

Введение в топологию

Лекция 2

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 2 курс, осень 2021 г.
Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
<http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching>

9 сентября 2021 г.

Произведения и копроизведения, декартовы и кодекартовы квадраты

Базой топологии \mathcal{T} на X называется набор открытых подмножеств $\{U_i: i \in I\}$, такой, что любое открытое множество в X представляется в виде объединения (конечного или бесконечного) подмножеств U_i .

Пример

Базой топологии на вещественной прямой \mathbb{R} является набор всех интервалов.

Интервалы с рациональным концами также образуют базу топологии на \mathbb{R} (эта база счётна, в отличие от базы из всех интервалов).

Конструкция (топология произведения)

Произведением пространств X и Y называется множество $X \times Y$ (состоящее из пар (x, y) , $x \in X$, $y \in Y$) с топологией, базу которой образуют подмножества вида $U \times V$, где U открыто в X , а V открыто в Y . Эта топология называется **топологией произведения**.

Пример

Вещественная плоскость \mathbb{R}^2 — это декартово произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ с топологией произведения. Открытыми множествами здесь являются объединения открытых прямоугольников (произведений интервалов).

В анализе топология на \mathbb{R}^2 вводится так: открытыми объявляются множества, которые вместе с любой своей точкой содержат некоторый открытый шар с центром в этой точке. Таким образом, в этой топологии открытые множества — это объединения открытых шаров. Эта топология совпадает с топологией произведения, так как каждый открытый прямоугольник является объединением открытых шаров, и каждый открытый шар является объединением открытых прямоугольников.

Те же рассуждения относятся к топологии на пространстве \mathbb{R}^n .

Пример

Окружность называется топологическое пространство, гомеоморфное следующему подмножеству в \mathbb{R}^2 :

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

(с индуцированной топологией). По-другому окружность можно определить как фактор-пространство $[0, 1]/\{0, 1\}$ отрезка по его границе. Непрерывное отображение

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t),$$

индуцирует гомеоморфизм $[0, 1]/\{0, 1\} \xrightarrow{\cong} S^1$. Доказательство этого факта — упражнение (указание: воспользоваться теоремой из предыдущей лекции).

В то же время, если рассмотреть ограничение отображения f на полуинтервал, то мы получим непрерывное взаимно однозначное отображение $[0, 1) \rightarrow S^1$, которое не является гомеоморфизмом (упражнение).

Предложение

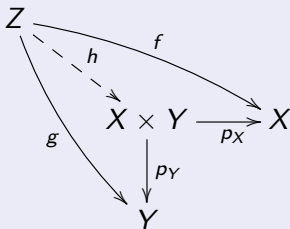
Топология произведения является самой грубой из всех топологий на $X \times Y$, относительно которых проекции $p_X: X \times Y \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x$, и $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$, $(x, y) \mapsto y$, являются непрерывными.

Доказательство.

Чтобы отображение p_X было непрерывным, необходимо объявить открытыми все подмножества вида $p_X^{-1}(U) = U \times Y$, где $U \subset X$ — открытое множество. Аналогично, чтобы отображение p_Y было непрерывным, необходимо объявить открытыми все подмножества вида $p_Y^{-1}(V) = X \times V$, где $V \subset Y$ — открыто. Тогда пересечение $(U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V$ также должно быть открытым, а значит должны быть открытыми и всевозможные объединения множеств вида $U \times V$. Таким образом, необходимо объявить открытыми все множества из топологии произведения. Это и означает, что топология произведения — самая грубая из топологий на $X \times Y$, относительно которых обе проекции непрерывны. □

Предложение (универсальное свойство произведения)

Пусть даны отображения $f: Z \rightarrow X$ и $g: Z \rightarrow Y$. Тогда существует единственное отображение $h: Z \rightarrow X \times Y$, такое, что $p_X \circ h = f$ и $p_Y \circ h = g$. Это выражается коммутативной диаграммой:



Доказательство.

Формула $h(z) := (f(z), g(z))$ однозначно определяет отображение h . Проверка его непрерывности остаётся в качестве упражнения. \square

Данное универсальное свойство определяет понятие **категорного произведения**. Тем самым топология произведения задаёт категорное произведение в категории топологических пространств.

Аналогично определяется произведение конечного числа пространств $X_1 \times \dots \times X_n$. Базой топологии произведения являются множества вида $U_1 \times \dots \times U_n$, где $U_i \subset X_i$ открыто.

Однако, при определении топологии произведения бесконечного числа пространств имеется тонкость.

Конструкция (топология бесконечного произведения)

Пусть $\{X_i : i \in I\}$ — набор пространств, проиндексированных элементами множества I . По определению, элементами **декартова произведения** $\prod_{i \in I} X_i$ являются **функции выбора** $i \mapsto x_i$, сопоставляющие каждому элементу $i \in I$ элемент $x_i \in X_i$.

Если I — счётное множество (множество натуральных чисел), то элементами бесконечного произведения $\prod_{i \in I} X_i$ являются бесконечные последовательности $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, $x_i \in X_i$.

Можно было бы определить топологию на $\prod_{i \in I} X_i$, взяв в качестве базы всевозможные произведения вида $\prod_{i \in I} U_i$, где $U_i \subset X_i$ открыто. Однако в такой топологии будет слишком много открытых множеств, и поэтому она не будет обладать универсальным свойством относительно всех проекций $\prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$.

Конструкция (топология бесконечного произведения)

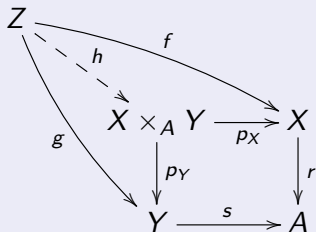
Действительно, чтобы проекция $p_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ была непрерывной, нужно объявить открытыми все подмножества произведения вида $p_i^{-1}(U_i) = \prod_{j \in I} Y_j$, где $Y_j = X_j$ при $j \neq i$ и $Y_i = U_i$ — открытое множество в X_i (на i -м месте в произведении стоит U_i , а на остальных местах — X_j). Беря конечные пересечения таких множеств, мы получим подмножества вида $\prod_{i \in I} U_i$, где $U_i \subset X_i$ открыто и *лишь конечное число U_i отлично от X_i* . Набор таких множеств образует базу топологии, которая является самой грубой из всех топологий на $\prod_{i \in I} X_i$, относительно которых все проекции $p_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ непрерывны. Эта топология и называется **топологией произведения** $\prod_{i \in I} X_i$.

Топология произведения обладает универсальным свойством: для любого набора непрерывных отображений $Z \rightarrow X_i$, $i \in I$, существует единственное непрерывное отображение $Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$, композиция которого с проекциями даёт исходные отображения $Z \rightarrow X_i$.

Если же в $\prod_{i \in I} X_i$ объявить открытыми *всевозможные* произведения $\prod_{i \in I} U_i$, где $U_i \subset X_i$ открыто, то для такой топологии отображение $Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$, задаваемое непрерывными отображениями $Z \rightarrow X_i$, может уже не быть непрерывным: прообраз открытого множества $\prod_{i \in I} U_i$ может не быть открытым в Z .

Обобщением произведения является понятие декартового квадрата.

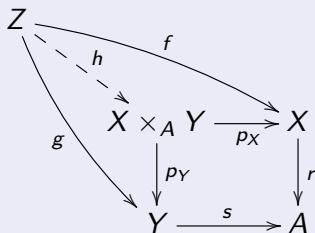
Конструкция (декартов квадрат)



Квадратная диаграмма в нижней правой части рисунка называется **декартовым квадратом**, если она обладает универсальным свойством, описываемым рисунком.

Пространство $X \times_A Y$ называется **расслоенным произведением** (или **коамальгамой**, в англ. терминологии **pullback**) пространств X и Y с заданными отображениями $r: X \rightarrow A$ и $s: Y \rightarrow A$.

Конструкция (декартов квадрат)



Таким образом, расслоенное произведение $X \times_A Y$ — это такое пространство с заданными отображениями $p_X: X \times_A Y \rightarrow X$ и $p_Y: X \times_A Y \rightarrow Y$, что $r \circ p_X = s \circ p_Y$ и для любого пространства Z с отображениями $f: Z \rightarrow X$ и $g: Z \rightarrow Y$, такими, что $r \circ f = s \circ g$, существует единственное отображение $h: Z \rightarrow X \times_A Y$, такое, что $p_X \circ h = f$ и $p_Y \circ h = g$.

Конструкция (декартов квадрат)

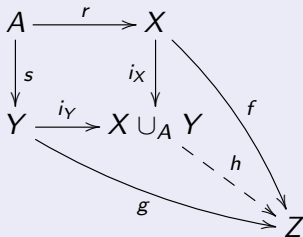
Существование декартового квадрата (расслоенного произведения) доказывается предъявлением явной конструкции пространства $X \times_A Y$, использующей индуцированную топологию и топологию произведения:

$$X \times_A Y = \{(x, y) \in X \times Y : r(x) = s(y)\}.$$

Проверка универсального свойства остаётся в качестве упражнения.

Обращение стрелок приводит к двойственной конструкции копроизведения и **кодекартова квадрата**.

Конструкция (кодекартов квадрат и копроизведение)



Пространство $X \cup_A Y$ называется **склежкой** (или **амальгамой**, в англ. терминологии **pushout**) пространств X и Y с заданными отображениями $r: A \rightarrow X$ и $s: A \rightarrow Y$.

Конструкция (кодекартов квадрат и копроизведение)

Явная конструкция пространства $X \cup_A Y$ использует фактор-топологию:

$$X \cup_A Y = X \sqcup Y / \sim,$$

где $x \sim y$, если $x = r(a)$ и $y = s(a)$ для некоторого $a \in A$.

В частности, при $A = \emptyset$ получаем, что **копроизведением** пространств X и Y является их несвязное объединение $X \sqcup Y$.