S^{2n+1} \colon z_n \in \mathbb{R}, z_n \geqslant 0\}.$$

Тогда отображение

$$S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n, \quad (z_0, z_1, \dots, z_n) \mapsto [z_0 \colon z_1 \colon \ \dots \colon z_n],$$

ограничивается до отображения $D^{2n} \to \mathbb{C}P^n$, которое взаимно однозначно на внутренности шара, а на границе $S^{2n-1}$ происходит отождествление как описано выше (окружности переходят в точки).

Это даёт разбиение $\mathbb{C}P^n$ на клетки

$$e^{2k} = \{[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}P^n \colon z_k \neq 0,\ z_{k+1} = \dots = z_n = 0\},$$

по одной в каждой чётной размерности $2k \leqslant 2n$, с характеристическими отображениями $D^{2k} \to \mathbb{C}P^k \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$.