Введение в топологию

Лекция 1

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 2 курс, осень 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

2 сентября 2021 г.

Основные понятия общей топологии.

Топологическим пространством называется множество X с выделенным набором подмножеств, называемых **открытыми**, которые удовлетворяют условиям:

а) пустое множество $\varnothing$ и всё множество X являются открытыми;

б) объединение любого набора открытых множеств является открытым;

в) пересечение конечного числа открытых множеств является открытым.

Набор $\mathcal{T}$ открытых подмножеств также называется **топологией** на пространстве X.

Если на множестве X введены две топологии $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$, причём каждое подмножество из $\mathcal{T}_1$ лежит в $\mathcal{T}_2$, то говорят, что топология $\mathcal{T}_1$ **грубее** топологии $\mathcal{T}_2$, а топология $\mathcal{T}_2$ **тоньше** топологии $\mathcal{T}_1$.

Самой тонкой топологией на X является дискретная, в которой все подмножества открыты, а самой грубой — антидискретная, в которой открытыми являются только $\varnothing$ и X.

Вместо терминологии грубая/тонкая в математике часто используется терминология сильная/слабая топология. По этому поводу приведём цитату из книги А. Т. Фоменко и Д. Б. Фукса (стр. 13):

Термины «слабая топология» и «сильная топология» не имеют в математике единого толкования. Мы считаем топологию более слабой, если в ней больше открытых множеств, т. е. меньше предельных точек (у нас слабее всех дискретная топология). Образно выражаясь, слабая топология — это топология, в которой точки слабее притягиваются друг к другу. Противоположная терминология исходит из представления, что в топологическом пространстве точки отталкиваются друг от друга (по отношению к этой терминологии дискретная топология является самой сильной).

Элементы $x \in X$ топологического пространства называются точками. Любое открытое множество U, содержащее данную точку $x \in X$, называется окрестностью этой точки.

Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств непрерывно, если для любого открытого подмножества $U \subset Y$ подмножество $f^{-1}(U)$ открыто в X.

Пример

На вещественной прямой $\mathbb{R}$ вводится стандартная топология, в которой множество $U \subset \mathbb{R}$ открыто, если для любой точки $x \in U$ множество U содержит интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Таким образом, открытые множества на $\mathbb{R}$ — это объединения (возможно, бесконечного числа) интервалов.

В анализе функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется непрерывной, если для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Назовем временно такую функцию ε-δ-непрерывной.

Предложение

Функция f является ε-δ-непрерывной тогда и только тогда, когда она непрерывна как отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Доказательство

Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторая ε-δ-непрерывная функция и рассмотрим открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}$.

Тогда для любой точки $x_0 \in f^{-1}(U)$ найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subset U$ (так как U открыто). Для этого ε, согласно определению ε-δ-непрерывности, найдётся такое $\delta > 0$, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Последнее неравенство означает, что $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subset U$, а значит $x \in f^{-1}(U)$.

Мы получили, что для $x_0 \in f^{-1}(U)$ найдётся такое $\delta > 0$, что $|x - x_0| < \delta$ влечёт $x \in f^{-1}(U)$. Это означает, что $f^{-1}(U)$ открыто. Итак, отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно.

Доказательство (продолжение).

Обратно, пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно. Выберем $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$.

Интервал $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ открыт, поэтому его прообраз открыт и содержит x_0. Следовательно, найдётся такое $\delta > 0$, что $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Последнее условие эквивалентно тому, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Итак, функция f является ε-δ-непрерывной. □

Далее под «пространством» мы будем понимать топологическое пространство, а под «отображением» — непрерывное отображение.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется гомеоморфизмом, если оно непрерывно, взаимно однозначно и обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ также непрерывно.

Два пространства гомеоморфны, если между ними существует гомеоморфизм.

Для гомеоморфных пространств X и Y используется обозначение $X \cong Y$.

Обратим внимание, что если $f\colon X \to Y$ — непрерывное взаимно однозначное отображение, то $f^{-1}\colon Y \to X$ может не быть непрерывным.

Пример

Пусть X представляет собой множество из двух элементов с дискретной топологией, а Y — то же множество с антидискретной топологией. Тогда тождественное отображение $X \to Y$ непрерывно, а его обратное — нет.

Каждое подмножество $A \subset X$ является топологическим пространством относительно индуцированной топологии, в которой открытые множества имеют вид $A \cap U$, где U открыто в X. При этом отображение вложения $i\colon A \hookrightarrow X$ непрерывно.

Подмножество $A \subset X$ замкнуто, если его дополнение открыто. Точка $x \in X$ называется предельной для подмножества $A \subset X$, если любая окрестность точки x содержит точку из A, отличную от x. Подмножество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки (упражнение).

Пространство X связно, если его нельзя представить в виде объединения $A \sqcup B$ непересекающихся подмножеств A и B, каждое из которых непусто и открыто.

Пространство X компактно, если из каждого его покрытия открытыми множествами $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ можно выделить конечное подпокрытие $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$.

Пространство X хаусдорфово, если у любых его двух различных точек $x, y \in X$ существуют непересекающиеся окрестности, $U \ni x$, $V \ni y$, $U \cap V = \varnothing$.

Теорема

Непрерывное взаимно однозначное отображение $f\colon X \to Y$ компактного пространства X на хаусдорфово пространство Y является гомеоморфизмом.

Доказательство опирается на три леммы.

Лемма (1)

Если X компактно и $A \subset X$ — замкнутое подмножество, то A также компактно (в индуцированной топологии).

Доказательство.

Пусть $A = \bigcup_{i \in I} V_i$ — открытое покрытие. Имеем $V_i = A \cap U_i$, где U_i — открыто в X. Тогда $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} U_i$ — открытое покрытие. Выделим конечное подпокрытие $X = (X \setminus A) \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n$. Тогда $A = V_1 \cup \ldots \cup V_n$ — конечное подпокрытие. □

Лемма (2)

Если $f: X \to Y$ — непрерывное сюръективное отображение и X компактно, то Y также компактно.

Доказательство.

Пусть $Y = \bigcup_{i \in I} U_i$ — открытое покрытие. Тогда $X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ также является открытым покрытием. Выделим конечное подпокрытие $X = f^{-1}(U_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_n)$. Тогда $Y = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ — конечное подпокрытие. $\square$

Лемма (3)

Если Y хаусдорфово и $B \subset Y$ — компактное подмножество, то B замкнуто.

Доказательство.

Предположим, что для B найдётся предельная точка $y \in Y$, такая, что $y \notin B$. Для каждой точки $b \in B$ выберем открытые (в Y) подмножества $U_b \ni b$, $V_b \ni y$, $U_b \cap V_b = \varnothing$. Из открытого покрытия $B = \bigcup_{b \in B} U_b$ выделим конечное подпокрытие $B = U_{b_1} \cup \ldots \cup U_{b_n}$. Тогда $V = V_{b_1} \cap \ldots \cap V_{b_n}$ — окрестность точки y, не пересекающаяся с B. Противоречие. $\square$

Теорема

Непрерывное взаимно однозначное отображение $f\colon X \to Y$ компактного пространства X на хаусдорфово пространство Y является гомеоморфизмом.

Доказательство.

Надо доказать, что обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ непрерывно. Другими словами, надо доказать, что f переводит открытые множества в открытые (такие отображения называются **открытыми**). Так как f взаимно однозначно, это эквивалентно тому, что f переводит замкнутые множества в замкнутые. Пусть $A \subset X$ замкнуто. Согласно лемме 1, A компактно. Согласно лемме 2, $f(A) \subset Y$ также компактно. Наконец, согласно лемме 3, $f(A)$ замкнуто. $\square$

Отношением на множестве X называется подмножество $R \subset X \times X$ декартова квадрата $X \times X$.

Если $(x_1, x_2) \in R$, то говорят, что элементы x_1 и x_2 находятся в отношении R. При этом используется обозначение $x_1 \sim_R x_2$ или просто $x_1 \sim x_2$.

Отношение R называется отношением эквивалентности, если оно

– рефлексивно, т. е. $(x, x) \in R$ или $x \sim x$ для любого $x \in X$,
– симметрично, т. е. $x_1 \sim x_2$ влечёт $x_2 \sim x_1$,
– транзитивно, т. е. $x_1 \sim x_2$ и $x_2 \sim x_3$ влечёт $x_1 \sim x_3$.

Множество X с отношением эквивалентности представляется в виде несвязного объединения классов эквивалентности. Обозначим через $X/{\sim}$ множество классов эквивалентности.

Конструкция (фактор-топология)

Пусть X — топологическое пространство с отношением эквивалентности. Рассмотрим отображение множеств $p\colon X \to X/{\sim}$, которое сопоставляет точке её класс эквивалентности.

Тогда на множестве $X/{\sim}$ определена фактор-топология, в которой множество $U \subset X/{\sim}$ открыто тогда и только тогда, когда его прообраз $p^{-1}(U)$ открыт в X.

Отображение $p\colon X \to X/{\sim}$ непрерывно относительно фактор-топологии и называется фактор-отображением.

Вот два важнейших примера фактор-пространства.

Конструкция (стягивание подпространства)

Пусть $A \subset X$, а отношение эквивалентности на X задано так: $x_1 \sim x_2$ тогда и только тогда, когда либо $x_1 = x_2$, либо $x_1 \in A$ и $x_2 \in A$. Фактор-пространство $X/\!\sim$ обозначается X/A; говорят, что X/A получается из X **стягиванием A в точку**.

Если $A = pt$ — точка, то X/pt гомеоморфно X.

Также отдельно рассматривают случай $A = \varnothing$. Тогда $X/\varnothing$ полагают равным несвязному объединению X и точки; такой формализм оказывается весьма полезным.

Говорят, что группа G действует слева на пространстве X, если для каждого элемента $g \in G$ задано непрерывное отображение $\alpha_g\colon X \to X$, такое, что $\alpha_e = \mathrm{id}$ (тождественное отображение) и $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$ (композиция).

Заметим, что каждое отображение α_g является гомеоморфизмом (с обратным $\alpha_{g^{-1}}$). Точка $\alpha_g(x)$ обозначается просто gx.

Примеры:

- Общая линейная группа (обратимых оператов) $GL(V)$, а также её подгруппы (например, $SL(V)$, $SO(V)$), действуют на линейном пространстве V;
- группа невырожденных матриц $GL(n, \mathbb{R})$ действует слева на пространстве столбцов $\mathbb{R}^n$;
- аддитивная группа линейного пространства V действует на V;
- группа перестановок (симметрическая группа) Σ_n действует на конечном множестве $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

Орбитой точки $x \in X$ под действием G называется подмножество

$$Gx = \{gx \colon g \in G\} \subset X.$$

Примеры:

– орбитами действия группы поворотов $SO(2)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ являются концентрические окружности с центром в 0 и точка 0;
– действие группы Σ_n на $[n]$ имеет единственную орбиту — само множество $[n]$.

Конструкция (пространство орбит действия группы)

Орбиты разных точек не пересекаются или совпадают и тем самым задают отношение эквивалентности на X:
$x \sim y$ если существует $g \in G$, такой, что $gx = y$.

Соответствующее фактор-пространство $X/{\sim}$ называется пространством орбит по действию G и обозначается X/G.