Линейная алгебра и геометрия

Лекция 20

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.
Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

20 апреля 2021 г.

4.7. Нормальные операторы

Определение

Оператор $\mathcal{A}$ в евклидовом или эрмитовом пространстве называется **нормальным**, если он коммутирует с сопряжённым, т. е. $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$.

Самосопряжённые, кососимметрические, косоэрмитовы, ортогональные и унитарные операторы являются нормальными.

Лемма

Пусть $\mathbf{v}$ *— собственный вектор нормального оператора* $\mathcal{A}$ *с собственным значением* λ*. Тогда* $\mathbf{v}$ *также является собственным вектором для сопряжённого оператора* $\mathcal{A}^*$*, с собственным значением* $\overline{\lambda}$*.*

Доказательство.

Если оператор $\mathcal{A}$ нормален, то

$$(\mathcal{A}\mathbf{v}, \mathcal{A}\mathbf{v}) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\mathcal{A}^*\mathbf{v}, \mathcal{A}^*\mathbf{v}),$$

т. е. $|\mathcal{A}\mathbf{v}| = |\mathcal{A}^*\mathbf{v}|$ для любого вектора $\mathbf{v}$. Поскольку вместе с оператором $\mathcal{A}$ нормален и каждый оператор вида $\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{id}$, отсюда следует, что

$$|(\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{id})\mathbf{v}| = |(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})\mathbf{v}|$$

для любого λ. Поэтому, если $(\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{id})\mathbf{v} = 0$, то $(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})\mathbf{v} = 0$. □

В эрмитовом пространстве класс нормальных операторов — это в точности операторы, диагонализируемые в ортонормированном базисе:

Теорема

Оператор в эрмитовом пространстве диагонализируем в ортонормированном базисе тогда и только тогда, когда он нормален.

Доказательство

Пусть матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе диагональна с числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на диагонали. Тогда сопряжённый оператор $\mathcal{A}^*$ в том же базисе имеет диагональную матрицу с числами $\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n$. Так как диагональные матрицы коммутируют, мы получаем $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$, т. е. $\mathcal{A}$ нормален.

Обратно, пусть $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Доказательство диагонализируемости в ортнормированном базисе будем вести по индукции по размерности пространства V. При $\dim V = 1$ доказывать нечего. Предположим, что утверждение доказано для пространств размерности не больше $n - 1$, и докажем его для размерности n.

Доказательство (продолжение).

Выберем собственный вектор $\boldsymbol{v}$ с собственным значением λ для $\mathcal{A}$, т. е. одномерное инвариантное подпространство $W = \langle \boldsymbol{v} \rangle$. Докажем, что ортогональное дополнение $W^\perp$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Пусть $\boldsymbol{u} \in W^\perp$, т. е. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$. Тогда

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \mathcal{A}^*\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \overline{\lambda}\boldsymbol{v}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$$

(где мы воспользовались предыдущей леммой). Следовательно, $\mathcal{A}\boldsymbol{u} \in W^\perp$ и пространство $W^\perp$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$.

С другой стороны, пространство $W^\perp$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}^*$. Так как $W^\perp$ инвариантно и относительно $\mathcal{A}$ и относительно $\mathcal{A}^*$, ограничение $\mathcal{A}|_{W^\perp}$ является нормальным оператором. Так как $\dim W^\perp = n - 1$, по предположению индукции в пространстве $W^\perp$ имеется ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}|_{W^\perp}$. Тогда $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}, \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ — ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. $\square$

В евклидовом пространстве нет аналога предыдущей теоремы: оператор $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ нормален, но не диагонализируем при $b \neq 0$.
На самом деле мы видели ранее, что в евклидовом пространстве класс операторов, диагонализируемых в ортонормированном базисе, — это в точности самосопряжённые операторы.

Можно доказать, что для нормального оператора в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором его матрица состоит из блоков размера 1 или 2, причём блоки размера 2 имеют вид $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ (задача).

Соберём в одну таблицу всю информацию о специальных классах операторов (отдельно для евклидова и эрмитова пространства):

Евклидово пространство

Название	Определение	Свойство матрицы (в ортонормированном базисе)	Канонический вид
Самосопряжённый (симметрический)	$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$	$A^t = A$ (симметричная)	диагональный
Кососимметрический	$\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$	$A^t = -A$ (кососимметр.)	блоки (0) и $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$
Ортогональный	$\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathrm{id}$	$A^tA = E$ (ортогональная)	блоки (± 1) и $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$
Нормальный	$\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$	$A^tA = AA^t$	блоки (a) и $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Эрмитово пространство

Название	Определение	Свойство матрицы (в ортонормированном базисе)	Канонический вид
Самосопряжённый (эрмитов)	$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$	$\overline{A}^t = A$ (эрмитова)	диагональный с вещественными числами на диагонали
Косоэрмитов	$\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$	$\overline{A}^t = -A$ (косоэрмитова)	диагональный с чисто мнимыми числами на диагонали
Унитарный	$\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathrm{id}$	$\overline{A}^t A = E$ (унитарная)	на диагонали — числа, равные по модулю 1
Нормальный	$\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$	$\overline{A}^t A = A\overline{A}^t$	диагональный

5.1. Билинейные и полуторалинейные функции, их матрицы.

Определение

Пусть V — линейное пространство над полем k.
Функция $\mathcal{B}\colon V \times V \to \mathrm{k}$ называется билинейной функцией, если она линейна по каждому аргументу:

$$\mathcal{B}(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = \lambda_1 \mathcal{B}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + \lambda_2 \mathcal{B}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) \quad \text{и}$$
$$\mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \mu_1 \boldsymbol{y}_1 + \mu_2 \boldsymbol{y}_2) = \mu_1 \mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + \mu_2 \mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)$$

для любых $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathrm{k}$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in V$.

Матрицей билинейной функции $\mathcal{B}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства V называется квадратная матрица $B = (b_{ij})$ размера n, где
$b_{ij} = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$.

Пример

Скалярное произведение в евклидовом пространстве является билинейной функцией. Таким образом, понятие билинейной функции обобщает понятие скалярного произведения (вместо трёх условий на функцию $V \times V \to \mathbb{R}$ требуется выполнение лишь первого, т.е. билинейности). Матрица билинейной функции является обобщением матрицы Грама скалярного произведения.

Зная матрицу $B = (b_{ij})$ билинейной функции, можно восстановить значение $\mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ на любой паре векторов $\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{y} = y^j \boldsymbol{e}_j$:

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathcal{B}(x^i \boldsymbol{e}_i, y^j \boldsymbol{e}_j) = x^i y^j \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = b_{ij} x^i y^j = x^t B y.$$

Выражение $B(x, y) = b_{ij} x^i y^j = x^t B y$ называется билинейной формой. (Здесь, как обычно, мы предполагаем, что $x = (x^1, \dots, x^n)^t$ — это столбец высоты n, так что x^t — это строка длины n.) Билинейная форма представляет собой однородный многочлен степени 2 от двух наборов переменных $x^1, \dots, x^n$ и $y^1, \dots, y^n$, который линеен по x при фиксированных y и линеен по y при фиксированных x.

Теорема (закон изменения матрицы билинейной функции)

Имеет место соотношение

$$B' = C^t BC,$$

где B — матрица билинейной функции $\mathcal{B}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$,
B' — матрица в базисе $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$ и
C — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$.

Доказательство

Пусть $B = (b_{ij})$, $B' = (b'_{ij})$, $C = (c^i_{i'})$. Мы имеем

$$b'_{ij} = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_{i'}, \boldsymbol{e}_{j'}) = \mathcal{B}(c^i_{i'}\boldsymbol{e}_i, c^j_{j'}\boldsymbol{e}_j) = c^i_{i'}c^j_{j'}\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = c^i_{i'}b_{ij}c^j_{j'},$$

что эквивалентно матричному соотношению $B' = C^t BC$.

Доказательство (продолжение).

То же рассуждение можно провести, используя матричную запись билинейных форм. Значение $\mathcal{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ можно записать в виде билинейных форм от новых или старых координат:

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x^t B y = (x')^t B' y'.$$

Мы имеем $x = Cx'$ и $y = Cy'$. Тогда

$$(x')^t B' y' = x^t B y = (x')^t C^t B C y'.$$

Так как это верно для любых наборов x', y', получаем $B' = C^t BC$. $\square$

Следствие

Ранг матрицы билинейной функции не зависит от базиса.

Доказательство.

Так как матрица C обратима, $\operatorname{rk} B' = \operatorname{rk}(C^t B' C) = \operatorname{rk} B$. $\square$

Определение

Рангом билинейной функции $\mathcal{B}$ (обозначается $\mathrm{rk}\,\mathcal{B}$) называется ранг её матрицы в произвольном базисе. Билинейная функция $\mathcal{B}$ в пространстве V называется невырожденной, если $\mathrm{rk}\,\mathcal{B} = \dim V$.

Множество $\mathrm{B}(V)$ всех билинейных функций в пространстве V образует линейное пространство относительно операций сложения функций и умножения функций на скаляры.

Сопоставление билинейной функции $\mathcal{B}$ её матрицы B в фиксированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ устанавливает изоморфизм между пространством $\mathrm{B}(V)$ и пространством квадратных матриц $\mathrm{Mat}_{\mathbf{k}}(n)$.

Как и в случае пространства линейных операторов $\mathrm{Hom}(V, V)$, этот изоморфизм неканоничен, так он зависит от выбора базиса.

Наряду с $\mathrm{B}(V)$ рассмотрим пространство $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ линейных отображений из V в двойственное пространство V^*.

Теорема

Отображение $\varphi\colon \mathrm{B}(V) \to \mathrm{Hom}(V, V^*)$, сопоставляющее билинейной функции $\mathcal{B}$ линейное отображение $\widetilde{\mathcal{B}}\colon V \to V^*$, задаваемое формулой

$$\widetilde{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \cdot\,) \quad \text{для } \boldsymbol{x} \in V,$$

является каноническим изоморфизмом. Здесь $\mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \cdot\,) \in V^*$ — линейная функция, значение которой на векторе $\boldsymbol{y} \in V$ есть $\mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Доказательство.

Отображение φ линейно, так как билинейная функция линейна по первому аргументу $\boldsymbol{x}$. Кроме того, отображение φ биективно: обратное отображение φ^{-1} ставит в соответствие линейному отображению $\widetilde{\mathcal{B}}\colon V \to V^*$ билинейную функцию $\mathcal{B}$, заданную по формуле $\mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \widetilde{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y})$. Следовательно, φ — изоморфизм. Изоморфизм каноничен, так как в его конструкции не использовался базис. □

В комплексном пространстве V наряду с билинейными функциями рассматриваются полуторалинейные:

Определение

Пусть V — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Функция $\mathcal{S}\colon V \times V \to \mathbb{C}$ называется полуторалинейной функцией, если она линейна по второму аргументу и антилинейна (или полулинейна) по первому аргументу:

$$\mathcal{S}(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = \overline{\lambda}_1 \mathcal{S}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + \overline{\lambda}_2 \mathcal{S}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) \quad \text{и}$$
$$\mathcal{S}(\boldsymbol{x}, \mu_1 \boldsymbol{y}_1 + \mu_2 \boldsymbol{y}_2) = \mu_1 \mathcal{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + \mu_2 \mathcal{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)$$

для любых $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in V$.

Матрица полуторалинейной функции $\mathcal{S}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ определяется как $S = (s_{ij})$, где $s_{ij} = \mathcal{S}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$.

Значение $\mathcal{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ выражается через матрицу $S=(s_{ij})$ и координаты векторов $\boldsymbol{x}=x^i\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{y}=y^j\boldsymbol{e}_j$ следующим образом:

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\mathcal{S}(x^i\boldsymbol{e}_i,y^j\boldsymbol{e}_j)=\overline{x}^iy^j\mathcal{S}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=s_{ij}\overline{x}^iy^j=\overline{x}^tSy.$$

Выражение $S(x,y)=s_{ij}\overline{x}^iy^j=\overline{x}^tSy$ называется полуторалинейной формой.

Пример полуторалинейной функции — эрмитово скалярное произведение.

Матрицы S и S' полуторалинейной функции $\mathcal{S}$ в разных базисах связаны соотношением

$$S'=\overline{C}^tSC,$$

которое доказывается аналогично соотношению для билинейных функций. Отсюда следует, что ранг матрицы полуторалинейной функции не зависит от выбора базиса.