Введение в топологию

Лекция 3

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 2 курс, осень 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

16 сентября 2021 г.

Предбазой топологии $\mathcal{T}$ на X называется набор открытых подмножеств $U_i \colon i \in I$, порождающих $\mathcal{T}$ (т. е. $\mathcal{T}$ является самой грубой топологией, в которой все U_i открыты).

Более явно, предбаза — это набор открытых множеств, совокупность всевозможных конечных пересечений которых образует базу.

Топология на пространстве отображений

Конструкция

Пусть X, Y — два пространства. Рассмотрим множество всех непрерывных отображений $f\colon X \to Y$. Это множество обозначается $\mathcal{C}(X, Y)$ или Y^X. На нём можно ввести топологию следующим образом.

Для каждого компактного подмножества $K \subset X$ и открытого открытого множества $U \subset Y$ рассмотрим подмножество отображений

$$W(K, U) = \{f \in Y^X : f(K) \subset U\}.$$

Топология на Y^X, порождённая набором всевозможных подмножеств $W(K, U)$ (т. е. для которой подмножества $W(K, U)$ образуют предбазу), называется компактно-открытой топологией.

Далее будем предполагать, что на Y^X всегда введена компактно-открытая топология.

Предложение

Если X — конечное множество (с дискретной топологией), то топология на Y^X совпадает с топологией произведения $\prod_{x\in X} Y$.

Доказательство.

Любое подмножество $K\subset X$ является компактным. Каждое множество $W(K,U)$ является конечным пересечением $\bigcap_{x\in K} W(x,U)$, а множества $W(x,U)$ порождают топологию конечного произведения $\prod_{x\in X} Y$. □

Если X — компактное пространство, а (Y,ρ) — метрическое пространство, то пространство $\mathcal{C}(X,Y)$ метризуемо с метрикой

$$\rho(f,g)=\max_{x\in X}\{\rho(f(x),g(x))\}.$$

Можно доказать (задача), что эта метрика индуцирует на $\mathcal{C}(X,Y)$ компактно-открытую топологию.

Перечислим некоторые свойства пространства $\mathcal{C}(X,Y)$. Доказательства — задачи различной степени сложности.

Имеет место гомеоморфизм

$$\mathcal{C}(X, Y\times Z)\cong\mathcal{C}(X,Y)\times\mathcal{C}(X,Z) \qquad \text{или} \qquad (Y\times Z)^X\cong Y^X\times Z^X.$$

Пространство Y называется **локально компактным**, если для каждой точки $y\in Y$ найдётся окрестность, замыкание которой компактно.

Если Y хаусдорфово и локально компактно, то отображение композиции

$$\varphi\colon\mathcal{C}(X,Y)\times\mathcal{C}(Y,Z)\to\mathcal{C}(X,Z),\quad (f,g)\mapsto g\circ f$$

непрерывно. В частности, **отображение вычисления**

$$e\colon\ Y\times\mathcal{C}(Y,Z)\to Z,\qquad (y,f)\mapsto f(y)$$

непрерывно.

Экспоненциальный закон

Определено каноническое отображение

$$\varPhi\colon \mathcal{C}(X\times Y, Z)\to\mathcal{C}(X,\mathcal{C}(Y,Z)) \qquad \text{или} \qquad \varPhi\colon Z^{X\times Y}\to (Z^Y)^X,$$

при котором отображение $f\colon X\times Y\to Z$ переходит в отображение $\varPhi(f)\colon X\to\mathcal{C}(Y,Z)$, переводящее $x\in X$ в отображение $y\mapsto f(x,y)$.

Если X хаусдорфово, то отображение $\varPhi$ непрерывно.

Если, дополнительно, Y хаусдорфово и локально компактно, то $\varPhi$ — гомеоморфизм.

Конус, надстройка и джойн

Символ I обозначает у нас единичный отрезок $[0,1]$.

Цилиндром над X называется произведение $X \times I$; подпространства $X \times 1$ и $X \times 0$ называются (верхним и нижним) основаниями цилиндра.

Конус CX над X — это факторпространство цилиндра по его верхнему основанию: $CX = (X \times I)/(X \times 1)$. Образ основания $X \times 1$ называется вершиной конуса, а образ основания $X \times 0$ — основанием конуса.

Надстройкой ΣX над X называется факторпространство конуса по его основанию: $\Sigma X = CX/(X \times 0)$. Обратите внимание, что это — не то же самое, что факторпространство $(X \times I)/(X \times 1 \cup X \times 0)$. Пространство X вкладывается в надстройку ΣX в качестве $X \times \frac{1}{2}$.

По-другому надстройку можно определить как склейку двух конусов по их основаниям: $\Sigma X = CX \cup_X CX$; таким образом мы имеем кодекартов квадрат

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"] & CX \arrow[d] \\ CX \arrow[r] & \Sigma X, \end{tikzcd}$$

где каждое из отображений i является вложением X на основание цилиндра.

Определим n-мерный шар как следующее подмножество в $\mathbb{R}^n$

$$D^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}$$

с индуцированной топологией.

Аналогично, определим n-мерную сферу

$$S^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Заметим, что при $n = 0$ получаем, что S^0 — две точки.

Предложение

Имеют место гомеоморфизмы $CS^n \cong D^{n+1}$ *и* $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$.

Доказательство

Рассмотрим непрерывное отображение

$$S^n \times I \to D^{n+1}, \quad (x_1, \ldots, x_{n+1}, t) \mapsto ((1-t)x_1, \ldots, (1-t)x_{n+1}).$$

Оно переводит верхнее основание $S^n \times 1$ в точку $0 \in D^{n+1}$ и поэтому индуцирует непрерывное взаимно однозначное отображение $CS^n = (S^n \times I)/(S^n \times 1) \to D^{n+1}$. Так как CS^n — компактное пространство (как факторпространство произведения компактных пространств), а D^{n+1} — хаусдорфово (как подмножество хаусдорфова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$), данное отображение $CS^n \to D^{n+1}$ является гомеоморфизмом.

Доказательство (продолжение).

Для доказательства гомеоморфизма $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$ рассмотрим отображение

$$D^n \to S^n, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \begin{cases} (\frac{x_1}{r}\sin\pi r, \ldots, \frac{x_n}{r}\sin\pi r, \cos\pi r), & \text{если } r \neq 0, \\ (0, \ldots, 0, 1), & \text{если } r = 0. \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Это отображение взаимно однозначно на внутренности шара и переводит его границу S^{n-1} (где $r = 1$) в «южный полюс» $(0, \ldots, 0, -1) \in S^n$. Поэтому оно индуцирует гомеоморфизм $D^n/S^{n-1} \xrightarrow{\cong} S^n$.

Теперь требуемый гомеоморфизм получается как композиция гомеоморфизмов

$$\Sigma S^n = CS^n/(S^n \times 0) \xrightarrow{\cong} D^{n+1}/S^n \xrightarrow{\cong} S^{n+1},$$

построенных выше. □

Джойн (или соединение) $X * Y$ пространств X и Y удобно представлять себе как объединение отрезков, соединяющих каждую точку пространства X с каждой точкой пространства Y. Формально джойн определяется как факторпространство

$$X * Y = X \times Y \times I / \; (x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0), \; (x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1)$$

при любых $x, x_1, x_2 \in X$ и $y, y_1, y_2 \in Y$. Произведение, $X \times Y$ вкладывается в джойн в качестве $X \times Y \times \frac{1}{2}$.

Из сравнения определений надстройки и джона получаем, что $S^0 * X \cong \Sigma X$. В частности, $S^0 * S^k \cong S^{k+1}$. Имеет место более общий факт: $S^k * S^l \cong S^{k+l+1}$ (задача).

Пространства с отмеченной точкой

В теории гомотопий часто имеют дело с **пространствами с отмеченной точкой**, т. е. считается, что во всех рассматриваемых пространствах выделены отмеченные точки, и все отображения переводят отмеченные точки в отмеченные. При этом операции, описанные выше, видоизменяются следующим образом.

Произведением пространств с отмеченными точками (X, x_0) и (Y, y_0) называется пространство $X \times Y$ с отмеченной точкой (x_0, y_0).

В **конусе** и **надстройке** над (X, x_0) дополнительно стягивается подпространство $x_0 \times I$, т. е.

$$C(X, x_0) = X \times I/(X \times 1 \cup x_0 \times I), \quad \Sigma(X, x_0) = CX/(X \times 0 \cup x_0 \times I).$$

При этом стянутое подпространство объявляется отмеченной точкой.

В **джойне** $(X, x_0) * (Y, y_0)$ дополнительно стягивается подпространство $x_0 \times y_0 \times I$.

Если из контекста ясно, что мы имеем дело с пространствами с отмеченными точками, то мы часто будем использовать обозначение X вместо (X, x_0) (также ΣX вместо $\Sigma(X, x_0)$ и т. д.).

Букетом пространств с отмеченными точками X и Y называется пространство $X \vee Y$, получаемое склейкой X и Y по отмеченным точкам x_0 и y_0:

$$X \vee Y = X \sqcup Y/(x_0 \sim y_0).$$

Букет $X \vee Y$ естественным образом вкладывается в произведение $X \times Y$ в качестве подпространства $X \times y_0 \cup x_0 \times Y$; при этом отмеченная точка букета переходит в (x_0, y_0).

Букет является копроизведением в категории пространств с отмеченными точками (упражнение).

Приведённым произведением (или смэш-произведением) $X \wedge Y$ пространств с отмеченными точками X и Y называется факторпространство произведения $X \times Y$ по вложенному букету $X \vee Y$:

$$X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y) = (X \times Y)/(X \times y_0 \cup x_0 \times Y).$$