Линейная алгебра и геометрия

Лекция 18

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

13 апреля 2021 г.

4.3. Самосопряжённые проекторы. Спектральное разложение самосопряжённого оператора

Пусть пространство V представлено в виде прямой суммы $V = U \oplus W$. Напомним, что оператор $\mathcal{P}\colon V \to V$, переводящий $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$ в $\boldsymbol{u}$ (где $\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{w} \in W$), называется проектором на U вдоль W. При этом $\operatorname{Im}\mathcal{P} = U$ и $\operatorname{Ker}\mathcal{P} = W$.

Определение

Проектор $\mathcal{P}\colon V \to V$ на U вдоль W называется ортогональным, если $W = U^\perp$. Такой проектор будем обозначать через pr_U.

Это обозначение вполне согласуется с предыдущими: если $V = U \oplus U^\perp$, то для любого $\boldsymbol{v} \in V$ мы имеем $\boldsymbol{v} = \operatorname{pr}_U \boldsymbol{v} + \operatorname{ort}_U \boldsymbol{v}$.

Предложение

Проектор $\mathcal{P}\colon V \to V$ является самосопряжённым оператором тогда и только тогда, когда он ортогонален.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{P} = \mathrm{pr}_U$ — ортогональный проектор. Выберем ортонормированный базис в U и дополним его до ортонормированного базиса в V. Тогда в этом ортонормированном базисе матрица оператора pr_U диагональна (с единицами и нулями на диагонали), а значит оператор pr_U самосопряжён.

Обратно пусть $\mathcal{P}$ — самосопряжённый проектор на U вдоль W. Возьмём произвольные векторы $\boldsymbol{u} \in U = \operatorname{Im} \mathcal{P}$ и $\boldsymbol{w} \in W = \operatorname{Ker} \mathcal{P}$. Тогда $\boldsymbol{u} = \mathcal{P}\boldsymbol{v}$ для некоторого $\boldsymbol{v} \in V$ и $\mathcal{P}\boldsymbol{w} = 0$. Мы имеем

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = (\mathcal{P}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, \mathcal{P}\boldsymbol{w}) = 0,$$

откуда получаем $W = U^{\perp}$ и $\mathcal{P} = \mathrm{pr}_U$. $\square$

Пример

Пусть $\boldsymbol{u} = (u^1, \ldots, u^n)^t \in \mathbb{R}^n$ — ненулевой вектор-столбец и $U = \langle \boldsymbol{u} \rangle$ — одномерное подпространство. Тогда матрица оператора $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{u}} = \mathrm{pr}_U$ в стандартном базисе $\mathbb{R}^n$ есть

$$\frac{1}{|\boldsymbol{u}|^2} uu^t = \frac{1}{|\boldsymbol{u}|^2} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \cdots & u^n \end{pmatrix} = \frac{1}{|\boldsymbol{u}|^2} \begin{pmatrix} u^1 u^1 & u^1 u^2 & \cdots & u^1 u^n \\ u^2 u^1 & u^2 u^2 & \cdots & u^2 u^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u^n u^1 & u^n u^2 & \cdots & u^n u^n \end{pmatrix}$$

Напомним, что спектром оператора $\mathcal{A}$ называется множество его собственных значений. Для каждого собственного значения λ рассмотрим ортогональный проектор pr_{V_λ} на соответствующее собственное подпространство V_λ.

Теорема (спектральное разложение)

Пусть $\mathcal{A}$ — самосопряжённый оператор. Тогда имеет место разложение

$$\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda \,\mathrm{pr}_{V_\lambda},$$

где сумма берётся по всем собственным значениям. При этом проекторы pr_{V_λ} удовлетворяют соотношениям $\mathrm{pr}_{V_\lambda} \mathcal{A} = \mathcal{A} \,\mathrm{pr}_{V_\lambda} = \lambda \,\mathrm{pr}_{V_\lambda}$ и $\mathrm{pr}_{V_\lambda} \mathrm{pr}_{V_\mu} = \mathcal{O}$ при $\lambda \neq \mu$.

Доказательство

Соотношения $\mathrm{pr}_{V_\lambda} \mathcal{A} = \mathcal{A} \,\mathrm{pr}_{V_\lambda} = \lambda \,\mathrm{pr}_{V_\lambda}$ и $\mathrm{pr}_{V_\lambda} \mathrm{pr}_{V_\mu} = \mathcal{O}$ при $\lambda \neq \mu$ выполнены, так как они выполнены для матриц входящих в них операторов в ортонормированном базисе из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ (в этом базисе матрицы всех входящих в соотношения операторов диагональны).

Доказательство (продложение).

Разложению $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ в прямую сумму собственных подпространств соответствует разложение тождественного оператора в сумму ортогональных проекторов

$$\mathrm{id} = \sum_\lambda \mathrm{pr}_{V_\lambda}\,.$$

Умножив это соотношение слева на $\mathcal{A}$ и использовав соотношение $\mathcal{A}\,\mathrm{pr}_{V_\lambda} = \lambda\,\mathrm{pr}_{V_\lambda}$, получим требуемое разложение

$$\mathcal{A} = \sum_\lambda \lambda\,\mathrm{pr}_{V_\lambda}\,.$$

□

4.4. Кососимметрические и косоэрмитовы операторы

Определение

Оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$ в евклидовом (эрмитовом) пространстве называется кососимметрическим (соответственно, косоэрмитовым), если $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$, т. е. выполнено соотношение

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -(\boldsymbol{u}, \mathcal{A}\boldsymbol{v})$$

для любых $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$.

Предложение

Матрица A кососимметрического (косоэрмитова) оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе евклидова (эрмитова) пространства кососимметрична (косоэрмитова), т. е. $A^t = -A$ (соответственно, $\overline{A}^t = -A$).

Если матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе кососимметрична (косоэрмитова), то оператор $\mathcal{A}$ кососимметричен (косоэрмитов).

Доказательство.

То же, что и для самосопряжённых операторов. □

Теорема

Для косоэрмитова оператора $\mathcal{A}$ существует ортонормированный базис, в котором его матрица диагональна с чисто мнимыми числами на диагонали. Другими словами, для косоэрмитова оператора существует ортонормированный базис из собственных векторов, а все собственные значения — чисто мнимые.

Доказательство

Доказательство, как и в случае самосопряжённого оператора, основано на лемме об инвариантности ортогонального дополнения. Будем вести индукцию по размерности пространства V. При $\dim V = 1$ доказывать нечего. Предположим, что утверждение доказано для операторов в пространствах размерности $n-1$, и докажем его для размерности n.

Доказательство (продолжение).

Выберем собственный вектор $\boldsymbol{v}$ для $\mathcal{A}$, т. е. одномерное инвариантное подпространство $W = \langle \boldsymbol{v} \rangle$. Тогда ортогональное дополнение $W^\perp$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}^*$, а значит оно инвариантно и относительно $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$. Так как $\dim W^\perp = n-1$, в пространстве $W^\perp$ имеется ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}|_{W^\perp}$. Тогда $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}, \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ — ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Пусть D — диагональная матрица косоэрмитова оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе из собственных векторов. Так как $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$, получаем $\overline{D}^t = -D$. Следовательно, диагональные элементы матрицы D (собственные числа) удовлетворяют соотношению $\overline{\lambda} = -\lambda$, т. е. являются чисто мнимыми. $\square$

Кососимметрические операторы в евклидовом пространстве обычно не диагонализируемы. Например, оператор с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ с ненулевым a не диагонализируем в вещественном пространстве.

Теорема

Для кососимметрического оператора $\mathcal{A}$ существует ортонормированный базис, в котором его матрица блочно-диагональная с блоками размера 1 или 2, причём блоки размера 1 нулевые, а блоки размера 2 имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ с ненулевыми $a \in \mathbb{R}$.

Доказательство

В пространстве размерности 1 или 2 доказывать нечего, так как кососимметрическая матрица и так имеет там требуемый вид.

Предположим, что утверждение доказано для операторов в пространствах размерности не больше $n-1$, и докажем его для пространства V размерности n (где $n \geqslant 3$).

Доказательство (продолжение).

Для оператора $\mathcal{A}$ существует 1-мерное или 2-мерное инвариантное подпространство $W \subset V$. Тогда ортогональное дополнение $W^\perp$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}^*$, а значит оно инвариантно и относительно $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$.

По предположению индукции, в пространстве $W^\perp$ имеется требуемый базис для оператора $\mathcal{A}|_{W^\perp}$. Выбрав произвольный ортонормированный базис в W и взяв объединение базисов в $W^\perp$ и W, мы получим ортонормированный базис пространства V, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ состоит из блоков требуемого вида и ещё одного блока размера 1 или 2 — матрицы оператора $\mathcal{A}|_W$. Этот последний блок — кососимметрическая матрица размера 1 или 2, т. е. она тоже имеет требуемый вид. $\square$

Вид матрицы кососимметрического или косоэрмитова оператора, описанный в предыдущих теоремах, называется **канонический видом** оператора.

Заметим, что если $\mathcal{A}$ — эрмитов оператор, то оператор $i\mathcal{A}$ косоэрмитов и наоборот.

Теорема (эрмитово разложение)

Для любого оператора $\mathcal{A}$ в эрмитовом пространстве существует единственное представление в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{R} + i\mathcal{I},$$

где $\mathcal{R}$ и $\mathcal{I}$ — эрмитовы операторы.

Доказательство.

Если $\mathcal{A} = \mathcal{R} + i\mathcal{I}$ — эрмитово разложение, то $\mathcal{A}^* = \mathcal{R}^* - i\mathcal{I}^* = \mathcal{R} - i\mathcal{I}$. Из этих двух соотношений получаем

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}^* + \mathcal{A}), \qquad \mathcal{I} = \frac{i}{2}(\mathcal{A}^* - \mathcal{A}),$$

т. е. операторы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{I}$ определены однозначно и эрмитово разложение единственно. С другой стороны, операторы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{I}$, задаваемые предыдущими формулами, очевидно эрмитовы (самосопряжены), так что эрмитово разложение существует. $\square$

В одномерном эрмитовом пространстве $\mathbb{C}$ эрмитовы операторы — это вещественные числа, а операторы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{I}$ в эрмитовом разложении $\mathcal{A} = \mathcal{R} + i\mathcal{I}$ — это вещественная и мнимая части комплексного числа.

4.5. Ортогональные и унитарные операторы. Канонический вид

Предложение

Следующие условия для оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ в евклидовом или эрмитовом пространстве эквивалентны:

а) *оператор $\mathcal{A}$ сохраняет длины векторов, т. е. $|\mathcal{A}\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}|$ для любого $\boldsymbol{v} \in V$;*

б) *оператор $\mathcal{A}$ сохраняет скалярное произведение, т. е. $(\mathcal{A}\boldsymbol{u}, \mathcal{A}\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ для любых $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$;*

в) *оператор $\mathcal{A}$ переводит ортонормированные базисы в ортонормированные, т. е. если $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — ортонормированный базис, то $\mathcal{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \mathcal{A}\boldsymbol{e}_n$ — также ортонормированный базис;*

г) *матрица A оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе ортогональна (унитарна), т. е. $A^tA = E$ (соответственно, $\overline{A}^tA = E$);*

д) $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathrm{id}$, *т. е. сопряжённый оператор к $\mathcal{A}$ является его обратным.*

Доказательство

Мы докажем импликации а)$\Leftrightarrow$б) и б)$\Rightarrow$в)$\Rightarrow$г)$\Rightarrow$д)$\Rightarrow$б).

а)$\Rightarrow$б). В евклидовом пространстве имеем $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) + 2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$, откуда

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\bigl((\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\bigr).$$

Поэтому, если оператор $\mathcal{A}$ сохраняет длины, т. е. скалярные произведения $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$, то он сохраняет и все скалярные произведения.

В эрмитовом пространстве имеем $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+\overline{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})+2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$, откуда

$$\mathrm{Re}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\bigl((\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\bigr)$$

и аналогично

$$\mathrm{Im}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{2}\bigl((\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\bigr).$$

Поэтому, если оператор $\mathcal{A}$ сохраняет длины, то он сохраняет и скалярное произведение $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$, так как сохраняет его вещественную и мнимую части.

Доказательство (продолжение)

б)$\Rightarrow$ а). Очевидно, что если оператор сохраняет любые скалярные произведения, то он сохраняет длины векторов.

б)$\Rightarrow$ в). Пусть $(\mathcal{A}\boldsymbol{u}, \mathcal{A}\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Тогда если $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — ортонормированный базис, то $(\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i, \mathcal{A}\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$, т. е. базис $\mathcal{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \mathcal{A}\boldsymbol{e}_n$ также ортонормирован.

в)$\Rightarrow$ г). Пусть $\mathcal{A}$ переводит ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в ортонормированный базис $\mathcal{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \mathcal{A}\boldsymbol{e}_n$ и $A = (a^i_j)$ — матрица оператора в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Тогда

$$\delta_{ij} = (\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i, \mathcal{A}\boldsymbol{e}_j) = (a^k_i \boldsymbol{e}_k, a^\ell_j \boldsymbol{e}_\ell) = \overline{a}^k_i a^\ell_j (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_\ell) = \overline{a}^k_i a^\ell_j \delta_{k\ell} = \overline{a}^k_i \delta_{k\ell} a^\ell_j.$$

Это эквивалентно матричному соотношению $E = \overline{A}^t E A$ или $\overline{A}^t A = E$.

Доказательство (окончание).

г)$\Rightarrow$д). Если A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе, то матрицей сопряжённого оператора $\mathcal{A}^*$ в том же базисе будет A^t (соответственно, $\overline{A}^t$). Поэтому матричное соотношение $A^tA = E$ (соответственно, $\overline{A}^tA = E$) влечёт соотношение $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathrm{id}$.

д)$\Rightarrow$б). Пусть $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathrm{id}$. Тогда $(\mathcal{A}\boldsymbol{u}, \mathcal{A}\boldsymbol{v}) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, т. е. $\mathcal{A}$ сохраняет скалярное произведение. $\square$

Определение

Оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$ в евклидовом (эрмитовом) пространстве, удовлетворяющий одному из эквивалентных условий из предыдущего предложения, называется ортогональным (соответственно, унитарным).

Иногда ортогональные и унитарные операторы называют изометрическими.