Линейная алгебра и геометрия

Лекция 19

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.
Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

16 апреля 2021 г.

Напомним, что оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$ в евклидовом (эрмитовом) пространстве называется ортогональным (соответственно, унитарным), если он удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

а) оператор $\mathcal{A}$ сохраняет длины векторов, т. е. $|\mathcal{A}\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}|$ для любого $\boldsymbol{v} \in V$;

б) оператор $\mathcal{A}$ сохраняет скалярное произведение, т. е. $(\mathcal{A}\boldsymbol{u}, \mathcal{A}\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ для любых $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$;

в) оператор $\mathcal{A}$ переводит ортонормированные базисы в ортонормированные, т. е. если $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — ортонормированный базис, то $\mathcal{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \mathcal{A}\boldsymbol{e}_n$ — также ортонормированный базис;

г) матрица A оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе ортогональна (унитарна), т. е. $A^t A = E$ (соответственно, $\overline{A}^t A = E$);

д) $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathrm{id}$, т. е. сопряжённый оператор к $\mathcal{A}$ является его обратным.

Как и в случае самосопряжённых операторов, для приведения ортогонального или унитарного оператора к каноническому виду нам понадобится утверждение об инвариантности ортогонального дополнения.

Лемма

Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ — ортогональный или унитарный оператор, а $W \subset V$ — инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство. Тогда ортогональное дополнение $W^{\perp}$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$.

Доказательство.

Пусть $\boldsymbol{u} \in W^{\perp}$. Нам надо доказать, что $\mathcal{A}\boldsymbol{u} \in W^{\perp}$, т. е., что $(\mathcal{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = 0$ для любого $\boldsymbol{w} \in W$. Мы знаем, что $\mathcal{A}(W) \subset W$. Поскольку оператор $\mathcal{A}$ обратим, $\mathcal{A}(W) = W$. Тогда найдётся такой вектор $\boldsymbol{v} \in W$, что $\boldsymbol{w} = \mathcal{A}\boldsymbol{v}$, а значит
$(\mathcal{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = (\mathcal{A}\boldsymbol{u}, \mathcal{A}\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0.$ $\square$

Лемма

Собственные значения ортогонального (унитарного) оператора $\mathcal{A}$ по модулю равны единице.

Доказательство.

Действительно, пусть $\mathcal{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ для $\boldsymbol{v} \ne 0$. Тогда

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = (\mathcal{A}\boldsymbol{v},\mathcal{A}\boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{v},\lambda\boldsymbol{v}) = \overline{\lambda}\lambda(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = |\lambda|^2(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}),$$

откуда $|\lambda|^2 = 1$. □

Теорема

Для унитарного оператора $\mathcal{A}$ существует ортонормированный базис, в котором его матрица диагональна, а все диагональные элементы по модулю равны единице.

Доказательство.

Полностью аналогично доказательству теорем для самосопряжённых или косоэрмитовых операторов. Шаг индукции проводим, выбирая собственный вектор $\boldsymbol{v}$ и используя инвариантность подпространства $\langle \boldsymbol{v} \rangle^{\perp}$. $\square$

Теорема

Для ортогонального оператора $\mathcal{A}$ существует ортонормированный базис, в котором его матрица блочно-диагональная с блоками размера 1 или 2, причём блоки размера 1 имеют вид (1) или (-1), а блоки размера 2 имеют вид $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, где $\varphi \neq \pi k$ с целым k.

Доказательство

В пространстве размерности 1 ортогональная матрица и так имеет вид (1) или (-1). В пространстве размерности 2 любая ортогональная матрица имеет вид $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ (если определитель равен 1) или $\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}$ (если определитель равен -1).

В первом случае мы уже имеем требуемый вид (а оператор представляет собой поворот на угол φ в положительном направлении).

Во втором случае оператор представляет собой симметрию относительно прямой под углом $\frac{\varphi}{2}$ к оси абсцисс. Имеется два ортогональных собственных вектора: $(\cos\frac{\varphi}{2},\sin\frac{\varphi}{2})$ (вектор вдоль оси симметрии) и $(-\sin\frac{\varphi}{2},\cos\frac{\varphi}{2})$ (перпендикулярный оси симметрии). В ортонормированном базисе из этих собственных векторов оператор $\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}$ принимает требуемый вид $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

Доказательство (продолжение).

Далее действуем по индукции, как и при доказательстве теоремы для кососимметрических операторов. Предположим, что утверждение доказано для операторов в пространствах размерности не больше $n-1$, и докажем его для пространства V размерности n (где $n \geqslant 3$).

Для оператора $\mathcal{A}$ существует 1-мерное или 2-мерное инвариантное подпространство $W \subset V$. Из доказанной ранее леммы следует, что ортогональное дополнение $W^\perp$ также инвариантно.

По предположению индукции, в пространстве $W^\perp$ имеется требуемый базис для ортогонального оператора $\mathcal{A}|_{W^\perp}$. Выбрав ортонормированный базис в пространстве W, как описано в начале доказательства, и взяв объединение базисов в $W^\perp$ и W, мы получим требуемый ортонормированный базис пространства V. $\square$

Матрицы, описанные в предыдущих двух теоремах, называются **канонический видом** унитарного и ортогонального оператора.

Пример

Как указано в доказательстве предыдущей теоремы, ортогональный оператор с матрицей $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ имеет канонический вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Тот же канонический вид будет, если оператор рассматривать как унитарный.

Пример

Канонический вид ортогонального оператора с матрицей $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ — это та же самая матрица. В то же время канонический вид этого оператора, рассматриваемого как унитарный оператор, есть $\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$, где $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Пример

В трёхмерном пространстве канонический вид ортогонального оператора есть

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

где в левом нижнем углу стоит 1 или -1 в зависимости от знака определителя оператора. (Операторы, канонический вид которых имеет три блока (1) или (-1), получаются при $\varphi = \pi k$.) Если определитель положителен, то такой оператор представляет собой поворот (вокруг оси третьего вектора канонического базиса). Если же определитель отрицателен, то оператор — это «поворот с переворотом», т. е. композиция поворота и симметрии относительно плоскости, перпендикулярной оси поворота.

Отсюда, в частности, следует, что композиция двух поворотов — это снова поворот вокруг некоторой оси (так как в каноническом виде всегда происходит всего один поворот).

Пример

В четырёхмерном пространстве уже бывают «независимые повороты». А именно, канонический вид ортогонального оператора общего вида с положительным определителем представляет собой матрицу из двух блоков размера 2:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

Это — композиция двух независимых поворотов: на угол φ в плоскости первого и второго базисных векторов и на угол ψ в плоскости третьего и четвёртого базисных векторов. Такой оператор не сводится к одному повороту.

Произведение ортогональных операторов очевидно является ортогональным оператором, и поэтому ортогональные операторы в евклидовом пространстве V образуют подгруппу в общей линейной группе $GL(V)$. Эта подгруппа называется ортогональной группой и обозначается $O(V)$. Если $\dim V = n$, то группа $O(V)$ изоморфна группе ортогональных матриц размера n; эта группа обозначается $O(n)$.

Аналогично, унитарные операторы в эрмитовом пространстве V образуют унитарную группу, которая обозначается $U(V)$. Если $\dim V = n$, то группа $U(V)$ изоморфна группе унитарных матриц размера n; эта группа обозначается $U(n)$.

Наконец, ортогональные (унитарные) матрицы с определителем 1 образуют подгруппу в $O(n)$ (соответственно, в $U(n)$). Эта подгруппа называется специальной ортогональной группой (соответственно, специальной унитарной группой) и обозначается $SO(n)$ (соответственно, $SU(n)$).

4.6. Положительные операторы. Полярное разложение

Определение

Самосопряжённый оператор $\mathcal{A}$ называется положительным, если $(\mathcal{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) > 0$ для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{v} \in V$.

Лемма

Самосопряжённый оператор $\mathcal{A}$ положителен тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительны.

Доказательство.

Пусть $(\mathcal{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) > 0$ при $\boldsymbol{v} \neq 0$. Рассмотрим собственный вектор $\boldsymbol{v}$ с собственным значением λ. Тогда $\lambda(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\mathcal{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) > 0$, откуда $\lambda > 0$.

Обратно, пусть все собственные значения λ_i положительны. Выберем ортонормированный базис из собственных векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда для ненулевого вектора $\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i$ мы имеем
$(\mathcal{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\mathcal{A}(v^i \boldsymbol{e}_i), v^j \boldsymbol{e}_j) = \overline{v}^i v^j (\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |v^i|^2 > 0.$ □

Теорема

Для положительного оператора $\mathcal{A}$ существует единственный положительный оператор $\mathcal{P}$, удовлетворяющий соотношению $\mathcal{P}^2 = \mathcal{A}$.

Доказательство.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — различные собственные значения оператора $\mathcal{A}$ и $V_1, \ldots, V_k$ — соответствующие собственные подпространства. Согласно лемме все λ_i положительны. Положим $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$. Рассмотрим оператор $\mathcal{P}$, действующий в пространстве V_i умножением на μ_i. Тогда $\mathcal{P}^2 = \mathcal{A}$. Оператор $\mathcal{P}$ самосопряжён (так как он задаётся диагональной матрицей в ортонормированном базисе из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$) и положителен в силу леммы.

Докажем единственность. Пусть оператор $\mathcal{P}$ удовлетворяет условиям теоремы. Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_k$ — его различные собственные значения и $W_1, \ldots, W_k$ — соответствующие собственные подпространства. Тогда оператор $\mathcal{P}^2 = \mathcal{A}$ действует в пространстве W_i умножением на μ_i^2. Следовательно, при подходящей нумерации имеем $\mu_i^2 = \lambda_i$ и $W_i = V_i$. Это показывает, что оператор $\mathcal{P}$ определён однозначно. □

Определение

Оператор $\mathcal{P}$, построенный в предыдущей теореме, называется **положительным корнем** из положительного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\sqrt{\mathcal{A}}$.

Определение

Самосопряжённый оператор $\mathcal{A}$ называется **неотрицательным**, если $(\mathcal{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geqslant 0$ для любого вектора $\boldsymbol{v} \in V$.

Все утверждения выше переносятся без изменений на неотрицательные операторы.

Теорема (полярное разложение)

Для любого невырожденного оператора $\mathcal{A}$ в евклидовом или эрмитовом пространстве существует единственное представление в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{U},$$

где $\mathcal{P}$ — положительный, а $\mathcal{U}$ — ортогональный (унитарный) оператор.

Доказательство.

Если $\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{U}$, то $\mathcal{A}^* = \mathcal{U}^*\mathcal{P}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{P}\mathcal{U}\mathcal{U}^*\mathcal{P} = \mathcal{P}^2$. Оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ очевидно самосопряжён; кроме того, он является положительным:

$$(\mathcal{A}\mathcal{A}^*\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\mathcal{A}^*\boldsymbol{v}, \mathcal{A}^*\boldsymbol{v}) > 0,$$

при $\boldsymbol{v} \neq 0$, так как $\mathcal{A}^*\boldsymbol{v} \neq 0$ в силу невырожденности $\mathcal{A}$. Поэтому положительный оператор $\mathcal{P}$, удовлетворяющий соотношению $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{P}^2$, единствен в силу предыдущей теоремы, а именно, $\mathcal{P} = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}$. Тогда оператор $\mathcal{U} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}$ также определён однозначно. Мы имеем $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}^2\mathcal{P}^{-1} = \mathrm{id}$. Следовательно, $\mathcal{U}$ — ортогональный (унитарный) оператор и $\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{U}$. $\square$

Аналогично, рассмотрев положительный оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, можно доказать существование второго полярного разложения $\mathcal{A} = \mathcal{U}'\mathcal{P}'$ (где $\mathcal{P}' = \sqrt{\mathcal{A}^*\mathcal{A}}$).

Для произвольного оператора $\mathcal{A}$ существует полярное разложение $\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{U}$, где $\mathcal{P}$ — неотрицательный оператор, а $\mathcal{U}$ — ортогональный или унитарный оператор (задача). Однако такое разложение не единственно.

В одномерном эрмитовом пространстве $\mathbb{C}$ положительные операторы — это положительные вещественные числа, а унитарные операторы — это комплексные числа, по модулю равные 1, т. е. вида $e^{i\varphi}$. Поэтому полярное разложение — это представление комплексного числа z в полярных координатах: $z = \rho e^{i\varphi}$, что объясняет название.