# Линейная алгебра и геометрия

## Лекция 24

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.
Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

4 мая 2021 г.

# 5.10. Симплектические пространства. Лагранжевы подпространства.

Евклидово пространство можно определить как вещественное линейное пространство с фиксированной невырожденной симметрической билинейной функцией. Аналогично вводится следующее определение.

**Определение**

*Симплектическим пространством* называется вещественное пространство $V$ с фиксированной невырожденной кососимметрической билинейной функцией, которая обозначается $\omega\colon V \times V \to \mathbb{R}$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

Размерность симплектического пространства $V$ всегда чётна (так как в нечётномерных пространствах нет невырожденных кососимметрических билинейных функций). Мы фиксируем обозначение $\dim V = n = 2m$.

## Определение

Ортогональным дополнением подпространства $U$ в симплектическом пространстве $V$ называется подпространство

$$U^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \in V\colon\ \omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0 \quad \text{для всех } \boldsymbol{u} \in U\}.$$

Свойства ортогонального дополнения в симплектическом пространстве во многом повторяют соответствующие свойства в евклидовом пространстве.

## Предложение

*Для любых подпространств $U$ и $W$ симплектического пространства $V$ имеем*

а) $\dim U^{\perp} = n - \dim U$;

б) $(U^{\perp})^{\perp} = U$;

в) $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$;

г) $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$.

## Доказательство

а) $\dim U^\perp = n - \dim U$. Выберем базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ в $U$ и дополним его до базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в $V$. Пусть в этом базисе кососимметрическая функция $\omega$ задаётся матрицей $B = (b_{ij})$, т. е. $\omega(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = b_{ij}$. Тогда для вектора $\boldsymbol{x} = x^j \boldsymbol{e}_j$ условие принадлежности подпространству $U^\perp$ записывается $k$ линейными уравнениями

$$\omega(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x}) = \omega(\boldsymbol{e}_i, x^j \boldsymbol{e}_j) = b_{ij} x^j = 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Матрица этой системы уравнений представляет собой $(k \times n)$-матрицу, составленную из первых $k$ строк матрицы $B$. Так как матрица $B$ невырождена (имеет ранг $n$), ранг матрицы системы равен $k$, а значит размерность пространства решений равна $n - k = n - \dim U$, что и требовалось.

б) $(U^\perp)^\perp = U$. Так как $\omega$ — кососимметрическая функция, равенство $\omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ для любых $\boldsymbol{u} \in U$ и $\boldsymbol{v} \in U^\perp$ означает, что $U \subset (U^\perp)^\perp$. Из утверждения а) вытекает, что $\dim (U^\perp)^\perp = n - (n - \dim U) = \dim U$, поэтому $U = (U^\perp)^\perp$.

## Доказательство (продолжение).

в) Докажем, что $(U+W)^\perp \subset U^\perp \cap W^\perp$. Пусть $\boldsymbol{v} \in (U+W)^\perp$, т. е. $\omega(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})=0$ для любых $\boldsymbol{u}\in U$ и $\boldsymbol{w}\in W$. Полагая $\boldsymbol{w}=0$ и $\boldsymbol{u}=0$ мы получим, соответственно, $\boldsymbol{v}\in U^\perp$ и $\boldsymbol{v}\in W^\perp$, откуда $\boldsymbol{v}\in U^\perp\cap W^\perp$.

Теперь докажем, что $U^\perp\cap W^\perp \subset (U+W)^\perp$. Пусть $\boldsymbol{v}\in U^\perp\cap W^\perp$. Тогда $\omega(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$ для любого $\boldsymbol{u}\in U$ и $\omega(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})=0$ для любого $\boldsymbol{w}\in W$. Следовательно, $\omega(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})=0$, т. е. $\boldsymbol{v}\in(U+W)^\perp$.

г) Ясно, что $U^\perp \subset (U\cap W)^\perp$ и $W^\perp\subset(U\cap W)^\perp$, откуда $U^\perp+W^\perp\subset(U\cap W)^\perp$. Далее, имеем

$$\dim(U^\perp+W^\perp)=\dim U^\perp+\dim W^\perp-\dim(U^\perp\cap W^\perp)=$$
$$=\dim U^\perp+\dim W^\perp-\dim(U+W)^\perp=$$
$$=n-\dim U+n-\dim W-n+\dim(U+W)=n-\dim(U\cap W)=\dim(U\cap W)^\perp.$$

Поэтому $(U\cap W)^\perp=U^\perp+W^\perp$. □

Те же свойства выполнены для произвольной невырожденной билинейной функции, но при этом необходимо различать левое и правое ортогональное дополнение.

В отличие от евклидовых пространств, равенство $V = U \oplus U^{\perp}$ может не иметь места в симплектическом пространстве.

### Определение

Подпространство $U \subset V$ называется изотропным, если $\omega|_U = 0$, т. е. $\omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') = 0$ для любых $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in U$.

Другими словами, $U$ изотропно, если $U \subset U^{\perp}$. Для изотропного пространства мы имеем $\dim U \leqslant \dim U^{\perp} = n - \dim U$, откуда $\dim U \leqslant m = \frac{n}{2}$.

Изотропное подпространство $L$ максимальной размерности $m = \frac{\dim V}{2}$ называется лагранжевым. Для такого подпространства имеем $L = L^{\perp}$.

Из теоремы о нормальном виде кососимметрической функции вытекает, что существует базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2n}$, для которого

$$\omega(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ нечётно и } j = i+1, \\ 0 & \text{для всех остальных } i \text{ и } j > i. \end{cases}$$

Рассмотрим новый базис, получаемый перенумерацией векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2n}$:

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{e}_{2i-1}, \quad \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{e}_{2i}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Такой базис $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ удовлетворяет соотношениям

$$\omega(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j) = \delta_{ij}, \quad \omega(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \omega(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) = 0$$

и называется симплектическим или гамильтоновым базисом. Матрица функции $\omega$ в симплектическом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$.

Из существования симплектического базиса сразу вытекает существование лагранжевых подпространств. Для каждого подмножества индексов $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, m\}$ (возможно, пустого) положим
$$L_I = \langle \boldsymbol{a}_i \colon i \in I,\ \boldsymbol{b}_j \colon j \notin I \rangle.$$
Ясно, что $\dim L_I = m$ и $L_I$ — лагранжево подпространство. В частности, $L_{\{1,\ldots,m\}} = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle$ и $L_\varnothing = \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m \rangle$. Лагранжевы пространства вида $L_I$ называются стандартными для данного симплектического базиса.

Следующие два утверждения показывают, что лагранжевых подпространств достаточно много.

## Лемма

*Любое изотропное подпространство $U$ содержится в лагранжевом.*

## Доказательство.

Пусть $\dim U = k$. Рассмотрим $\omega|_{U^\perp}$ — ограничение кососимметрической функции $\omega$ на подпространство $U^\perp$. Так как $\omega|_U = 0$ и $U \subset U^\perp$, кососимметрическая функция $\omega|_{U^\perp}$ вырождена (если $U \ne \{0\}$), а её ранг равен

$$\dim U^\perp - \dim(U^\perp)^\perp = \dim U^\perp - \dim U = n - k - k = 2(m-k).$$

Приведя функцию $\omega|_{U^\perp}$ к нормальному виду, получим, что в некотором базисе $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{m-k}, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{m-k}, \boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_k$ её матрица будет иметь вид $\begin{pmatrix} 0 & E & 0 \\ -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При этом $U = \langle \boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_k \rangle$.

Рассмотрим $L = \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{m-k}, \boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_k \rangle$. Тогда $U \subset L$ и $\dim L = m$. Наконец, $L$ лагранжево, так как матрица ограничения $\omega|_L$ есть правый нижний квадрат из нулей в матрице ограничения $\omega|_{U^\perp}$. □

## Теорема

*Для любого лагранжева подпространства $L \subset V$ существует такое лагранжево подпространство $\widetilde{L}$, что*

$$V = L \oplus \widetilde{L}.$$

*Подпространство $\widetilde{L}$ можно выбрать среди стандартных подпространств $L_I = \langle \boldsymbol{a}_i \colon i \in I,\ \boldsymbol{b}_j \colon j \notin I \rangle$, отвечающих произвольному наперёд заданному симплектическому базису $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$.*

## Доказательство.

Рассмотрим подпространство $L_{\{1,\ldots,m\}} = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle$ и пусть $I$ — такое подмножество индексов, что векторы $\boldsymbol{a}_i$, $i \in I$, порождают в $L_{\{1,\ldots,m\}}$ подпространство, дополнительное к $L_{\{1,\ldots,m\}} \cap L$:

$$(L_{\{1,\ldots,m\}} \cap L) \oplus \langle \boldsymbol{a}_i \colon i \in I \rangle = L_{\{1,\ldots,m\}}$$

(для этого нужно выбрать базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ в $L_{\{1,\ldots,m\}} \cap L$ и затем выбросить из семейства векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ все векторы, линейно выражающиеся через предыдущие). Так как $L_{\{1,\ldots,m\}} \cap L \subset L = L^\perp$ и $\langle \boldsymbol{a}_i \colon i \in I \rangle \subset L_I = L_I^\perp$, мы имеем

$$L_{\{1,\ldots,m\}} = (L_{\{1,\ldots,m\}} \cap L) \oplus \langle \boldsymbol{a}_i \colon i \in I \rangle \subset L^\perp + L_I^\perp = (L \cap L_I)^\perp.$$

Следовательно, $L \cap L_I \subset L^\perp_{\{1,\ldots,m\}} = L_{\{1,\ldots,m\}}$. Тогда

$$L \cap L_I = (L \cap L_{\{1,\ldots,m\}}) \cap (L_I \cap L_{\{1,\ldots,m\}}) = (L \cap L_{\{1,\ldots,m\}}) \cap \langle \boldsymbol{a}_i \colon i \in I \rangle = \{0\}.$$

Так как $\dim L + \dim L_I = \dim V$, мы получаем, что $V = L \oplus L_I$. $\square$

# 5.11. Обобщённое скалярное произведение. Псевдоевклидовы пространства

**Определение**

Пусть $V$ — вещественное пространство. Скажем, что на $V$ задано обобщённое скалярное произведение, если на $V$ задана фиксированная невырожденная билинейная функция $\mathcal{B}$. По аналогии с обычным скалярным произведением будем обозначать обобщённое скалярное произведение через $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Примерами являются евклидово пространство (скалярное произведение — симметрическая положительно определённая билинейная функция) и симплектическое пространство (скалярное произведение — невырожденная кососимметрическая билинейная функция).

## Определение

Псевдоевклидовым пространством называется пространство с обобщённым скалярным произведением, задаваемым невырожденной симметрической билинейной функцией (не обязательно положительно определённой).

Псевдоевклидово пространство размерности $p+q$ с симметрической билинейной функцией сигнатуры $p-q$ обозначается $\mathbb{R}^{p,q}$.
Пространство $\mathbb{R}^{1,3}$ называется пространством Минковского, оно является моделью пространства-времени в специальной теории относительности.

## Определение

Оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$ сохраняет обобщённое скалярное произведение, если $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

## Предложение

*Пусть обобщённое скалярное произведение задаётся матрицей $G$ в некотором базисе. Тогда оператор, заданный матрицей $A$ в том же базисе, сохраняет обобщённое скалярное произведение тогда и только тогда, когда выполнено соотношение $A^tGA = G$.*

## Доказательство.

Пусть в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ имеем $\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i = a_i^j\boldsymbol{e}_j$ и $g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$. Тогда для матриц $A = (a_i^j)$ и $G = (g_{ij})$ имеем

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = g_{ij} = (G)_{ij},$$

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i, \mathcal{A}\boldsymbol{e}_j) = (a_i^k\boldsymbol{e}_k, a_j^l\boldsymbol{e}_l) = a_i^k a_j^l(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) = a_i^k g_{kl} a_j^l = (A^tGA)_{ij}.$$

Поэтому соотношения $(\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i, \mathcal{A}\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ для всех $i, j$ эквивалентны матричному соотношению $A^tGA = G$. □

## Предложение

*Операторы, сохраняющие обобщённое скалярное произведение, образуют группу относительно композиции.*

## Доказательство.

Очевидно, что тождественный оператор сохраняет обобщённое скалярное произведение, и композиция операторов с этим свойством также обладает этим свойством. Кроме того, если оператор $\mathcal{A}$, сохраняющий обобщённое скалярное произведение, обратим, то $\mathcal{A}^{-1}$ также сохраняет скалярное произведение:

$$(\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{y}) = (\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Существование обратного оператора вытекает из соотношения $A^t GA = G$. Действительно, вычисление определителя даёт $(\det A)^2 \det G = \det G$; так как матрица $G$ невырождена, получаем $\det A \neq 0$. □

В ортонормированном базисе евклидова пространства имеем $G = E$ и соотношение $A^t GA = G$ превращается в $A^t A = E$, что выделяет ортогональные матрицы.

По аналогии, назовём базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{p+q}$ псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{p,q}$ ортонормированным, если $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0$ при $i \neq j$, $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant p$ и $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = -1$ при $p + 1 \leqslant i \leqslant p + q$.

В ортонормированном базисе обобщённое скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ задаётся формулой

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x^1 y^1 + \ldots + x^p y^p - x^{p+1} y^{p+1} - \ldots - x^{p+1} y^{p+q}.$$

Группа операторов, сохраняющих евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, уже известна нам как ортогональная группа $O(n)$.

## Определение

Группа операторов, сохраняющих псевдоевклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^{p,q}$, называется псевдортогональной группой и обозначается $O(p,q)$. В ортонормированном базисе матрица $A$ псевдоортогонального оператора удовлетворяет соотношению $A^tGA = G$, где $G = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$ с блоками размеров $p$ и $q$. Такие матрицы называются псевдоортогональными.

Группа операторов, сохраняющих симплектическое скалярное произведение в $\mathbb{R}^{2m}$, называется симплектической группой и обозначается $Sp(2m)$. В гамильтоновом базисе матрица $A$ симплектического оператора удовлетворяет соотношению $A^tGA = G$, где $G = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ с блоками размера $m$. Такие матрицы называются симплектическими.

## Пример (напоминание)

Ортогональные $2 \times 2$-матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2)$распадаются в два семейства, каждое из которых параметризуется углом $\varphi \in [0, 2\pi)$:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

## Пример

Псевдоортогональные $2 \times 2$-матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(1,1)$ определяются соотношением

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т. е. $a^2 - c^2 = 1$, $b^2 - d^2 = -1$ и $ab - cd = 0$. Здесь имеется четыре семейства:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\psi & -\operatorname{sh}\psi \\ -\operatorname{sh}\psi & -\operatorname{ch}\psi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\psi & -\operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ -\operatorname{sh}\psi & -\operatorname{ch}\psi \end{pmatrix},$$

где $\psi \in (-\infty, +\infty)$ — угол гиперболического поворота. Матрицы из первых двух семейств имеют определитель 1, а из последних двух — определитель $-1$.

## Пример

Симплектические $2 \times 2$-матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(2)$ определяются соотношением

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

что эквивалентно соотношению $\det A = 1$. Таким образом, $Sp(2) = SL(2, \mathbb{R})$.

Можно доказать (задача), что определитель любой симплектической матрицы равен единице. Однако $Sp(2m) \neq SL(2m, \mathbb{R})$ при $m > 1$.