Линейная алгебра и геометрия
Лекция 22

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.
Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

27 апреля 2021 г.

5.4. Нормальный вид эрмитовых полуторалинейных функций

Теорема

Для любой эрмитовой полуторалинейной функции $\mathcal{S}$ существует базис, в котором её матрица имеет диагональный вид с 1, -1 и 0 на диагонали.

Доказательство

Доказательство аналогично доказательству теоремы для симметрических билинейных функций: отличие имеется лишь во вспомогательном преобразовании. Мы проведём доказательство методом поиска базиса.

Доказательство (продолжение)

Пусть $S = (s_{ij})$ — матрица полуторалинейной функции $\mathcal{S}$ в исходном базисе, т. е. $s_{ij} = \mathcal{S}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$.

Основное преобразование производится, если первый диагональный элемент отличен от нуля, т. е. $s_{11} = \mathcal{S}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) \neq 0$. Замена базиса производится по тем же формулам, что и для симметрической билинейной функции:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{1'} &= \boldsymbol{e}_1,\\
\boldsymbol{e}_{2'} &= \boldsymbol{e}_2 - \frac{\mathcal{S}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)}{\mathcal{S}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 - \frac{s_{12}}{s_{11}}\boldsymbol{e}_1,\\
&\dots\\
\boldsymbol{e}_{n'} &= \boldsymbol{e}_n - \frac{\mathcal{S}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_n)}{\mathcal{S}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_n - \frac{s_{1n}}{s_{11}}\boldsymbol{e}_1.
\end{aligned}$$

Первое вспомогательное преобразование производится, если $s_{11} = 0$, но существует $s_{ii} \neq 0$, и заключается в перестановке 1-го и i-го базисных векторов.

Доказательство (продолжение)

Второе вспомогательное преобразование производится, если все $s_{ii} = \mathcal{S}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i)$ равны нулю. Пусть $s_{12} = \mathcal{S}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \ne 0$. Здесь возможны два случая: $\operatorname{Re} s_{12} \ne 0$ и $\operatorname{Re} s_{12} = 0$. В первом случае производим ту же замену, что и для симметрических билинейных функций:

$$\boldsymbol{e}_{1'} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_{2'} = \boldsymbol{e}_2, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_{n'} = \boldsymbol{e}_n.$$

Тогда в новом базисе мы имеем

$$\begin{aligned} s'_{11} = \mathcal{S}(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{1'}) = \mathcal{S}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = \mathcal{S}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + \mathcal{S}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = \\ = 2 \operatorname{Re} s_{12} \ne 0. \end{aligned}$$

Далее мы можем применить основное преобразование.

Доказательство (окончание).

Если же $\mathrm{Re}\, s_{12} = 0$, то $\mathrm{Im}\, s_{12} \neq 0$ (так как $s_{12} \neq 0$ по предположению). В этом случае делаем замену

$$\boldsymbol{e}_{1'} = \boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_{2'} = \boldsymbol{e}_2, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_{n'} = \boldsymbol{e}_n.$$

Тогда в новом базисе мы имеем

$$\begin{aligned} s'_{11} &= \mathcal{S}(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{1'}) = \mathcal{S}(\boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2) = \\ &= i\mathcal{S}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) - i\mathcal{S}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = -2\,\mathrm{Im}\, s_{12} \neq 0, \end{aligned}$$

и мы снова можем применить основное преобразование.

Последовательно применяя основное преобразование и дополняя его в необходимых случаях вспомогательными преобразованием, мы получаем базис $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$, в котором матрица эрмитовой функции $\mathcal{S}$ имеет диагональный вид.

Пусть $\mathcal{S}(\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_i) = r_{ii}$. Эти числа вещественны в силу эрмитовости. Далее доказательство завершается так же, как и для симметрических функций над $\mathbb{R}$. □

Эрмитова полуторалинейная форма, соответствующая диагональной матрице из предыдущей теоремы, имеет вид

$$\overline{x}^1 y^1 + \ldots + \overline{x}^p y^p - \overline{x}^{p+1} y^{p+1} - \ldots - \overline{x}^{p+q} y^{p+q}.$$

Этот вид называется **нормальным видом** эрмитовой полуторалинейной формы.

5.5. Закон инерции. Единственность нормального вида

В случае симметрической билинейной формы над $\mathbb{C}$ нормальный вид зависит только от её ранга, и поэтому мы получаем:

Предложение

Две комплексные симметрические билинейные формы (комплексные квадратичные формы) получаются друг из друга линейной заменой координат тогда и только тогда, когда их ранги совпадают.

В случае вещественных симметрических билинейных форм и в случае эрмитовых полуторалинейных форм ситуация сложнее: их нормальный вид не определяется одним лишь рангом, а зависит ещё от количества 1 и -1 на диагонали матрицы. Оказывается, что нормальный вид такой формы не зависит от способа приведения к нормальному виду.

Теорема (закон инерции)

Количество 1, −1 *и* 0 *на диагонали нормального вида матрицы вещественной симметрической билинейной функции* $\mathcal{B}$ *не зависит от способа приведения к нормальному виду.*

Другими словами, если квадратичная форма $Q(x)$ *вещественной линейной заменой* $x = Cy$ *приводится к виду*

$$(y^1)^2 + \ldots + (y^p)^2 - (y^{p+1})^2 - \ldots - (y^{p+q})^2,$$

а вещественной линейной заменой $x = C'z$ *— к виду*

$$(z^1)^2 + \ldots + (z^{p'})^2 - (z^{p'+1})^2 - \ldots - (z^{p'+q'})^2,$$

то мы имеем $p = p'$ *и* $q = q'$.

Доказательство

Пусть $(x^1,\dots,x^n)$ — координаты в исходном базисе $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$, $(y^1,\dots,y^n)$ — координаты в базисе $\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_n$, а $(z^1,\dots,z^n)$ — координаты в базисе $\boldsymbol{g}_1,\dots,\boldsymbol{g}_n$. Рассмотрим подпространства

$$\begin{aligned} U_+ &= \langle \boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_p\rangle, & U_- &= \langle \boldsymbol{f}_{p+1},\dots,\boldsymbol{f}_{p+q}\rangle, & U_0 &= \langle \boldsymbol{f}_{p+q+1},\dots,\boldsymbol{f}_n\rangle,\\ W_+ &= \langle \boldsymbol{g}_1,\dots,\boldsymbol{g}_{p'}\rangle, & W_- &= \langle \boldsymbol{g}_{p'+1},\dots,\boldsymbol{g}_{p'+q'}\rangle, & W_0 &= \langle \boldsymbol{g}_{p'+q'+1},\dots,\boldsymbol{g}_n\rangle. \end{aligned}$$

Для ненулевого вектора $\boldsymbol{x}\in U_+$ мы имеем $\boldsymbol{x}=y^1\boldsymbol{f}_1+\ldots+y^p\boldsymbol{f}_p$ и поэтому $\mathcal{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=(y^1)^2+\ldots+(y^p)^2>0$. Аналогично, если $\boldsymbol{x}\in U_-\oplus U_0$, то $\mathcal{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\leqslant 0$. Для ненулевого вектора $\boldsymbol{x}\in W_+$ мы имеем $\mathcal{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0$, а для $\boldsymbol{x}\in W_-\oplus W_0$ имеем $\mathcal{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\leqslant 0$.

Предположим, что $p>p'$. Тогда

$$\dim U_+ + \dim(W_-\oplus W_0) = p + (n-p') > n = \dim V,$$

значит, $U_+\cap(W_-\oplus W_0)\ne\{0\}$. Возьмём ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ в этом пересечении. Так как $\boldsymbol{x}\in U_+$, имеем $\mathcal{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0$. С другой стороны, из $\boldsymbol{x}\in W_-\oplus W_0$ следует, что $\mathcal{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\leqslant 0$. Противоречие. Аналогично приводится к противоречию случай $p<p'$.

Доказательство (окончание).

Следовательно, $p = p'$. Кроме того, $p + q = p' + q' = \operatorname{rk} \mathcal{B}$, а значит и $q = q'$. $\square$

Имеет место также закон инерции для эрмитовых полуторалинейных функций, который доказывается полностью аналогично:

Теорема

Количество 1, -1 и 0 на диагонали нормального вида матрицы эрмитовой полуторалинейной функции не зависит от способа приведения к нормальному виду.

Определение

Разность $p - q$ между числом положительных и отрицательных диагональных элементов в нормальном виде называется **сигнатурой** или **индексом инерции** вещественной симметрической билинейной функции (эрмитовой полуторалинейной функции).

Из закона инерции следует, что сигнатура, как и ранг, является инвариантном вещественной симметрической билинейной функции (эрмитовой полуторалинейной функции), т. е. не зависит от базиса.

Следствие

Две вещественные симметрические билинейные формы или две эрмитовы полуторалинейные функции получаются друг из друга линейной заменой координат тогда и только тогда, когда их ранги и сигнатуры совпадают.

Все результаты этого раздела можно свести в одно утверждение: нормальный вид симметрической билинейной функции или эрмитовой полуторалинейной функции единствен.

5.6. Теорема Якоби. Критерий Сильвестра

Теорема Якоби позволяет (при выполнении некоторого дополнительного условия) найти нормальный вид квадратичной формы без нахождения преобразования.

Напомним, что угловым минором порядка k матрицы Q называется минор (определитель подматрицы), составленный из первых k строк и первых k столбцов.
Угловой минор порядка k будем обозначать через $|Q_k|$.

Теорема (Якоби)

Предположим, что все угловые миноры матрицы Q квадратичной формы отличны от нуля до порядка $r = \operatorname{rk} Q$. Тогда существует замена координат, приводящая данную квадратичную форму к виду

$$|Q_1|(x^1)^2 + \frac{|Q_2|}{|Q_1|}(x^2)^2 + \ldots + \frac{|Q_r|}{|Q_{r-1}|}(x^r)^2.$$

Сначала докажем лемму. Скажем, что для квадратичной формы имеет место регулярный случай, если она приводится к диагональному виду последовательным применением исключительно основного преобразования метода Лагранжа.

Лемма

Для квадратичной формы $Q(x)$ имеет место регулярный случай тогда и только тогда, когда все угловые миноры её матрицы Q отличны от нуля до порядка $r = \operatorname{rk} Q$.

Доказательство

Пусть угловые миноры до порядка r отличны от нуля. Тогда $q_{11} = |Q_1|$ — угловой минор порядка 1, который не равен нулю по предположению. Значит, на первом шаге применимо основное преобразование метода Лагранжа.

Доказательство (продолжение)

Пусть после k-кратного применения основного преобразования метода Лагранжа матрица квадратичной формы принимает вид

$$Q' = \left(\begin{array}{ccc|cc} q'_{11} & & 0 & & \\ & \ddots & & & 0 \\ 0 & & q'_{kk} & & \\ \hline & & & q'_{k+1,k+1} & \cdots \\ & 0 & & \vdots & \ddots \end{array}\right)$$

Матрица замены координат для основного преобразования есть

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{q_{12}}{q_{11}} & \cdots & -\frac{q_{1n}}{q_{11}} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Для угловых подматриц Q_k мы имеем $Q'_k = C_k^t Q_k C_k$, где C_k — угловая подматрица матрицы C. Так как $\det C_k = 1$, мы получаем $|Q'_k| = |Q_k|$, т. е. угловые миноры матрицы квадратичной формы не меняются при основном преобразовании метода Лагранжа.

Доказательство (продолжение)

Возвращаясь к матрице

$$
Q' = \left(\begin{array}{ccc|cc}
q'_{11} & & 0 & & \\
& \ddots & & 0 & \\
0 & & q'_{kk} & & \\
\hline
& & & q'_{k+1,k+1} & \cdots \\
& 0 & & \vdots & \ddots
\end{array}\right)
$$

мы получаем $|Q_{k+1}| = |Q'_{k+1}| = q'_{11} \cdots q'_{kk} q'_{k+1,k+1} \neq 0$ при $k < r$ по предположению. Следовательно, $q'_{k+1,k+1} \neq 0$, и мы снова можем применить основное преобразование.

После r-кратного применения основного преобразования мы получаем матрицу Q' как выше, где $k = r$ и матрица в правом нижнем углу равна нулю. Следовательно, квадратичная форма приведена к диагональному виду последовательным применением основного преобразования метода Лагранжа, и мы имеем регулярный случай.

Доказательство (окончание).

Докажем обратное утверждение.

Пусть имеет место регулярный случай, т. е. форма приведена к диагональному виду с ненулевыми числами $q'_{11}, \ldots, q'_{rr}$ на диагонали последовательным применением основного преобразования. Тогда, так как угловые миноры не меняются при основном преобразовании, мы имеем $|Q_k| = |Q'_k| = q'_{11} \cdots q'_{kk} \neq 0$ при $k \leqslant r$. □

Теорема (Якоби)

Предположим, что все угловые миноры матрицы Q квадратичной формы отличны от нуля до порядка $r = \operatorname{rk} Q$. Тогда существует замена координат, приводящая данную квадратичную форму к виду

$$|Q_1|(x^1)^2 + \frac{|Q_2|}{|Q_1|}(x^2)^2 + \ldots + \frac{|Q_r|}{|Q_{r-1}|}(x^r)^2.$$

Доказательство.

В силу предыдущей леммы, мы можем привести квадратичную форму к диагональному виду

$$q'_{11}(u^1)^2 + \ldots + q'_{rr}(u^r)^2$$

используя лишь основное преобразование метода Лагранжа. Тогда $|Q_k| = |Q'_k| = q'_{11} \cdots q'_{kk}$ при $k \leqslant r$, т. е. $q'_{kk} = \frac{|Q_k|}{|Q_{k-1}|}$, что и требовалось. □

Определение

Симметрическая билинейная функция $\mathcal{B}$ называется положительно определённой, если $\mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ при $\boldsymbol{x} \neq 0$. Соответствующая квадратичная форма $Q(x)$ удовлетворяет условию $Q(x) > 0$ при $x \neq 0$ и также называется положительно определённой.

Положительно определённая симметрическая билинейная функция задаёт в пространстве V скалярное произведение, т. е. превращает V в евклидово пространство.

Теорема (критерий Сильвестра)

Симметрическая билинейная функция (квадратичная форма) положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры её матрицы в некотором базисе положительны.

Доказательство.

Пусть все угловые миноры $|Q_k|$ матрицы квадратичной формы $Q(x)$ положительны. Тогда в силу теоремы Якоби квадратичная форма приводится к виду $Q(u) = q'_{11}(u^1)^2 + \ldots + q'_{nn}(u^n)^2$, где $n = \mathrm{rk}\, Q = \dim V$, а $q'_{kk} = \frac{|Q_k|}{|Q_{k-1}|} > 0$. Такая квадратичная форма положительно определена, так как $Q(u) > 0$ при $u \neq 0$.

Обратно, пусть $Q(x)$ положительно определена. Так как в любом базисе мы имеем $q_{ii} = \mathcal{B}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) > 0$, всегда применимо основное преобразование метода Лагранжа. Тогда последовательно применяя основное преобразование, мы приведём квадратичную форму к виду $Q(u) = q'_{11}(u^1)^2 + \ldots + q'_{nn}(u^n)^2$, где $q'_{ii} > 0$. Следовательно, $|Q_k| = |Q'_k| = q'_{11} \cdots q'_{kk} > 0$ для любого k. $\square$