Линейная алгебра и геометрия

Лекция 26

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

14 мая 2021 г.

Опускание и поднятие индексов

Пусть V — евклидово пространство. Тогда соответствие $\boldsymbol{v} \mapsto (\boldsymbol{v}, \cdot\,)$ задаёт канонический изоморфизм $V \to V^*$, т. е. позволяет отождествить тензоры типа $(1,0)$ с тензорами типа $(0,1)$. В координатах это выглядит следующим образом. Пусть $G = (g_{ij})$ — матрица Грама скалярного произведения. Так как скалярное произведение — это билинейная функция, G является тензором типа $(0,2)$. Тогда при изоморфизме $V \to V^*$ вектор T с координатами T^i переходит в ковектор с координатами $T_j = g_{ij}T^i$. Таким образом, мы «опустили индекс» у тензора T при помощи фиксированного тензора G типа $(0,2)$. Эта операция обобщается следующим образом.

Определение

Опускание индекса — это линейное отображение $\mathrm{T}^p_q(V) \to \mathrm{T}^{p-1}_{q+1}(V)$ тензоров в евклидовом пространстве V, которое тензору $T = \{T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}\}$ типа (p,q) ставит в соответствие тензор $\{g_{ij}\,T^{i,i_2,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}\}$ типа $(p-1,q+1)$.

Пример

Рассмотрим изоморфизм $\psi\colon \mathrm{End}(V) \to \mathrm{B}(V)$ между пространством операторов и пространством билинейных функций, сопоставляющий оператору $\mathcal{A}$ билинейную функцию $\mathcal{B}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}\cdot\,, \cdot\,)$. В координатах это выглядит так: оператору с матрицей $A = (a^i_k)$ сопоставляется билинейная функция с матрицей $B_A = (g_{ij}a^i_k)$. Таким образом, B_A — это тензор типа $(0,2)$, получаемый в результате опускания индекса у тензора A типа $(1,1)$.

Для того, чтобы определить операцию, обратную к опусканию индекса, рассмотрим набор $\{g^{kl}\}$, состоящий из элементов обратной матрицы к матрице Грама $G = (g_{ij})$, т. е. $g^{kl}g_{lj} = \delta^k_j$.

Предложение

$\{g^{kl}\}$ *является тензором типа* $(2,0)$.

Доказательство.

Необходимо проверить тензорный закон. В новом базисе мы имеем $g^{k'i'}g_{i'j'} = \delta^{k'}_{j'}$. Так как $\{g_{ij}\}$ — тензор типа $(0,2)$, мы имеем $g_{i'j'} = c^i_{i'}c^j_{j'}g_{ij}$. Подставив это в предыдущую формулу, получим $g^{k'i'}c^i_{i'}c^j_{j'}g_{ij} = \delta^{k'}_{j'}$. Теперь умножим обе части этого равенства на компоненты обратной матрицы $c^{j'}_k$ (и просуммируем по j'): $g^{k'i'}c^i_{i'}c^j_{j'}c^{j'}_k g_{ij} = \delta^{k'}_{j'}c^{j'}_k$. Так как $c^j_{j'}c^{j'}_k = \delta^j_k$, отсюда получаем $g^{k'i'}c^i_{i'}g_{ik} = c^{k'}_k$. Далее умножим обе части на g^{kl}: $g^{k'i'}c^i_{i'}g_{ik}g^{kl} = c^{k'}_k g^{kl}$. Так как $g_{ik}g^{kl} = \delta^l_i$, получаем $g^{k'i'}c^l_{i'} = c^{k'}_k g^{kl}$. Наконец, умножим обе части на $c^{l'}_l$: $g^{k'i'}c^l_{i'}c^{l'}_l = c^{k'}_k c^{l'}_l g^{kl}$. Так как $c^l_{i'}c^{l'}_l = \delta^{l'}_{i'}$, окончательно получаем $g^{k'l'} = c^{k'}_k c^{l'}_l g^{kl}$. Это и есть тензорный закон преобразования для тензора типа $(2,0)$. □

Определение

Поднятие индекса — это линейное отображение $\mathrm{T}^p_q(V) \to \mathrm{T}^{p+1}_{q-1}(V)$ тензоров в евклидовом пространстве V, которое тензору $T = \{T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}\}$ типа (p,q) ставит в соответствие тензор $\{g^{ij}\,T^{i_1,\dots,i_p}_{j,j_2,\dots,j_q}\}$ типа $(p+1, q-1)$.

Операция опускания (или поднятия) индекса является композицией тензорного произведения с тензором $\{g_{ij}\}$ (или $\{g^{ij}\}$) и свёртки.

6.4. Базис в пространстве тензоров

Базис в пространстве тензоров $\mathrm{T}^p_q(V)$ можно задать при помощи операции тензорного произведения.

Рассмотрим полилинейную функцию $\boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_q}$. Её значение на p ковекторах и q векторах задаётся формулой

$$(\boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_q})(\xi^1, \ldots, \xi^p, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q) = \\ = \boldsymbol{e}_{i_1}(\xi^1) \cdots \boldsymbol{e}_{i_p}(\xi^p)\, \varepsilon^{j_1}(\boldsymbol{v}_1) \cdots \varepsilon^{j_q}(\boldsymbol{v}_q) = \xi^1_{i_1} \cdots \xi^p_{i_p} v^{j_1}_1 \cdots v^{j_q}_q,$$

а соответствующий тензор типа (p, q) имеет компоненты

$$T^{k_1,\ldots,k_p}_{l_1,\ldots,l_q} = (\boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_q})(\varepsilon^{k_1}, \ldots, \varepsilon^{k_p}, \boldsymbol{e}_{l_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{l_q}) = \\ = \delta^{k_1}_{i_1} \cdots \delta^{k_p}_{i_p} \delta^{j_1}_{l_1} \cdots \delta^{j_q}_{l_p}.$$

Т. е. компонента этого тензора с верхними индексами $i_1, \ldots, i_p$ и нижними $j_1, \ldots, j_q$ — единица, а остальные компоненты — нули.

Теорема

Тензоры $\boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_q}$, *отвечающие всевозможным значениями индексов* $i_1, \ldots, i_p$ *и* $j_1, \ldots, j_q$, *образуют базис в пространстве* $\mathrm{T}^p_q(V)$.

Доказательство

Сначала докажем линейную независимость данных тензоров. Предположим, существуют такие числа $\lambda^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}$, что линейная комбинация $\lambda^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}\boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_q}$ равна нулю. Применив эту полилинейную функцию к аргументам $\varepsilon^{k_1}, \ldots, \varepsilon^{k_p}, \boldsymbol{e}_{l_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{l_q}$, получим

$$0 = (\lambda^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}\boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_q})(\varepsilon^{k_1}, \ldots, \varepsilon^{k_p}, \boldsymbol{e}_{l_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{l_q}) =$$
$$= \lambda^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}\delta^{k_1}_{i_1}\cdots\delta^{k_p}_{i_p}\delta^{j_1}_{l_1}\cdots\delta^{j_q}_{l_p} = \lambda^{k_1,\ldots,k_p}_{l_1,\ldots,l_q},$$

т. е. все коэффициенты линейной комбинации равны нулю.

Доказательство (продолжение).

Теперь докажем, что любой тензор $T = \{T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}\}$ представляется в виде линейной комбинации данных тензоров. А именно, докажем, что

$$T = T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} \boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_q},$$

т. е. координаты тензора в данном базисе суть его компоненты. В силу полилинейности это равенство достаточно проверить на наборах базисных векторов и ковекторов, т. е. на аргументах вида $\varepsilon^{k_1}, \ldots, \varepsilon^{k_p}, \boldsymbol{e}_{l_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{l_q}$. При подстановке этих аргументов в левую часть мы по определению получаем $T^{k_1,\dots,k_p}_{l_1,\dots,l_q}$, а при подстановке в правую часть мы получаем

$$(T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} \boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_q})(\varepsilon^{k_1}, \ldots, \varepsilon^{k_p}, \boldsymbol{e}_{l_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{l_q}) =$$
$$= T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} \delta^{k_1}_{i_1} \cdots \delta^{k_p}_{i_p} \delta^{j_1}_{l_1} \cdots \delta^{j_q}_{l_p} = T^{k_1,\dots,k_p}_{l_1,\dots,l_q}. \quad \square$$

Следствие

Размерность пространства $\mathrm{T}^p_q(V)$ *равна* n^{p+q}.

6.5. Симметрические и кососимметрические тензоры

Здесь мы будем рассматривать только тензоры с нижними индексами. Мы будем обозначать через Σ_q группу перестановок индексов $1, \ldots, q$. Через $(-1)^\sigma$ будем обозначать знак перестановки $\sigma \in \Sigma_q$.

Определение

Полилинейная функция $\mathcal{T} \in \mathrm{P}^0_q(V)$ называется симметрической, если

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(q)}) = \mathcal{T}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q),$$

и кососимметрической, если

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(q)}) = (-1)^\sigma \mathcal{T}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q),$$

для любых векторов $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q$ и перестановки $\sigma \in \Sigma_q$.

Определение

Компоненты тензора $T \in \mathrm{T}^0_q(V)$, соответствующего симметрической полилинейной функции, удовлетворяет соотношениям

$$T_{j_1,\ldots,j_q} = T_{j_{\sigma(1)},\ldots,j_{\sigma(q)}},$$

а компоненты тензора, соответствующего кососимметрической полилинейной функции, — соотношениям

$$T_{j_1,\ldots,j_q} = (-1)^\sigma T_{j_{\sigma(1)},\ldots,j_{\sigma(q)}}.$$

Такие тензоры называются, соответственно, симметрическими и кососимметрическими. В частности, у косимметрического тензора могут быть отличны от нуля лишь компоненты $T_{j_1,\ldots,j_q}$, у которых все индексы различны.

Симметрические и кососимметрические тензоры образуют подпространства в пространстве тензоров $\mathrm{T}^0_q(V)$, которые обозначаются $\mathrm{S}_q(V)$ и $\Lambda_q(V)$, соответственно.

При $q = 2$ симметрические и кососимметрические тензоры — это симметрические и кососимметрические билинейные функции, соответственно.

Хотя подпространства $\mathrm{S}_q(V)$ и $\Lambda_q(V)$ и образуют прямую сумму в пространстве $\mathrm{T}^0_q(V)$, при $q > 2$ разложение $\mathrm{T}^0_q(V) = \mathrm{S}_q(V) \oplus \Lambda_q(V)$ не имеет места, в отличие от случая билинейных функций.

Определение

Симметризацией называется линейный оператор $\mathrm{Sym}\colon \mathrm{T}^0_q(V) \to \mathrm{T}^0_q(V)$, который тензору $T \in \mathrm{T}^0_q(V)$ ставит в соответствие тензор $\mathrm{Sym}\ T$ с компонентами

$$(\mathrm{Sym}\ T)_{j_1,\ldots,j_q} := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma\in\Sigma_q} T_{j_{\sigma(1)},\ldots,j_{\sigma(q)}}.$$

Альтернированием называется линейный оператор $\mathrm{Alt}\colon \mathrm{T}^0_q(V) \to \mathrm{T}^0_q(V)$, который тензору $T \in \mathrm{T}^0_q(V)$ ставит в соответствие тензор $\mathrm{Alt}\ T$ с компонентами

$$(\mathrm{Alt}\ T)_{j_1,\ldots,j_q} := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma\in\Sigma_q} (-1)^\sigma\, T_{j_{\sigma(1)},\ldots,j_{\sigma(q)}}.$$

Легко видеть, что $\mathrm{Sym}\ T$ — симметрический тензор, а $\mathrm{Alt}\ T$ — кососимметрический тензор для любого $T \in \mathrm{T}^0_q(V)$.

Предложение

Операторы Sym *и* Alt *являются проекторами на подпространства* $\mathrm{S}_q(V)$ *и* $\Lambda_q(V)$ *соответственно.*

Доказательство.

Оба утверждения доказываются аналогично. Докажем второе. В силу алгебраической характеризации проекторов, достаточно показать, что $\mathrm{Alt}\, T = T$ для любого кососимметрического тензора T. Мы имеем

$$(\mathrm{Alt}\, T)_{j_1,\ldots,j_q} := \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\Sigma_q}(-1)^\sigma T_{j_{\sigma(1)},\ldots,j_{\sigma(q)}} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\Sigma_q} T_{j_1,\ldots,j_q} = T_{j_1,\ldots,j_q},$$

где второе равенство выполнено в силу кососимметричности T. □