Введение в топологию

Лекция 2

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 2 курс, осень 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

9 сентября 2021 г.

Произведения и копроизведения, декартовы и кодекартовы квадраты

Базой топологии $\mathcal{T}$ на X называется набор открытых подмножеств $\{U_i : i \in I\}$, такой, что любое открытое множество в X представляется в виде объединения (конечного или бесконечного) подмножеств U_i.

Пример

Базой топологии на вещественной прямой $\mathbb{R}$ является набор всех интервалов.
Интервалы с рациональным концами также образуют базу топологии на $\mathbb{R}$ (эта база счётна, в отличие от базы из всех интервалов).

Конструкция (топология произведения)

Произведением пространств X и Y называется множество $X \times Y$ (состоящее из пар (x, y), $x \in X$, $y \in Y$) с топологией, базу которой образуют подмножества вида $U \times V$, где U открыто в X, а V открыто в Y. Эта топология называется **топологией произведения**.

Пример

Вещественная плоскость $\mathbb{R}^2$ — это декартово произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ с топологией произведения. Открытыми множествами здесь являются объединения открытых прямоугольников (произведений интервалов).

В анализе топология на $\mathbb{R}^2$ вводится так: открытыми объявляются множества, которые вместе с любой своей точкой содержат некоторый открытый шар с центром в этой точке. Таким образом, в этой топологии открытые множества — это объединения открытых шаров. Эта топология совпадает с топологией произведения, так как каждый открытый прямоугольник является объединением открытых шаров, и каждый открытый шар является объединением открытых прямоугольников.

Те же рассуждения относятся к топологии на пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пример

Окружностью называется топологическое пространство, гомеоморфное следующему подмножеству в $\mathbb{R}^2$:

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$$

(с индуцированной топологией). По-другому окружность можно определить как фактор-пространство $[0,1]/\{0,1\}$ отрезка по его границе. Непрерывное отображение

$$f \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t),$$

индуцирует гомеоморфизм $[0,1]/\{0,1\} \xrightarrow{\cong} S^1$. Доказательство этого факта — упражнение (указание: воспользоваться теоремой из предыдущей лекции).

В то же время, если рассмотреть ограничение отображения f на полуинтервал, то мы получим непрерывное взаимно однозначное отображение $[0,1) \to S^1$, которое не является гомеоморфизмом (упражнение).

Предложение

Топология произведения является самой грубой из всех топологий на $X \times Y$, относительно которых проекции $p_X : X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$, и $p_Y : X \times Y \to Y$, $(x, y) \mapsto y$, являются непрерывными.

Доказательство.

Чтобы отображение p_X было непрерывным, необходимо объявить открытыми все подмножества вида $p_X^{-1}(U) = U \times Y$, где $U \subset X$ — открытое множество. Аналогично, чтобы отображение p_Y было непрерывным, необходимо объявить открытыми все подмножества вида $p_Y^{-1}(V) = X \times V$, где $V \subset Y$ — открыто. Тогда пересечение $(U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V$ также должно быть открытым, а значит должны быть открытыми и всевозможные объединения множеств вида $U \times V$. Таким образом, необходимо объявить открытыми все множества из топологии произведения. Это и означает, что топология произведения — самая грубая из топологий на $X \times Y$, относительно которых обе проекции непрерывны. □

Предложение (универсальное свойство произведения)

Пусть даны отображения $f\colon Z \to X$ и $g\colon Z \to Y$. Тогда существует единственное отображение $h\colon Z \to X \times Y$, такое, что $p_X \circ h = f$ и $p_Y \circ h = g$. Это выражается коммутативной диаграммой:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& X \times Y \arrow[r, "p_X"'] \arrow[d, "p_Y"] & X \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Доказательство.

Формула $h(z) := (f(z), g(z))$ однозначно определяет отображение h. Проверка его непрерывности остаётся в качестве упражнения. $\square$

Данное универсальное свойство определяет понятие категорного произведения. Тем самым топология произведения задаёт категорное произведение в категории топологических пространств.

Аналогично определяется произведение конечного числа пространств $X_1 \times \ldots \times X_n$. Базой топологии произведения являются множества вида $U_1 \times \ldots \times U_n$, где $U_i \subset X_i$ открыто.
Однако, при определении топологии произведения бесконечного числа пространств имеется тонкость.

Конструкция (топология бесконечного произведения)

Пусть $\{X_i\colon i \in I\}$ — набор пространств, проиндексированных элементами множества I. По определению, элементами декартова произведения $\prod_{i\in I} X_i$ являются функции выбора $i \mapsto x_i$, сопоставляющие каждому элементу $i \in I$ элемент $x_i \in X_i$.

Если I — счётное множество (множество натуральных чисел), то элементами бесконечного произведения $\prod_{i\in I} X_i$ являются бесконечные последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$, $x_i \in X_i$.

Можно было бы определить топологию на $\prod_{i\in I} X_i$, взяв в качестве базы всевозможные произведения вида $\prod_{i\in I} U_i$, где $U_i \subset X_i$ открыто. Однако в такой топологии будет слишком много открытых множеств, и поэтому она не будет обладать универсальным свойством относительно всех проекций $\prod_{i\in I} X_i \to X_i$.

Конструкция (топология бесконечного произведения)

Действительно, чтобы проекция $p_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ была непрерывной, нужно объявить открытыми все подмножества произведения вида $p_i^{-1}(U_i) = \prod_{j\in I} Y_j$, где $Y_j = X_j$ при $j \ne i$ и $Y_i = U_i$ — открытое множество в X_i (на i-м месте в произведении стоит U_i, а на остальных местах — X_j). Беря конечные пересечения таких множеств, мы получим подмножества вида $\prod_{i\in I} U_i$, где $U_i \subset X_i$ открыто и *лишь конечное число U_i отлично от X_i*. Набор таких множеств образует базу топологии, которая является самой грубой из всех топологий на $\prod_{i\in I} X_i$, относительно которых все проекции $p_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ непрерывны. Эта топология и называется топологией произведения $\prod_{i\in I} X_i$.

Топология произведения обладает универсальным свойством: для любого набора непрерывных отображений $Z \to X_i$, $i \in I$, существует единственное непрерывное отображение $Z \to \prod_{i\in I} X_i$, композиция которого с проекциями даёт исходные отображения $Z \to X_i$.

Если же в $\prod_{i \in I} X_i$ объявить открытыми *всевозможные* произведения $\prod_{i \in I} U_i$, где $U_i \subset X_i$ открыто, то для такой топологии отображение $Z \to \prod_{i \in I} X_i$, задаваемое непрерывными отображениями $Z \to X_i$, может уже не быть непрерывным: прообраз открытого множества $\prod_{i \in I} U_i$ может не быть открытым в Z.

Обобщением произведения является понятие декартового квадрата.

Конструкция (декартов квадрат)

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& X \times_A Y \arrow[r, "p_X"'] \arrow[d, "p_Y"] & X \arrow[d, "r"] \\
& Y \arrow[r, "s"] & A
\end{tikzcd}$$

Квадратная диаграмма в нижней правой части рисунка называется декартовым квадратом, если она обладает универсальным свойством, описываемым рисунком.

Пространство $X \times_A Y$ называется расслоенным произведением (или коамальгамой, в англ. терминологии pullback) пространств X и Y с заданными отображениями $r\colon X \to A$ и $s\colon Y \to A$.

Конструкция (декартов квадрат)

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& X \times_A Y \arrow[r, "p_X"'] \arrow[d, "p_Y"] & X \arrow[d, "r"] \\
& Y \arrow[r, "s"] & A
\end{tikzcd}
$$

Таким образом, расслоенное произведение $X \times_A Y$ — это такое пространство с заданными отображениями $p_X\colon X \times_A Y \to X$ и $p_Y\colon X \times_A Y$, что $r \circ p_X = s \circ p_Y$ и для любого пространства Z с отображениями $f\colon Z \to X$ и $g\colon Z \to Y$, такими, что $r \circ f = s \circ g$, существует единственное отображение $h\colon Z \to X \times_A Y$, такое, что $p_X \circ h = f$ и $p_Y \circ h = g$.

Конструкция (декартов квадрат)

Существование декартового квадрата (расслоенного произведения) доказывается предъявлением явной конструкции пространства $X \times_A Y$, использующей индуцированную топологию и топологию произведения:

$$X \times_A Y = \{(x, y) \in X \times Y \colon r(x) = s(y)\}.$$

Проверка универсального свойства остаётся в качестве упражнения.

Обращение стрелок приводит к двойственной конструкции копроизведения и кодекартова квадрата.

Конструкция (кодекартов квадрат и копроизведение)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "s"] & X \arrow[d, "i_X"'] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\
Y \arrow[r, "i_Y"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X \cup_A Y \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

Пространство $X \cup_A Y$ называется склейкой (или амальгамой, в англ. терминологии pushout) пространств X и Y с заданными отображениями $r\colon A \to X$ и $s\colon A \to Y$.

Конструкция (кодекартов квадрат и копроизведение)

Явная конструкция пространства $X \cup_A Y$ использует фактор-топологию:

$$X \cup_A Y = X \sqcup Y/\sim,$$
$$\text{где } x \sim y, \text{ если } x = r(a) \text{ и } y = s(a) \text{ для некоторого } a \in A.$$

В частности, при $A = \varnothing$ получаем, что **копроизведением** пространств X и Y является их несвязное объединение $X \sqcup Y$.