Введение в топологию

Лекция 4

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 2 курс, осень 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

23 сентября 2021 г.

Пространства путей и петель

Путём в пространстве X называется отображение $\varphi\colon I \to X$; точка $\varphi(0)$ называется **началом**, а $\varphi(1)$ — **концом** пути φ. **Петлёй** называется путь φ, начинающийся и заканчивающийся в одной точке, т. е. $\varphi(0) = \varphi(1)$.

Пространство X, любые две точки которого можно соединить путём, называется **линейно связным**. Линейно связное пространство связно. Примером связного, но не линейно связного пространства является объединение отрезка $[-1,1]$ на оси ординат и положительной части графика функции $y = \sin\frac{1}{x}$ с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}^2$.

Пусть X — пространство с отмеченной точкой. **Пространством путей** на X называется подпространство $PX \subset \mathcal{C}(I, X)$, состоящее из путей, начинающихся в отмеченной точке x_0. **Пространством петель** на X называется подпространство $\Omega X \subset PX$, состоящее из петель, начинающихся и заканчивающихся в отмеченной точке x_0. Отмеченной точкой пространства ΩX является постоянная петля, $\varphi(x) = x_0$.

Теорема

Если X хаусдорфово, то имеет место естественный по X и Y гомеоморфизм

$$\mathcal{C}(\Sigma X, Y) \to \mathcal{C}(X, \Omega Y),$$

переводящий отображение $f\colon X \times I \to \Sigma X \to Y$ в отображение $X \to \Omega Y$, $x \mapsto \varphi_x$, где φ_x — петля $I \to Y$, $t \mapsto f(x,t)$.

Доказательство

Согласно экспоненциальному закону имеем гомеоморфизм

$$\mathcal{C}(X \times I, Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(I, Y)).$$

При этом подпространство $\mathcal{C}(\Sigma X, Y) \subset \mathcal{C}(X \times I, Y)$, состоящее из отображений $f\colon X \times I \to Y$, для которых $f(x,0) = f(x,1) = f(x_0,t) = y_0$, переходит в подпространство $\mathcal{C}(X, \Omega Y) \subset \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(I, Y))$ отображений, переводящих X в петли с началом y_0 и переводящих x_0 в постоянную петлю.

Доказательство (продолжение).

Естественность по X и Y означает, что для отображений $X' \to X$ и $Y \to Y'$ существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\Sigma X, Y) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathcal{C}(X, \Omega Y) \arrow[d] \\
\mathcal{C}(\Sigma X', Y') \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{C}(X', \Omega Y')
\end{tikzcd}$$

□

Гомотопии и гомотопические эквивалентности

Два отображения $f, g\colon X \to Y$ между пространствами X и Y называются **гомотопными** (обозначается $f \simeq g$), если существует отображение $F\colon X \times I \to Y$, такое, что $F(x,0) = f(x)$ и $F(x,1) = g(x)$ для любого $x \in X$.

Отображение F называется **гомотопией** между f и g. Для каждого $t \in I$ будем обозначать через F_t отображение $X \to Y$, $x \mapsto F(x,t)$.

Гомотопия является отношением эквивалентности между отображениями. Мы будем обозначать через $[X, Y]$ множество классов гомотопных отображений из X в Y.

Мы также будем использовать термин гомотопия отображения $f\colon X \to Y$ для отображения $F\colon X \times I \to Y$, удовлетворяющего $F(x,0) = f(x)$. В этом случае для каждого $t \in I$ мы будем использовать обозначение f_t для отображения $X \to Y$, $x \mapsto F(x,t)$. При этом $f_0 = f$. Таким образом, гомотопия отображения f — это его деформация с параметром $t \in [0,1]$.

Если пространство X хаусдорфово и локально компактно, то имеем гомеоморфизм

$$\mathcal{C}(I \times X, Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(I, \mathcal{C}(X,Y)).$$

Таким образом, в этом случае гомотопию можно рассматривать как путь в пространстве отображений $\mathcal{C}(X,Y)$, а множество классов гомотопных отображений $[X,Y]$ является множеством классов линейной связности пространства $\mathcal{C}(X,Y)$.

Два пространства X и Y **гомотопически эквивалентны** (обозначается $X \simeq Y$), если существуют отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$, такие, что композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ гомотопны тождественным отображениям $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ и $\mathrm{id}_Y\colon Y \to Y$, соответственно. Гомотопическая эквивалентность является отношением эквивалентности на пространствах, и **гомотопическим типом** пространства X называется класс пространств, гомотопически эквивалентных X.

Пространство X **стягиваемо**, если оно гомотопически эквивалентно точке.

Пример

Единичный шар $D^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\colon |\boldsymbol{x}| \leqslant 1\}$ стягиваем. Действительно, рассмотрим отображение в точку $f\colon D^n \to pt$ и отображение $g\colon pt \to D^n$, переводящее точку в $0 \in D^n$. Тогда $f \circ g\colon pt \to pt$ есть тождественное отображение, а $g \circ f\colon D^n \to D^n$ переводит каждую точку $\boldsymbol{x} \in D^n$ в 0. Гомотопия между $g \circ f$ и $\mathrm{id}\colon D^n \to D^n$ задаётся отображением $F\colon D^n \times I \to D^n$, $(\boldsymbol{x}, t) \mapsto t\boldsymbol{x}$.

Клеточные пространства

Клеточным пространством (клеточным комплексом, CW-комплексом) называется хаусдорфово топологическое пространство X, представленное в виде объединения $\bigcup_{q=0}^{\infty}\bigcup_{i\in\mathcal{I}} e_i^q$ попарно непересекающихся подмножеств e_i^q, называемых клетками, таким образом, что для каждой клетки e_i^q существует отображение $\Phi_i\colon D^q \to X$, называемое характеристическим отображением клетки e_i^q, ограничение которого на внутренность шара $\operatorname{int} D^q$ есть гомеоморфизм на e_i^q. При этом предполагаются выполненными следующие аксиомы:

(C) граница $\bar{e}_i^q \setminus e_i^q$ клетки e_i^q содержится в объединении конечного числа клеток размерности $< q$;

(W) подмножество $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любой клетки e_i^q замкнуто пересечение $Y \cap \bar{e}_i^q$.

Объединение клеток размерности $\leqslant n$ в клеточном пространстве X называется *n-м остовом* пространства X и обозначается через $\mathrm{sk}^n X$ или X^n.

Можно проверить (задача) эквивалентность следующих свойств для подмножества клеточного пространства X:

- подмножество $A \subset X$ замкнуто (соответственно, открыто);
- пересечение $A \cap X^n$ замкнуто (соответственно, открыто) для любого n;
- прообраз $\Phi_i^{-1}(A)$ при характеристическом отображении $\Phi_i \colon D^q \to X$ любой клетки e_i^q замкнут (соответственно, открыт) в D^q.

Отсюда вытекает, что отображение $X \to Y$ из клеточного пространства X непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все его ограничения $X^n \to Y$ на остовы.

Буквы «C» и «W» происходят из английской терминологии «closure finite» и «weak topology», восходящей к Дж. Уайтхеду. Последнее свойство выше означает, что топология, описываемая аксиомой (W), является самой тонкой (самой слабой в терминологии Уайтхеда) из топологий на X, по отношению к которым все характеристические отображения непрерывны.

Конструкция (приклеивание клеток)

Скажем, что пространство Z получается из Y приклеиванием n-мерной клетки при помощи отображения $\varphi\colon S^{n-1} \to Y$, если Z входит в кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & Z \end{array}$$

где левая вертикальная стрелка вкладывает сферу в границу ∂D^n шара.

Таким образом, Z — факторпространство объединения $Y \sqcup D^n$ при отождествлениях $x \sim \varphi(x)$ для $x \in S^{n-1} = \partial D^n$. Как множество, Z представляет собой объединение Y и внутренности шара D^n — n-мерной клетки. Мы будем использовать обозначение $Z = Y \cup_\varphi D^n$.

Имеется другой, индуктивный подход к определению клеточного пространства. Клеточное пространство X определяется как результат последовательного приклеивания клеток к дискретному пространству X^0. На n-м шаге этой индуктивной процедуры мы получаем n-мерный остов X^n из $(n-1)$-мерного X^{n-1}, приклеивая n-мерные клетки e_i^n посредством отображений $\varphi_i\colon S^{n-1} \to X^{n-1}$.

Топология на объединении $X = \bigcup_n X^n$ вводится следующим образом: подмножество $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда пересечение $Y \cap X^n$ замкнуто для любого n. Это обеспечивает выполнение аксиомы (W) для пространства X. Необходимо также проверить хаусдорфовость и выполнение аксиомы (C). Это остаётся в качестве задач.

Клеточным подпространством клеточного пространства X называется замкнутое подмножество, которое является объединением клеток из X. Каждый остов X^n клеточного пространства X является клеточным подпространством.

Клеточное пространство называется **конечным**, если оно состоит из конечного числа клеток, и **локально конечным**, если каждая его точка вместе с некоторой окрестностью принадлежит конечному подпространству.

Для конечных клеточных пространств аксиомы (C) и (W) проверять не нужно: они выполняются автоматически (задача).

Отображение $f\colon X \to Y$ клеточных пространств называется **клеточным**, если $f(X^n) \subset Y^n$ для всех n.

Приведём примеры разбиений на клетки, которые не являются клеточными пространствами.

Пример

Конечное разбиение на клетки может не быть хаусдорфовым. Действительно, рассмотрим нехаусдорфово пространство X, получаемое из двух экземпляров единичного отрезка отождествлением точек с одинаковыми координатами, за исключением нулевых концов:

$$X = (I_1 \sqcup I_2)/\sim, \quad \text{где } t_1 \sim t_2, \text{ если } t_1 = t_2 > 0.$$

При этом неотождествлённые нулевые концы 0_1 и 0_2 не имеют непересекающихся окрестностей в X. Разобьём X на клетки: концы 0_1, 0_2, 1 и внутренность отрезка. В качестве характеристического отображения одномерной клетки возьмём вложение $I_1 \hookrightarrow X$. Это конечное разбиение удовлетворяет аксиоме (W). При этом подмножество $I_1 = X \setminus 0_2$ незамкнуто, но его прообразы при всех характеристических отображениях клеток замкнуты. Поэтому данная топология на X не является самой тонкой из топологий, по отношению к которым все характеристические отображения непрерывны.