Линейная алгебра и геометрия

Лекция 25

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.
Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

11 мая 2021 г.

6.1. Полилинейные функции.

Пусть V — линейное пространство над полем $\Bbbk$ нулевой характеристики (обычно $\Bbbk = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и V^* — двойственное пространство. Элементы $\boldsymbol{v} \in V$ — это, как обычно, векторы, а элементы $\xi \in V^*$ здесь мы будем называть ковекторами.

Определение

Полилинейной функцией типа (p,q) называется функция

$$\mathcal{T}\colon \underbrace{V^*\times\ldots\times V^*}_{p}\times\underbrace{V\times\ldots\times V}_{q}\to \mathrm{k}$$

от p ковекторных и q векторных аргументов, которая линейна по каждому аргументу, т. е. удовлетворяет соотношениям

$$\mathcal{T}(\xi^1,\ldots,\lambda'\xi^{j\prime}+\lambda''\xi^{j\prime\prime},\ldots,\xi^p,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_q)=$$
$$=\lambda'\mathcal{T}(\xi^1,\ldots,\xi^{j\prime},\ldots,\xi^p,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_q)+\lambda''\mathcal{T}(,\xi^1,\ldots,\xi^{j\prime\prime},\ldots,\xi^p,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_q),$$

$$\mathcal{T}(\xi^1,\ldots,\xi^p,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\mu'\boldsymbol{v}_i'+\mu''\boldsymbol{v}_i'',\ldots,\boldsymbol{v}_q)=$$
$$=\mu'\mathcal{T}(\xi^1,\ldots,\xi^p,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_i',\ldots,\boldsymbol{v}_q)+\mu''\mathcal{T}(\xi^1,\ldots,\xi^p,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_i'',\ldots,\boldsymbol{v}_q).$$

Полилинейные функции типа (p,q) образуют линейное пространство, в котором сумма и умножение на скаляры определены по формуле

$$(\lambda\mathcal{T}+\mu\mathcal{S})(\xi^1,\ldots,\xi^p,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_q) = \\ = \lambda\mathcal{T}(\xi^1,\ldots,\xi^p,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_q)+\mu\mathcal{S}(\xi^1,\ldots,\xi^p,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_q).$$

Мы будем обозначать это пространство через $\mathrm{P}^p_q(V)$.

Пример

Линейные функции (ковекторы) являются полилинейными типа $(0,1)$, а билинейные — типа $(0,2)$.

Ввиду наличия канонического изоморфизма $(V^*)^*\cong V$ векторы являются полилинейными функциями типа $(1,0)$: значение вектора $\boldsymbol{v}$ на ковекторе ξ определяется по формуле $\boldsymbol{v}(\xi):=\xi(\boldsymbol{v})$.

Следующее утверждение показывает, что операторы также можно рассматривать как полилинейные функции.

Предложение

Сопоставление линейному оператору $\mathcal{A}$ полилинейной функции $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ типа $(1,1)$, задаваемой формулой $\mathcal{T}_\mathcal{A}(\xi, \boldsymbol{v}) := \xi(\mathcal{A}(\boldsymbol{v}))$, устанавливает канонический изоморфизм $\mathrm{End}(V) \xrightarrow{\cong} \mathrm{P}^1_1(V)$.

Доказательство.

Прежде всего заметим, что данное отображение $\mathrm{End}(V) \to \mathrm{P}^1_1(V)$ линейно. Пусть $\dim V = n$. Тогда размерность пространства $\mathrm{P}^1_1(V)$ равна n^2. (Это доказывается при помощи выбора базиса, так же как и для билинейных функций.) Поэтому размерности пространств $\mathrm{End}(V)$ и $\mathrm{P}^1_1(V)$ равны, а значит достаточно доказать, что $\mathrm{End}(V) \to \mathrm{P}^1_1(V)$ — мономорфизм. Пусть $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ — тождественно нулевая полилинейная функция, т. е. $\xi(\mathcal{A}(\boldsymbol{v})) = 0$ для любых $\boldsymbol{v} \in V$ и $\xi \in V^*$. Получаем, что любая линейная функция обращается в нуль на векторе $\mathcal{A}(\boldsymbol{v})$, т. е. $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = 0$. Так как это верно для любого $\boldsymbol{v}$, получаем $\mathcal{A} = \mathcal{O}$. Итак отображение $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{T}_\mathcal{A}$ мономорфно, а значит задаёт изоморфизм. $\square$

6.2. Тензоры: координатное определение

Зафиксируем базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в пространстве V. В пространстве V^* имеется двойственный базис $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$, где $\varepsilon^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j$. Тогда любая полилинейная функция $\mathcal{T} \in \mathrm{P}^p_q(V)$ задаётся своими значениями на базисных векторах и ковекторах:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\xi^1, \ldots, \xi^p, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q) &= \mathcal{T}(\xi^1_{i_1}\varepsilon^{i_1}, \ldots, \xi^p_{i_p}\varepsilon^{i_p}, v^{j_1}_1\boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, v^{j_q}_q\boldsymbol{e}_{j_q}) \\ &= \xi^1_{i_1}\cdots\xi^p_{i_p}v^{j_1}_1\cdots v^{j_q}_q\mathcal{T}(\varepsilon^{i_1}, \ldots, \varepsilon^{i_p}, \boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_q}).\end{aligned}$$

Сопоставим полилинейной функции $\mathcal{T} \in \mathrm{P}^p_q(V)$ и базису $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ набор из n^{p+q} чисел $T = \{T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}\}$, где

$$T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} := \mathcal{T}(\varepsilon^{i_1}, \ldots, \varepsilon^{i_p}, \boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_q}).$$

Посмотрим, как преобразуется это набор при заменах базиса.

Пусть $C = (c^i_{i'})$ — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$. Тогда мы имеем $\boldsymbol{e}_{j'} = c^j_{j'}\boldsymbol{e}_j$, $\varepsilon^{i'} = c^{i'}_i\varepsilon^i$ и

$$
\begin{aligned}
T^{i'_1,\ldots,i'_p}_{j'_1,\ldots,j'_q} &= \mathcal{T}(\varepsilon^{i'_1}, \ldots, \varepsilon^{i'_p}, \boldsymbol{e}_{j'_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j'_q}) = \\
&= \mathcal{T}(c^{i'_1}_{i_1}\varepsilon^{i_1}, \ldots, c^{i'_p}_{i_p}\varepsilon^{i_p}, c^{j_1}_{j'_1}\boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, c^{j_q}_{j'_q}\boldsymbol{e}_{j_q}) = \\
&= c^{i'_1}_{i_1}\cdots c^{i'_p}_{i_p}c^{j_1}_{j'_1}\cdots c^{j_q}_{j'_q}\mathcal{T}(\varepsilon^{i_1}, \ldots, \varepsilon^{i_p}, \boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_q}) = \\
&= c^{i'_1}_{i_1}\cdots c^{i'_p}_{i_p}c^{j_1}_{j'_1}\cdots c^{j_q}_{j'_q}\,T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}.
\end{aligned}
$$

Определение

Тензором типа (p,q) называется соответствие

$$\text{базисы в } V \quad \longmapsto \quad \text{наборы из } n^{p+q} \text{ чисел } T=\{T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}\},$$

при котором наборы $T=\{T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}\}$ и $T'=\{T^{i'_1,\ldots,i'_p}_{j'_1,\ldots,j'_q}\}$, соответствующие различным базисам $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}_{1'},\ldots,\boldsymbol{e}_{n'}$, связаны соотношением

$$T^{i'_1,\ldots,i'_p}_{j'_1,\ldots,j'_q}=c^{i'_1}_{i_1}\cdots c^{i'_p}_{i_p}c^{j_1}_{j'_1}\cdots c^{j_q}_{j'_q}T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}.$$

Это соотношение называется тензорным законом преобразования. Числа $T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}$ называются компонентами тензора T.

Тензоры типа (p,q) образуют линейное пространство $\mathrm{T}^p_q(V)$ относительно операций покомпонентного сложения и умножения на числа.

Полилинейная функция $\mathcal{T} \in \mathrm{P}^p_q(V)$ определяет тензор $T \in \mathrm{T}^p_q(V)$ по формуле

$$T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} := \mathcal{T}(\varepsilon^{i_1},\ldots,\varepsilon^{i_p},\boldsymbol{e}_{j_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{j_q}).$$

Обратно, тензор определяет полилинейную функцию по формуле

$$\mathcal{T}(\xi^1,\ldots,\xi^p,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_q) = \xi^1_{i_1}\cdots\xi^p_{i_p}v^{j_1}_1\cdots v^{j_q}_q T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}.$$

Таким образом, пространство полилинейных функций $\mathrm{P}^p_q(V)$ можно отождествить с пространством тензоров $\mathrm{T}^p_q(V)$. Это соответствие обобщает соответствие между билинейными функциями (или линейными операторами) и их матрицами.

Далее мы не будем различать полилинейные функции и тензоры. Мы будем говорить, например, что операторы — это тензоры типа $(1,1)$. Более точно, тензор, соответствующий оператору, — это сопоставление каждому базису матрицы оператора в этом базисе.

Пример

1. Скаляры $\lambda \in \Bbbk$ естественно считать тензорами типа $(0,0)$: они не меняются при замене базиса.

2. Векторы — это тензоры типа $(1,0)$. Тензорный закон преобразования $v^{i'} = c_i^{i'} v^i$ описывает изменение координат вектора при замене базиса.

3. Ковекторы (линейные функции) — это тензоры типа $(0,1)$. Тензорный закон преобразования $\xi_{i'} = c_{i'}^i \xi_i$ — это закон преобразования координат линейной функции при замене базиса.

4. Билинейные функции — это тензоры типа $(0,2)$. Тензорный закон преобразования $T_{i'j'} = c_{i'}^i c_{j'}^j T_{ij}$ — это закон изменения матрицы билинейной функции (в матричном виде: $T' = C^t TC$).

5. Линейные операторы — это тензоры типа $(1,1)$. Тензорный закон преобразования $T_{j'}^{i'} = c_i^{i'} c_{j'}^j T_j^i$ — это закон изменения матрицы оператора (в матричном виде: $T' = C^{-1} TC$).

6.3. Тензорное произведение, свёртка, опускание и поднятие индексов

Определение

Тензорным произведением двух полилинейных функций $\mathcal{T} \in \mathrm{P}^p_q(V)$ и $\mathcal{S} \in \mathrm{P}^r_s(V)$ называется полилинейная функция $\mathcal{T} \otimes \mathcal{S} \in \mathrm{P}^{p+r}_{q+s}(V)$, заданная по формуле

$$\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}(\xi^1, \ldots, \xi^p, \xi^{p+1}, \ldots, \xi^{p+r}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q, \boldsymbol{v}_{q+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{q+s}) =$$
$$= \mathcal{T}(\xi^1, \ldots, \xi^p, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q) \cdot \mathcal{S}(\xi^{p+1}, \ldots, \xi^{p+r}, \boldsymbol{v}_{q+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{q+s}).$$

Полилинейной функции $\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$ соответствует тензор $T \otimes S \in \mathrm{T}^{p+r}_{q+s}(V)$, компоненты которого задаются формулой

$$(T \otimes S)^{i_1,\ldots,i_p,i_{p+1},\ldots,i_{p+r}}_{j_1,\ldots,j_q,j_{q+1},\ldots,j_{q+s}} = T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} \cdot S^{i_{p+1},\ldots,i_{p+r}}_{j_{q+1},\ldots,j_{q+s}}.$$

Тензор $T \otimes S$ называется тензорным произведением тензоров T и S.

Операция тензорного произведения, очевидно, ассоциативна (т. е. $(T \otimes S) \otimes R = T \otimes (S \otimes R)$) и дистрибутивна (т. е. $(\lambda T + \mu S) \otimes R = \lambda T \otimes R + \mu S \otimes R$), но не коммутативна (вообще говоря, $T \otimes S \neq S \otimes T$).

Сумма и тензорное произведение превращают «пространство всех тензоров» $\mathrm{T}(V) = \bigoplus_{p,q} \mathrm{T}^p_q(V)$ в кольцо (точнее, алгебру над полем k), которая называется тензорной алгеброй или алгеброй Грассмана.

Пример

Пусть $\xi, \eta \in V^*$ — линейные функции, т. е. тензоры типа $(0, 1)$. Их тензорное произведение $\xi \otimes \eta$ является тензором типа $(0, 2)$, т. е. билинейной функцией. По определению, значение этой билинейной функции на паре векторов задаётся формулой
$(\xi \otimes \eta)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \xi(\boldsymbol{u}) \cdot \eta(\boldsymbol{v})$.

Свёртка

Пусть теперь $T = \{T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}\}$ — тензор с хотя бы одним верхним и нижним индексом, т. е. $p > 0$ и $q > 0$. Зафиксируем один верхний и один нижний индекс (пусть для простоты это будут первые индексы) и сформируем следующий новый набор из n^{p+q-2} чисел:

$$cT = \{T^{k,i_2,\dots,i_p}_{k,j_2,\dots,j_q}\},$$

где как обычно по повторяющемуся индексу k подразумевается суммирование.

Предложение

$cT = \{T^{k,i_2,\ldots,i_p}_{k,j_2,\ldots,j_q}\}$ *является тензором типа* $(p-1,q-1)$.

Доказательство.

Необходимо проверить тензорный закон. Мы имеем

$$(cT)^{i'_2,\ldots,i'_p}_{j'_2,\ldots,j'_q} = T^{k',i'_2,\ldots,i'_p}_{k',j'_2,\ldots,j'_q} = c^{k'}_{i_1} c^{i'_2}_{i_2} \cdots c^{i'_p}_{i_p} c^{j_1}_{k'} c^{j_2}_{j'_2} \cdots c^{j_q}_{j'_q} T^{i_1,i_2,\ldots,i_p}_{j_1,j_2,\ldots,j_q} =$$
$$= c^{i'_2}_{i_2} \cdots c^{i'_p}_{i_p} c^{j_2}_{j'_2} \cdots c^{j_q}_{j'_q} c^{k'}_{i_1} c^{j_1}_{k'} T^{i_1,i_2,\ldots,i_p}_{j_1,j_2,\ldots,j_q} = c^{i'_2}_{i_2} \cdots c^{i'_p}_{i_p} c^{j_2}_{j'_2} \cdots c^{j_q}_{j'_q} \delta^{j_1}_{i_1} T^{i_1,i_2,\ldots,i_p}_{j_1,j_2,\ldots,j_q} =$$
$$= c^{i'_2}_{i_2} \cdots c^{i'_p}_{i_p} c^{j_2}_{j'_2} \cdots c^{j_q}_{j'_q} T^{k,i_2,\ldots,i_p}_{k,j_2,\ldots,j_q} = c^{i'_2}_{i_2} \cdots c^{i'_p}_{i_p} c^{j_2}_{j'_2} \cdots c^{j_q}_{j'_q} (cT)^{i_2,\ldots,i_p}_{j_2,\ldots,j_q},$$

что и требовалось. □

Определение

Тензор $cT = \{T^{k,i_2,\ldots,i_p}_{k,j_2,\ldots,j_q}\}$ называется **свёрткой** тензора $T = \{T^{i_1,i_2,\ldots,i_p}_{j_1,j_2,\ldots,j_q}\}$ по (первым) верхнему и нижнему индексам. Свёртка, очевидно, задаёт линейное отображение $\mathrm{T}^p_q(V) \to \mathrm{T}^{p-1}_{q-1}(V)$.

Операцию свёртки можно проводить несколько раз до исчерпания верхних или нижних индексов. Последняя возможная свёртка (после которой не остаётся либо верхних, либо нижних индексов) называется **полной свёрткой**.

Пример

1. Пусть $\mathcal{A}$ — оператор, т. е. тензор типа $(1,1)$. Результатом его свёртки будет тензор типа $(0,0)$, т. е. скаляр. Этот скаляр — это сумма a_i^i диагональных элементов матрицы оператора $\mathcal{A}$ в любом базисе, т. е. след оператора: $c\mathcal{A} = \operatorname{tr}\mathcal{A}$. Проверка тензорного закона для свёртки в данном случае сводится к проверке независимости следа от базиса.

2. Пусть $B = \{b_{j_1 j_2}\}$ — билинейная функция (тензор типа $(0,2)$), а $u = \{u^{i_1}\}$, $v = \{v^{i_2}\}$ — векторы (тензоры типа $(1,0)$). Рассмотрим тензор

$$B \otimes u \otimes v = \{b_{j_1 j_2} u^{i_1} v^{i_2}\}$$

типа $(2,2)$. Его полная свёртка есть скаляр

$$b_{kl} u^k v^l = B(u,v)$$

— значение билинейной функции на данной паре векторов.