Линейная алгебра и геометрия

Лекция 21

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.
Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

23 апреля 2021 г.

5.2. Симметрические, кососимметрические и эрмитовы функции

Определение

Билинейная функция $\mathcal{B}\colon V \times V \to \mathrm{k}$ называется симметрической, если $\mathcal{B}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, и кососимметрической, если $\mathcal{B}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = -\mathcal{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, для любых $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$.

Полуторалинейная функция $\mathcal{S}\colon V \times V \to \mathbb{C}$ в комплексном пространстве называется эрмитовой, если $\mathcal{S}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \overline{\mathcal{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}$, и косоэрмитовой, если $\mathcal{S}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = -\overline{\mathcal{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}$.

Матрица симметрической (кососимметрической) билинейной функции в любом базисе симметрична (соответственно, кососимметрична).

Матрица эрмитовой (косоэрмитовой) полуторалинейной функции в любом базисе эрмитова (соответственно, косоэрмитова).

Кроме того, полуторалинейная функция $\mathcal{S}$ является эрмитовой тогда и только тогда, когда функция $i\mathcal{S}$ является косоэрмитовой.

Далее мы будем предполагать, что характеристика поля k отлична от 2.

Определение

Квадратичной формой над k называется однородный многочлен второй степени от n переменных $x = (x^1, \dots, x^n)$, т. е. многочлен вида

$$Q(x) = Q(x^1, \dots, x^n) = q_{ij}x^i x^j = \sum_{i=1}^{n} q_{ii}(x^i)^2 + \sum_{i<j} 2q_{ij}x^i x^j,$$

где $q_{ji} = q_{ij} \in$ k. Симметричная матрица $Q = (q_{ij})$ размера $n \times n$ называется матрицей квадратичной формы.

Если $B(x, y) = b_{ij}x^i y^j$ — симметрическая билинейная форма, то $B(x, x) = b_{ij}x^i x^j$ является квадратичной формой с матрицей B.

Таким образом, квадратичная форма $B(x, x)$ полностью определяет симметрическую билинейную форму $B(x, y)$, а значит и симметрическую билинейную функцию $\mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Это можно увидеть и не прибегая к выбору базиса: для симметрической билинейной функции имеет место соотношение

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\big(\mathcal{B}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - \mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - \mathcal{B}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})\big),$$

т. е. значение $\mathcal{B}$ на произвольной паре векторов можно восстановить, зная лишь значения $\mathcal{B}$ на парах совпадающих векторов.
(Наличие $\frac{1}{2}$ в формуле выше показывает, что она верна только над полем характеристики, отличной от 2.)

Функцию $V \to \mathrm{k}$, $\boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ называют квадратичной функцией.

5.3. Нормальный вид симметрической билинейной функции

Теорема

Для симметрической билинейной функции $\mathcal{B}$ над полем характеристики, отличной от 2, существует базис, в котором её матрица диагональна.

Другими словами, любую квадратичную форму $Q(x)$ линейной заменой координат $x = Cy$ можно привести к виду

$$Q(y) = r_{11}(y^1)^2 + \ldots + r_{nn}(y^n)^2.$$

Мы приведём два доказательства этого факта. В первом случае будем работать с квадратичными формами и координатами, а во втором — с симметрическими билинейными функциями и базисами.

Каждое из доказательств будет проведено таким образом, что его можно будет использовать как алгоритм, а не просто как доказательство существования нужного преобразования.

Первое доказательство (метод Лагранжа)

Пусть $Q(x) = q_{ij}x^i x^j$ — квадратичная форма. Доказательство заключается в последовательном упрощении $Q(x)$, использующем основное и два вспомогательных преобразования.

Основное преобразование производится, если в квадратичной форме $Q(x) = q_{ij}x^i x^j$ первый коэффициент q_{11} не равен нулю. Тогда имеем

$$Q(x^1, \ldots, x^n) = q_{11}(x^1)^2 + 2q_{12}x^1x^2 + \ldots + 2q_{1n}x^1x^n + \sum_{i,j>1} q_{ij}x^ix^j =$$

$$= q_{11}\Bigl(x^1 + \frac{q_{12}}{q_{11}}x^2 + \ldots + \frac{q_{1n}}{q_{11}}x^n\Bigr)^2 - q_{11}\Bigl(\frac{q_{12}}{q_{11}}x^2 + \ldots + \frac{q_{1n}}{q_{11}}x^n\Bigr)^2 +$$

$$+ \sum_{i,j>1} q_{ij}x^ix^j = q_{11}\Bigl(x^1 + \frac{q_{12}}{q_{11}}x^2 + \ldots + \frac{q_{1n}}{q_{11}}x^n\Bigr)^2 + Q'(x^2, \ldots, x^n),$$

где $Q'(x^2, \ldots, x^n)$ — некоторая квадратичная форма от $n-1$ переменных.

Первое доказательство (продолжение)

Теперь сделаем замену координат

$$u^1 = x^1 + \frac{q_{12}}{q_{11}}x^2 + \ldots + \frac{q_{1n}}{q_{11}}x^n,$$
$$u^2 = x^2, \quad \ldots, \quad u^n = x^n.$$

В результате форма $Q(x)$ преобразуется к виду

$$Q(u^1, \ldots, u^n) = q_{11}(u^1)^2 + Q'(u^2, \ldots, u^n).$$

Если в форме $Q'(u^2, \ldots, u^n)$ первый коэффициент (т. е. q'_{22}) не равен нулю, то мы снова можем применить основное преобразование, и т. д.

Первое вспомогательное преобразование производится, если $q_{11} = 0$, но существует $q_{ii} \neq 0$. В этом случае мы делаем замену $u^1 = x^i$, $u^i = x^1$, а остальные координаты без изменений. В результате получаем $q'_{11} \neq 0$.

Первое доказательство (окончание).

Второе вспомогательное преобразование производится, если все коэффициенты q_{ii} при квадратах равны нулю, но при этом есть хотя бы один ненулевой коэффициент (в противном случае $Q(x) \equiv 0$ уже имеет нужный вид). Пусть $q_{ij} \neq 0$, где $i < j$. Произведём замену координат

$$x^i = u^i, \quad x^j = u^i + u^j, \quad x^k = u^k, \quad \text{при } k \neq i, j.$$

В результате форма $Q(x)$ преобразуется к виду

$$Q(x) = 2q_{ij}x^i x^j + \ldots = 2q_{ij}u^i(u^i + u^j) + \ldots = 2q_{ij}(u^i)^2 + \ldots,$$

где $\ldots$ означает члены, не содержащие квадратов. Далее мы можем применить предыдущие преобразования.

Последовательно применяя основное преобразование и (если нужно) вспомогательные преобразования, мы приводим форму $Q(x)$ к диагональному виду. $\square$

Второе доказательство (метод поиска базиса)

Этот метод можно рассматривать как обобщение метода ортогонализации Грама–Шмидта. Базис, в котором матрица билинейной функции $\mathcal{B}$ диагональна — это «ортогональный» базис в смысле «скалярного произведения», задаваемого симметрической билинейной функцией $\mathcal{B}$. Здесь также имеется основное и вспомогательные преобразования.

Пусть $B = (b_{ij})$ — матрица билинейной функции $\mathcal{B}$ в исходном базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, т. е. $b_{ij} = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$.

Основное преобразование производится, если $b_{11} = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) \neq 0$. Это всегда так, если симметрическая билинейная функция $\mathcal{B}$ задаёт скалярное произведение, т. е. является положительно определённой.

Второе доказательство (продолжение)

Выберем новый базис следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{1'} &= \boldsymbol{e}_1,\\
\boldsymbol{e}_{2'} &= \boldsymbol{e}_2 - \frac{\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)}{\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 - \frac{b_{12}}{b_{11}}\boldsymbol{e}_1,\\
&\dots\\
\boldsymbol{e}_{n'} &= \boldsymbol{e}_n - \frac{\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_n)}{\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_n - \frac{b_{1n}}{b_{11}}\boldsymbol{e}_1.
\end{aligned}
$$

В результате мы получаем $\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_{1'},\boldsymbol{e}_{i'}) = 0$ при $i > 1$. Таким образом, матрица B' билинейной функции $\mathcal{B}$ в новом базисе принимает вид

$$
B' = \left(\begin{array}{c|ccc}
b_{11} & 0 & \cdots & 0\\
\hline
0 & & & \\
\vdots & & \widetilde{B}' & \\
0 & & &
\end{array}\right)
$$

где $\widetilde{B}'$ — матрица билинейной функции $\mathcal{B}$ на подпространстве $\langle \boldsymbol{e}_{2'},\dots,\boldsymbol{e}_{n'}\rangle$. Далее мы работаем уже с этой матрицей $\widetilde{B}'$.

Второе доказательство (окончание).

Первое вспомогательное преобразование производится, если $b_{11} = 0$, но имеется $b_{ii} \neq 0$. Тогда делаем замену, меняющую местами 1-й и i-й базисный векторы.

Второе вспомогательное преобразование производится, если все b_{ii} равны нулю, но при этом билинейная функция $\mathcal{B}$ не является тождественно нулевой, т. е. $b_{ij} = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \neq 0$ для некоторых $i < j$. Произведём замену базиса

$$\boldsymbol{e}_{i'} = \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j, \quad \boldsymbol{e}_{j'} = \boldsymbol{e}_j, \quad \boldsymbol{e}_{k'} = \boldsymbol{e}_k \quad \text{при } k \neq i, j.$$

Тогда в новом базисе мы имеем

$$b'_{ii} = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_{i'}, \boldsymbol{e}_{i'}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j) = 2\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 2b_{ij} \neq 0.$$

Далее мы можем применить предыдущие преобразования.

Последовательно применяя основное преобразование и дополняя его в необходимых случаях вспомогательными преобразованиями, мы получаем базис $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$, в котором матрица билинейной функции $\mathcal{B}$ имеет диагональный вид. $\square$

Обратим внимание, что основное и вспомогательное преобразование в обоих доказательствах — это одно и то же преобразование, просто в первом случае оно записано через координаты, а во втором — через базисы. Так что диагональные матрицы, получаемые первым и вторым методом, совпадают, как и все промежуточные матрицы.

Если при приведении матрицы билинейной функции к диагональному виду использовалось лишь основное преобразование, то матрица перехода от исходного базиса к базису, в котором матрица имеет диагональный вид, является верхнетреугольной (как и в случае процесса ортогонализации Грама–Шмидта). Если же хоть раз применялось вспомогательное преобразование, то матрица перехода может не быть верхнетреугольной.

Пример

Над полем $\mathbb{Z}_2$ симметрическая билинейная функция с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ не приводится к диагональному виду заменой базиса (задача).

Над полем $\mathbb{R}$ квадратичную форму можно далее упростить:

Предложение

Для любой симметрической билинейной функции $\mathcal{B}$ в пространстве над полем $\mathbb{R}$ существует базис, в котором её матрица имеет диагональный вид с 1, -1 и 0 на диагонали.
Другими словами, вещественную квадратичную форму $Q(x)$ линейной заменой координат $x = Cy$ можно привести к виду

$$(y^1)^2 + \ldots + (y^p)^2 - (y^{p+1})^2 - \ldots - (y^{p+q})^2.$$

Доказательство.

Сначала приведём квадратичную форму к виду

$$Q(u) = r_{11}(u^1)^2 + \ldots + r_{nn}(u^n)^2.$$

Если $r_{ii} > 0$, то замена $y^i = \sqrt{r_{ii}}u^i$ приводит слагаемое $r_{ii}(u^i)^2$ к виду $(y^i)^2$. Если же $r_{ii} < 0$, то замена $y^i = \sqrt{|r_{ii}|}u^i$ приводит слагаемое $r_{ii}(u^i)^2$ к виду $-(y^i)^2$. В результате получаем требуемый вид квадратичной формы с коэффициентами 1, -1 и 0. $\square$

Вид, описанный в предложении выше, называется нормальным видом вещественной симметрической билинейной формы (вещественной квадратичной формы).

Как мы увидим далее, это — наиболее простой вид, к которому можно привести квадратичную форму над полем $\mathbb{R}$.

Над полем $\mathbb{C}$ квадратичную форму можно ещё больше упростить:

Предложение

Для любой симметрической билинейной функции $\mathcal{B}$ над полем $\mathbb{C}$ существует базис, в котором её матрица имеет диагональный вид с 1 и 0 на диагонали.

Другими словами, комплексную квадратичную форму $Q(x)$ линейной заменой координат $x = Cz$ можно привести к виду

$$(z^1)^2 + \ldots + (z^r)^2.$$

Доказательство.

Сначала мы с помощью предыдущего предложения приведём квадратичную форму к виду

$$(y^1)^2 + \ldots + (y^p)^2 - (y^{p+1})^2 - \ldots - (y^{p+q})^2.$$

Затем сделаем замену координат $y^k = z^k$ при $k \leqslant p$ и $y^k = iz^k$ при $k > p$. В результате получим требуемый вид, где $r = p + q = \mathrm{rk}\, Q$. $\square$

Вид, описанный в предложении выше, называется нормальным видом комплексной симметрической билинейной формы (комплексной квадратичной формы).