Линейная алгебра и геометрия

Лекция 27

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.
Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

21 мая 2021 г.

6.6. Внешнее произведение, внешние формы

Напомним, что альтернированием называется линейный оператор $\mathrm{Alt}\colon \mathrm{T}^0_q(V) \to \mathrm{T}^0_q(V)$, который тензору $T \in \mathrm{T}^0_q(V)$ ставит в соответствие кососимметрический тензор $\mathrm{Alt}\, T$ с компонентами

$$(\mathrm{Alt}\, T)_{j_1,\dots,j_q} := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \Sigma_q} (-1)^\sigma\, T_{j_{\sigma(1)},\dots,j_{\sigma(q)}}.$$

Для кососимметрических тензоров имеется аналог тензорного произведения:

Определение

Внешним произведением кососимметрических тензоров $P \in \Lambda_p(V)$ и $Q \in \Lambda_q(V)$ называется кососимметрический тензор

$$P \wedge Q := \frac{(p+q)!}{p!\, q!} \mathrm{Alt}(P \otimes Q)$$

(роль коэффициента будет объяснена ниже).

Теорема

Внешнее произведение кососимметрических тензоров обладает следующими свойствами: для любых $P \in \Lambda_p(V)$, $Q \in \Lambda_q(V)$, $R \in \Lambda_r(V)$ *и* $\lambda, \mu \in \mathrm{k}$

а) $(\lambda P + \mu Q) \wedge R = \lambda P \wedge R + \mu Q \wedge R$ *(дистрибутивность, при* $p = q$*);*

б) $Q \wedge P = (-1)^{pq} P \wedge Q$ *(антикоммутативность);*

в) $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$ *(ассоциативность).*

Доказательство

а) Дистрибутивность вытекает из дистрибутивности операции $\otimes$ и линейности оператора Alt.

Доказательство (продолжение)

б) Для доказательства антикоммутативности достаточно проверить, что имеет место соотношение $\mathrm{Alt}(Q \otimes P) = (-1)^{pq} \mathrm{Alt}(P \otimes Q)$. Введём перестановку

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & p & p+1 & \dots & p+q \\ q+1 & \dots & q+p & 1 & \dots & q \end{pmatrix}.$$

Тогда $(-1)^\tau = (-1)^{pq}$, так как τ — результат композиции pq элементарных перестановок. Мы имеем

$$\mathrm{Alt}(Q \otimes P)_{i_1,\dots,i_{p+q}} = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} (-1)^\sigma Q_{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(q)}} P_{i_{\sigma(q+1)},\dots,i_{\sigma(q+p)}} =$$

$$= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} (-1)^\tau (-1)^{\sigma\tau} P_{i_{\sigma\tau(1)},\dots,i_{\sigma\tau(p)}} Q_{i_{\sigma\tau(p+1)},\dots,i_{\sigma\tau(p+q)}} =$$

$$= (-1)^\tau \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\varphi \in \Sigma_{p+q}} (-1)^\varphi P_{i_{\varphi(1)},\dots,i_{\varphi(p)}} Q_{i_{\varphi(p+1)},\dots,i_{\varphi(p+q)}} =$$

$$= (-1)^{pq} \mathrm{Alt}(P \otimes Q)_{i_1,\dots,i_{p+q}}.$$

Доказательство (продолжение)

Далее мы будем использовать следующие обозначения. Для $\sigma \in \Sigma_p$ и $P \in \mathrm{T}^0_p(V)$ обозначим через σP тензор с компонентами

$$(\sigma P)_{i_1,\ldots,i_p} := P_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(p)}}.$$

По определению альтернирования, $\mathrm{Alt}\, P = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\Sigma_p}(-1)^\sigma \sigma P$, и имеет место соотношение

$$\sigma(\mathrm{Alt}\, P) = \mathrm{Alt}(\sigma P) = (-1)^\sigma \,\mathrm{Alt}\, P.$$

Для доказательства в) нам понадобится лемма:

Лемма

Для любых тензоров $P \in \mathrm{T}^0_p(V)$ и $Q \in \mathrm{T}^0_q(V)$ имеем

$$\mathrm{Alt}((\mathrm{Alt}\, P) \otimes Q) = \mathrm{Alt}(P \otimes Q) = \mathrm{Alt}(P \otimes \mathrm{Alt}(Q)).$$

Доказательство леммы

Докажем лишь первое равенство (второе доказывается аналогично). Поскольку операция $\otimes$ дистрибутивна, а оператор Alt линеен, имеем

$$\mathrm{Alt}((\mathrm{Alt}\,P)\otimes Q)=\mathrm{Alt}\Bigl(\Bigl(\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\Sigma_p}(-1)^\sigma\sigma P\Bigr)\otimes Q\Bigr)=$$
$$=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\Sigma_p}(-1)^\sigma\,\mathrm{Alt}(\sigma P\otimes Q).$$

Каждой перестановке $\sigma\in\Sigma_p$ сопоставим перестановку $\widetilde{\sigma}\in\Sigma_{p+q}$, которая на первых p индексах действует как σ, а остальные оставляет на месте, т. е.

$$\widetilde{\sigma}=\begin{pmatrix}1 & \ldots & p & p+1 & \ldots & p+q\\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(p) & p+1 & \ldots & p+q\end{pmatrix}.$$

При этом, очевидно, $(-1)^{\widetilde{\sigma}}=(-1)^\sigma$ и $\sigma P\otimes Q=\widetilde{\sigma}(P\otimes Q)$.

Доказательство леммы (продолжение).

Тогда имеем

$$\mathrm{Alt}((\mathrm{Alt}\,P)\otimes Q)=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\Sigma_p}(-1)^\sigma\,\mathrm{Alt}(\widetilde{\sigma}(P\otimes Q))=$$

$$=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\Sigma_p}(-1)^\sigma(-1)^{\widetilde{\sigma}}\,\mathrm{Alt}(P\otimes Q)=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\Sigma_p}\mathrm{Alt}(P\otimes Q)=\mathrm{Alt}(P\otimes Q).$$

$\square$

Доказательство теоремы (окончание).

Теперь вернёмся к доказательству утверждения в) теоремы. Мы имеем

$$
\begin{aligned}
(P \wedge Q) \wedge R &= \frac{(p+q+r)!}{(p+q)!\,r!}\operatorname{Alt}\bigl((P \wedge Q) \otimes R\bigr) = \\
&= \frac{(p+q+r)!}{(p+q)!\,r!}\operatorname{Alt}\Bigl(\frac{(p+q)!}{p!\,q!}\operatorname{Alt}(P \otimes Q) \otimes R\Bigr) = \\
&= \frac{(p+q+r)!}{p!\,q!\,r!}\operatorname{Alt}(P \otimes Q \otimes R),
\end{aligned}
$$

где в последнем равенстве мы воспользовались предыдущей леммой. Аналогично проверяется, что

$$
P \wedge (Q \wedge R) = \frac{(p+q+r)!}{p!\,q!\,r!}\operatorname{Alt}(P \otimes Q \otimes R).
$$

Сопоставляя равенства, получаем $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$. □

Выберем теперь базис $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ в V, и пусть $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ — двойственный базис в $V^* = \mathrm{T}^0_1(V) = \Lambda_1(V)$. Рассмотрим кососимметрические тензоры

$$\varepsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_p} = p!\,\mathrm{Alt}(\varepsilon^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{i_p}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_p} (-1)^\sigma \varepsilon^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{i_{\sigma(p)}}.$$

Из антикоммутативности внешнего произведения следует, что $\varepsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_p} = (-1)^\sigma \varepsilon^{i_{\sigma(1)}} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_{\sigma(p)}}$ для $\sigma \in \Sigma_p$.

Обратим внимание, что ввиду выбора коэффициента $\frac{(p+q)!}{p!\,q!}$ в определении внешнего произведения, выражение $\varepsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_p}$ оказалось линейной комбинацией выражений $\varepsilon^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{i_{\sigma(p)}}$ *с целыми коэффициентами*. Таким образом, кососимметрические тензоры $\varepsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_p}$ определены над конечными полями (характеристики, отличной от двух) и даже над целыми числами, что удобно с алгебраической точки зрения.

Теорема

Кососимметрические тензоры $\{\varepsilon^{i_1}\wedge\ldots\wedge\varepsilon^{i_p},\ i_1<\ldots<i_p\}$ *образуют базис в пространстве* $\Lambda_p(V)$*. В частности,* $\dim\Lambda_p(V)=C_n^p$.

Доказательство

Сначала докажем, что любой кососимметрический тензор $T\in\mathrm{T}^0_p(V)$ представляется в виде линейной комбинации данных тензоров. Разложим T по базису $\varepsilon^{i_1}\otimes\ldots\otimes\varepsilon^{i_p}$:

$$T=T_{i_1,\ldots,i_p}\varepsilon^{i_1}\otimes\ldots\otimes\varepsilon^{i_p}.$$

Теперь применим к обеим частям оператор Alt. Так как T — кососимметрический тензор, $\mathrm{Alt}\,T=T$. С другой стороны, $\mathrm{Alt}(\varepsilon^{i_1}\otimes\ldots\otimes\varepsilon^{i_p})=\frac{1}{p!}\varepsilon^{i_1}\wedge\ldots\wedge\varepsilon^{i_p}$ по определению $\varepsilon^{i_1}\wedge\ldots\wedge\varepsilon^{i_p}$. Итак, получаем

$$T=\frac{1}{p!}\sum_{i_1,\ldots,i_p}T_{i_1,\ldots,i_p}\varepsilon^{i_1}\wedge\ldots\wedge\varepsilon^{i_p}=\sum_{i_1<\ldots<i_p}T_{i_1,\ldots,i_p}\varepsilon^{i_1}\wedge\ldots\wedge\varepsilon^{i_p}.$$

Доказательство (продолжение).

Предположим, что тензоры $\{\varepsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_p},\ i_1 < \ldots < i_p\}$ линейно зависимы, т. е.

$$\sum_{i_1<\ldots<i_p} \lambda_{i_1,\ldots,i_p} \varepsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_p} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{i_1<\ldots<i_p} \lambda_{i_1,\ldots,i_p} \sum_{\sigma\in\Sigma_p} (-1)^{\sigma} \varepsilon^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{i_{\sigma(p)}} = 0.$$

В этой сумме все тензоры $\varepsilon^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{i_{\sigma(p)}}$ различны, следовательно они линейно независимы. Отсюда получаем, что $\lambda_{i_1,\ldots,i_p} = 0$. $\square$

Определение

Выражение

$$T = \sum_{i_1<\ldots<i_p} T_{i_1,\ldots,i_p}\varepsilon^{i_1}\wedge\ldots\wedge\varepsilon^{i_p},$$

представляющее собой разложение кососимметрического тензора $T \in \Lambda_p(V)$ по базису $\{\varepsilon^{i_1}\wedge\ldots\wedge\varepsilon^{i_p},\ i_1<\ldots<i_p\}$, называется **внешней p-формой**.

Внешние формы складываются и умножаются аналогично многочленам от n переменных. Различие заключается в том, что «переменные» $\varepsilon^1,\ldots,\varepsilon^n$ антикоммутируют, т. е. удовлетворяют соотношениям $\varepsilon^i\wedge\varepsilon^j = -\varepsilon^j\wedge\varepsilon^i$ (в частности, $\varepsilon^i\wedge\varepsilon^i = 0$). Это предоставляет очень удобный формализм для работы с кососимметрическими тензорами.