Линейная алгебра и геометрия

Лекция 23

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

30 апреля 2021 г.

5.7. Симметрические билинейные функции в евклидовых пространствах

Пусть V — евклидово пространство. Мы знаем, что отображение $\boldsymbol{x} \mapsto \xi_{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}, \cdot\,)$ устанавливает канонический изоморфизм $V \to V^*$ между V и его двойственным пространством V^*. Это позволяет нам отождествить пространства линейных отображений $\mathrm{Hom}(V, V)$ и $\mathrm{Hom}(V, V^*)$.

С другой стороны, $\mathrm{Hom}(V, V)$ — это пространство $\mathrm{End}(V)$ линейных операторов, а $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ отождествляется с пространством билинейных функций $\mathrm{B}(V)$. Если вникнуть в построение этих изоморфизмов, то мы увидим, что в явном виде канонический изоморфизм между пространством операторов и пространством билинейных функций в евклидовом пространстве описывается следующим утверждением, которое легко доказать и непосредственно.

Предложение

Пусть V — евклидово пространство. Отображение $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}\cdot\,,\,\cdot)$ устанавливает изоморфизм $\psi\colon \mathrm{End}(V) \to \mathrm{B}(V)$ между пространством операторов и пространством билинейных функций. Здесь $\mathcal{B}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}\cdot\,,\,\cdot)$ — билинейная функция, задаваемая формулой $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Доказательство.

Так как пространства $\mathrm{End}(V)$ и $\mathrm{B}(V)$ имеют одинаковую размерность n^2, достаточно проверить мономорфность отображения ψ. Пусть $\psi(\mathcal{A}) = 0$, т. е. $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ — тождественно нулевая функция. Тогда $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$. В частности, $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{x}) = 0$ для любого $\boldsymbol{x}$, т. е. $\mathcal{A}\boldsymbol{x} = 0$ и $\mathcal{A} = \mathcal{O}$ — нулевой оператор. □

Это утверждение имеет важные следствия: оно позволяет переводить утверждения об операторах в утверждения о билинейных функциях и наоборот. Одно из основных приложений заключается в следующем.

Теорема

Для билинейной симметрической функции в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором её матрица диагональна.

Другими словами, квадратичная форма приводится к диагональному виду ортогональным преобразованием.

Первое доказательство.

Пусть $\mathcal{B}$ — симметрическая билинейная функция и $\mathcal{A}$ — соответствующий ей оператор, т. е. $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathcal{A}}$. Тогда из $\mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ получаем $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathcal{A}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y})$, т. е. оператор $\mathcal{A}$ самосопряжён. Выберем ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, т. е. $\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i \boldsymbol{e}_i$. Тогда для матрицы $B = (b_{ij})$ функции $\mathcal{B}$ в этом базисе имеем

$$b_{ij} = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = (\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = (\lambda_i \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \lambda_i \delta_{ij},$$

т. е. матрица B диагональна (и совпадает с матрицей оператора $\mathcal{A}$). $\square$

Второе доказательство.

Посмотрим, как преобразуются матрица билинейной функции и матрица оператора при ортогональном преобразовании. Пусть B — матрица билинейной функции в некотором ортонормированном базисе. При ортогональном преобразовании с матрицей C матрица B переходит в матрицу $B' = C^t BC$. Так как матрица C ортогональна, то же преобразование мы можем записать в виде $B' = C^{-1}BC$. Но это — закон преобразования для матрицы оператора. Так как оператор с симметричной матрицей B в ортонормированном базисе самосопряжён, его можно привести к диагональному виду ортогональным преобразованием. □

Определение

Диагональный вид, к которому приводится симметрическая билинейная функция (квадратичная форма) ортогональным преобразованием, называется **каноническим**.

Предложение

Канонический вид симметрической билинейной функции (квадратичной формы) единствен с точностью до перестановки диагональных элементов. Эти элементы представляют собой собственные значения матрицы квадратичной формы в любом ортонормированном базисе.

Доказательство.

Пусть Q — матрица квадратичной формы в ортонормированном базисе. Диагональные элементы канонического вида — это собственные значения самосопряжённого оператора с матрицей Q, т. е. корни уравнения $\det(Q - tE) = 0$. В другом ортонормированном базисе матрица квадратичной формы есть $Q' = C^tQC$ и её собственные значения находятся из уравнения $\det(Q' - tE) = 0$. Так как

$$\det(Q' - tE) = \det(C^tQC - tC^tC) = \det(C^t(Q - tE)C) = \\ = \det(C^tC)\det(Q - tE) = \det(Q - tE),$$

собственные значения матриц Q и Q' совпадают. $\square$

5.8. Приведение пары форм к диагональному виду

Собственные векторы матрицы квадратичной формы также называют её главными осями, а приведение к каноническому виду — приведением к главным осям.

Модификация предыдущей теоремы позволяет одновременно приводить к диагональному виду (к главным осям) сразу две квадратичные формы, одна из которых положительно определена.

Теорема

Пусть даны две квадратичные формы $Q(x)$ и $B(x)$, причём форма $Q(x)$ положительно определена. Тогда существует линейная замена координат $x = Cy$, приводящая форму $Q(x)$ к нормальному виду $(y^1)^2 + \ldots + (y^n)^2$, а форму $B(x)$ — к диагональному виду $\lambda_1(y^1)^2 + \ldots + \lambda_n(y^n)^2$.

Доказательство.

Положительно определённая симметрическая билинейная функция, соответствующая квадратичной форме $Q(x)$, превращает V в евклидово пространство.

В исходных координатах матрица Грама скалярного произведения есть Q. В любом ортонормированном базисе матрица Грама (она же матрица квадратичной формы $Q(x)$) будет единичной. Согласно предыдущей теореме, существует ортонормированный базис, в котором матрица формы $B(x)$ имеет диагональный вид. □

Обратим внимание, что матрица C замены координат из предыдущей теоремы не является ортогональной: вместо соотношения $C^tC = E$ она удовлетворяет соотношению $C^tQC = E$. Другими словами, столбцы матрицы C образуют ортонормированный базис относительно скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$ с матрицей Грама Q.

Если мы попытаемся превратить доказательство теоремы о приведении пары форм в практический алгоритм, то нам придётся действовать в два шага:

сначала найти матрицу C', приводящую Q к единичному виду, т. е. $(C')^tQC' = E$, а матрицу B к некоторому виду $B' = (C')^tBC'$;

затем найти ортогональную матрицу C'', приводящую B' к каноническому (диагональному) виду, т. е. $(C'')^tB'C'' = D$ — диагональная матрица;

тогда для $C = C'C''$ мы имеем $C^tQC = E$ и $C^tBC = D$.

На практике, однако, это метод не очень эффективен. Более эффективный метод основан на следующем определении.

Определение

Пусть даны две квадратичные формы $Q(x)$ и $B(x)$, причём $Q(x)$ положительно определена. Корни уравнения $\det(B - tQ) = 0$ называются собственными значениями пары форм $Q(x)$ и $B(x)$.

Пусть λ — собственное значение пары форм $Q(x)$ и $B(x)$. Ненулевой вектор y, удовлетворяющий системе уравнений $(B - \lambda Q)y = 0$, называется собственным вектором пары форм, соответствующим собственному значению λ.

Теорема

Предположим, что линейная замена $x = Cy$ приводит положительно определённую форму $Q(x)$ к нормальному виду $(y^1)^2 + \ldots + (y^n)^2$, а форму $B(x)$ — к диагональному виду $\lambda_1(y^1)^2 + \ldots + \lambda_n(y^n)^2$.

Тогда числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ суть собственные векторы пары форм $Q(x)$ и $B(x)$, а столбцы матрицы C образуют базис из собственных векторов пары форм, который является ортонормированным относительно скалярного произведения, задаваемого формой $Q(x)$.

Доказательство.

Мы имеем $C^tQC = E$, а $C^tBC = D$, где D — диагональная матрица с числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на диагонали. Тогда для любого i матрица $D - \lambda_i E$ вырождена, следовательно,

$$\begin{aligned} 0 = \det(D - \lambda_i E) = \det(C^tBC - \lambda_i C^tQC) = \\ = \det(C^t(B - \lambda_i Q)C) = \det(C)^2 \det(B - \lambda_i Q). \end{aligned}$$

Так как матрица C невырождена, отсюда следует, что $\det(B - \lambda_i Q) = 0$, т. е. λ_i — собственное значение пары форм.

Пусть c_i — i-й столбец матрицы C. Из соотношения $C^t(B - \lambda_i Q)C = D - \lambda_i E$ мы получаем, что i-й столбец матрицы $C^t(B - \lambda_i Q)C$ нулевой, т. е. $C^t(B - \lambda_i Q)c_i = 0$. Так как матрица C обратима, отсюда следует, что $(B - \lambda_i Q)c_i = 0$, т. е. c_i — собственный вектор пары форм, отвечающий собственному значению λ_i.

Наконец, соотношение $C^tQC = E$ выражает тот факт, что столбцы матрицы C образуют ортонормированный базис относительно скалярного произведения с матрицей Грама Q. $\square$

5.9. Кососимметрические билинейные функции

Пусть $\mathcal{B}$ — кососимметрическая билинейная функция в пространстве над полем характеристики, не равной 2. Соответствующую ей кососимметрическую билинейную форму $B(x,y) = b_{ij}x^iy^j$, где $b_{ji} = -b_{ij}$, можно представить в виде

$$B(x,y) = \sum_{i<j} b_{ij}(x^iy^j - x^jy^i).$$

Теорема

Для любой кососимметрической билинейной функции $\mathcal{B}$ над полем характеристики, не равной 2, существует базис, в котором её матрица блочно-диагональная с блоками размера 1 или 2, причём блоки размера 1 нулевые, а блоки размера 2 имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Другими словами, любую кососимметрическую билинейную форму $B(x,y)$ линейной заменой координат можно привести к виду

$$(x^1y^2 - x^2y^1) + (x^3y^4 - x^4y^3) + \ldots + (x^{2k-1}y^{2k} - x^{2k}y^{2k-1}).$$

Доказательство

Проведём индукцию по размерности пространства V.

При $\dim V = 1$ доказывать нечего, так как кососимметрическая функция нулевая (здесь пользуемся тем, что характеристика поля не равна 2).

Пусть $\dim V = 2$. Тогда матрица кососимметрической функции в произвольном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, где $b = b_{12} = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$. Пусть $b \neq 0$ (иначе мы уже имеем два блока из нулей). Тогда в новом базисе $\boldsymbol{e}_{1'} = \boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_{2'} = \frac{1}{b}\boldsymbol{e}_2$ мы имеем

$$b'_{12} = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1, \frac{1}{b}\boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{b}\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1,$$

т. е. матрица кососимметрической формы имеет требуемый вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Доказательство (продолжение)

Теперь предположим, что утверждение уже доказано для пространств размерности меньше n, и докажем его для размерности n. Можно считать, что функция $\mathcal{B}$ не является тождественно нулевой (иначе доказывать нечего). Пусть $b_{12} = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \neq 0$ для некоторого базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Попытаемся заменить базисные векторы так, чтобы новые векторы $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$ удовлетворяли соотношениям

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}) = 1, \quad \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{i'}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{i'}) = 0 \quad \text{при } i \geqslant 3. \tag{1}$$

Новый базис будем искать в виде

$$\boldsymbol{e}_{1'} = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_{2'} = c\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_{i'} = \boldsymbol{e}_i + c^1_{i'}\boldsymbol{e}_1 + c^2_{i'}\boldsymbol{e}_2 \quad \text{при } i \geqslant 3.$$

Подставив эти соотношения в (1), получим $c = \frac{1}{b_{12}}$ и

$$0 = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{i'}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_i + c^1_{i'}\boldsymbol{e}_1 + c^2_{i'}\boldsymbol{e}_2) = b_{1i} + c^2_{i'}b_{12},$$

откуда $c^2_{i'} = -\frac{b_{1i}}{b_{12}}$. Аналогично,

$$0 = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{i'}) = \mathcal{B}(c\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_i + c^1_{i'}\boldsymbol{e}_1 + c^2_{i'}\boldsymbol{e}_2) = c(b_{2i} - c^1_{i'}b_{12}),$$

откуда $c^1_{i'} = \frac{b_{2i}}{b_{12}}$.

Доказательство (окончание).

Окончательно, наша замена базиса имеет вид

$$\boldsymbol{e}_{1'} = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_{2'} = \frac{1}{b_{12}}\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_{i'} = \boldsymbol{e}_i + \frac{b_{2i}}{b_{12}}\boldsymbol{e}_1 - \frac{b_{1i}}{b_{12}}\boldsymbol{e}_2 \quad \text{при } i \geqslant 3.$$

При этом выполнены соотношения

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}) = 1, \quad \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{i'}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{i'}) = 0 \quad \text{при } i \geqslant 3,$$

т. е. в новом базисе матрица билинейной функции $\mathcal{B}$ имеет вид

$$B' = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \widetilde{B}' & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right)$$

где $\widetilde{B}'$ — матрица билинейной функции $\mathcal{B}$ на подпространстве $\langle \boldsymbol{e}_{3'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'} \rangle$. Так его размерность $n-2$, по предположению индукции в нём существует требуемый базис $\boldsymbol{e}_{3''}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n''}$. Тогда в базисе $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3''}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n''}$ исходного пространства V матрица кососимметрической функции $\mathcal{B}$ имеет требуемый вид. $\square$

Вид, описанный в предыдущей теореме, называется нормальным видом кососимметрической билинейной формы.

Следствие

а) *Ранг кососимметрической билинейной функции — чётное число.*

б) *Кососимметрическая билинейная функция в пространстве нечётной размерности всегда вырождена.*

Ясно, что нормальный вид кососимметрической билинейной формы зависит только от её ранга, и поэтому мы получаем:

Предложение

Две кососимметрические билинейные формы получаются друг из друга линейной заменой координат тогда и только тогда, когда их ранги совпадают.

Обратим внимание, что, в отличие от случая симметрических функций, нормальный вид кососимметрической функции не зависит от поля (при условии, что его характеристика отлична от 2).