

# Линейная алгебра и геометрия

## Лекция 17

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.  
Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:  
<http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching>

9 апреля 2021 г.

## 4.1. Сопряжённые операторы

Пусть  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  — линейный оператор в евклидовом пространстве  $V$ . Мы определяли сопряжённое линейное отображение  $\mathcal{A}^*: V^* \rightarrow V^*$  по формуле

$$(\mathcal{A}^*\xi)(\mathbf{v}) := \xi(\mathcal{A}\mathbf{v}) \quad \text{для } \xi \in V^*, \mathbf{v} \in V.$$

При каноническом отождествлении  $V \leftrightarrow V^*$ ,  $\mathbf{u} \leftrightarrow \xi_{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}, \cdot)$ , оператор  $\mathcal{A}^*: V^* \rightarrow V^*$  переходит в оператор  $\mathcal{A}^*: V \rightarrow V$ , (который мы для простоты будем обозначать тем же символом  $\mathcal{A}^*$ ), удовлетворяющий соотношению  $\xi_{\mathcal{A}^*\mathbf{u}} = \mathcal{A}^*\xi_{\mathbf{u}}$  для любого вектора  $\mathbf{u} \in V$ . Это описывается следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathcal{A}^*} & V \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ V^* & \xrightarrow{\mathcal{A}^*} & V^* \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{u} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{A}^*\mathbf{u} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \xi_{\mathbf{u}} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{A}^*\xi_{\mathbf{u}} = \xi_{\mathcal{A}^*\mathbf{u}} \end{array}$$

Чтобы установить связь между  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  и  $\mathcal{A}^*: V \rightarrow V$  непосредственно, вычислим значение линейных функций  $\xi_{\mathcal{A}^*u}$  и  $\mathcal{A}^*\xi_u$  на векторе  $v \in V$ :

$$\xi_{\mathcal{A}^*u}(v) = (\mathcal{A}^*u, v), \quad (\mathcal{A}^*\xi_u)(v) = \xi_u(\mathcal{A}v) = (u, \mathcal{A}v).$$

Так как  $\xi_{\mathcal{A}^*u} = \mathcal{A}^*\xi_u$ , мы получаем  $(\mathcal{A}^*u, v) = (u, \mathcal{A}v)$  для любых  $u, v \in V$ .

## Определение

Пусть  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  — оператор в евклидовом или эрмитовом пространстве  $V$ . Линейный оператор  $\mathcal{A}^*: V \rightarrow V$ , удовлетворяющий соотношению

$$(\mathcal{A}^*u, v) = (u, \mathcal{A}v)$$

для любых  $u, v \in V$ , называется **сопряжённым** к  $\mathcal{A}$ .

Соотношение  $(\mathcal{A}^* \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathcal{A} \mathbf{v})$  определяет оператор  $\mathcal{A}^*$  однозначно.

Действительно, если  $(\mathcal{A}' \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathcal{A} \mathbf{v})$  для другого оператора  $\mathcal{A}': V \rightarrow V$ , то мы получаем  $((\mathcal{A}^* - \mathcal{A}') \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$  для любых  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ . В частности,  $((\mathcal{A}^* - \mathcal{A}') \mathbf{u}, (\mathcal{A}^* - \mathcal{A}') \mathbf{u}) = 0$ , т. е.  $(\mathcal{A}^* - \mathcal{A}') \mathbf{u} = 0$  для любого  $\mathbf{u} \in V$ . Следовательно,  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}'$ .

## Предложение

Пусть  $A$  — матрица оператора  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  в ортонормированном базисе евклидова (эрмитова) пространства  $V$ . Тогда матрица сопряжённого оператора  $\mathcal{A}^*: V \rightarrow V$  в том же базисе есть  $A^t$  (соответственно,  $\overline{A}^t$ ).

## Доказательство.

Это следует из доказанного ранее утверждения о матрице сопряжённого отображения, но мы также дадим прямое доказательство. Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — ортонормированный базис,  $A = (a_j^i)$  — матрица оператора  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  в этом базисе, а  $\tilde{A} = (\tilde{a}_j^i)$  — матрица оператора  $\mathcal{A}^*: V \rightarrow V$ . Тогда мы имеем

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}e_j, e_k) &= (a_j^i e_i, e_k) = \bar{a}_j^i (e_i, e_k) = \bar{a}_j^i \delta_{ik} = \bar{a}_j^k, \\(e_j, \mathcal{A}^*e_k) &= (e_j, \tilde{a}_k^i e_i) = \tilde{a}_k^i (e_j, e_i) = \tilde{a}_k^i \delta_{ji} = \tilde{a}_k^j.\end{aligned}$$

Так как  $(\mathcal{A}e_j, e_k) = (e_j, \mathcal{A}^*e_k)$ , мы получаем  $\bar{a}_j^k = \tilde{a}_k^j$  или  $\overline{A}^t = \tilde{A}$ .  $\square$

## Предложение

Имеют место следующие равенства:

$$а) (A + B)^* = A^* + B^*, \quad (\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*;$$

$$б) (AB)^* = B^*A^*.$$

## Доказательство.

Это следует из свойств операции транспонирования матриц и предыдущего утверждения. □

## Лемма

Если  $W \subset V$  — инвариантное подпространство относительно  $A$ , то  $W^\perp$  — инвариантное подпространство относительно  $A^*$ .

## Доказательство.

Пусть  $u \in W^\perp$ . Тогда для любого  $w \in W$  имеем

$(A^*u, w) = (u, Aw) = 0$  так как  $Aw \in W$ , а  $u \in W^\perp$ . Следовательно,  $A^*u \in W^\perp$ . □

## 4.2. Самосопряжённые операторы. Канонический вид

### Определение

Оператор  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  в евклидовом или эрмитовом пространстве называется **самосопряжённым**, если  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ , т. е. выполнено соотношение

$$(\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}v)$$

для любых  $u, v \in V$ .

## Предложение

Матрица  $A$  самосопряжённого оператора  $\mathcal{A}$  в ортонормированном базисе евклидова (эрмитова) пространства симметрична (эрмитова), т. е.  $A^t = A$  (соответственно,  $\overline{A}^t = A$ ).

Если матрица оператора  $\mathcal{A}$  в некотором ортонормированном базисе симметрична (эрмитова), то оператор  $\mathcal{A}$  самосопряжён.

## Доказательство.

Так как матрица оператора  $\mathcal{A}^*$  (в ортонормированном базисе) есть  $\overline{A}^t$  и  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ , мы получаем  $\overline{A}^t = A$ .

Докажем второе утверждение. Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — ортонормированный базис, в котором матрица  $A$  оператора  $\mathcal{A}$  эрмитова, т. е.  $\overline{A}^t = A$ . Тогда матрица  $\overline{A}^t$  оператора  $\mathcal{A}^*$  в том же базисе совпадает с  $A$ .

Следовательно,  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$  и оператор  $\mathcal{A}$  самосопряжён. □

Самосопряжённые операторы в евклидовом пространстве также называют **симметрическими**, а в эрмитовом пространстве — **эрмитовыми**.

Вот основное свойство самосопряжённых операторов.

### Теорема

*Самосопряжённый оператор диагонализируем в ортонормированном базисе. Другими словами, для самосопряжённого оператора существует ортонормированный базис из собственных векторов.*

Доказательство будет опираться на лемму, которая важна сама по себе.

## Лемма

*Все корни характеристического многочлена самосопряжённого оператора  $\mathcal{A}$  вещественны.*

## Доказательство

Вначале докажем лемму для эрмитова пространства. В этом случае корни характеристического многочлена суть собственные значения оператора  $\mathcal{A}$ . Пусть  $\lambda \in \mathbb{C}$  такой корень и  $\mathbf{v} \neq 0$  — соответствующий собственный вектор, т. е.  $\mathcal{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ . Тогда

$$\overline{\lambda}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\mathcal{A}\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathcal{A}\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Так как  $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \neq 0$ , получаем  $\overline{\lambda} = \lambda$ , т. е.  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

## Доказательство (продолжение).

Случай евклидова пространства сводится к эрмитовому случаю при помощи комплексификации. Пусть  $A$  — матрица самосопряжённого оператора  $\mathcal{A}$  в ортонормированном базисе евклидова пространства  $V$ . Тогда матрица  $A$  вещественна и симметрична. Та же матрица  $A$  будет матрицей комплексифицированного оператора  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  в соответствующем базисе эрмитова пространства  $V_{\mathbb{C}}$ . Этот базис также ортонормирован, а матрица  $A$ , будучи вещественной и симметричной, является эрмитовой. Следовательно, оператор  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  самосопряжён, а корни его характеристического многочлена вещественны и совпадают с корнями многочлена оператора  $\mathcal{A}$ . □

## Теорема

*Самосопряжённый оператор диагонализуем в ортонормированном базисе. Другими словами, для самосопряжённого оператора существует ортонормированный базис из собственных векторов.*

## Доказательство.

Используем индукцию по размерности пространства  $V$ . При  $\dim V = 1$  доказывать нечего. Предположим, что утверждение доказано для операторов в пространствах размерности  $n - 1$ , и докажем его для пространства  $V$  размерности  $n$ .

В силу предыдущей леммы у самосопряжённого оператора  $\mathcal{A}$  имеется собственный вектор  $\mathbf{v}$ , т.е. одномерное инвариантное подпространство  $W = \langle \mathbf{v} \rangle$ . По ранее доказанной лемме ортогональное дополнение  $W^\perp$  инвариантно относительно оператора  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ . Так как  $\dim W^\perp = n - 1$ , в пространстве  $W^\perp$  имеется ортонормированный базис  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$  из собственных векторов оператора  $\mathcal{A}|_{W^\perp}$ . Тогда  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}, \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$  — ортонормированный базис из собственных векторов оператора  $\mathcal{A}$ .  $\square$

## Определение

Диагональный вид матрицы самосопряжённого оператора  $\mathcal{A}$  в ортонормированном базисе из собственных векторов называется **каноническим видом** самосопряжённого оператора.

Практический метод нахождения ортонормированного базиса из собственных векторов основан на следующей лемме.

## Лемма

*Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям самосопряжённого оператора  $\mathcal{A}$ , взаимно ортогональны.*

## Доказательство.

Пусть  $\mathcal{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$  и  $\mathcal{A}\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$ , где  $\lambda \neq \mu$  — вещественные собственные значения. Тогда

$$\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathcal{A}\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mu\mathbf{v}) = \mu(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

откуда  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ , так как  $\lambda \neq \mu$ . □

Для нахождения ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряжённого оператора  $A$  находятся все его собственные подпространства, а затем в каждом из них выбирается ортонормированный базис. Объединение этих базисов и будет нужным базисом для  $A$ .

В евклидовом пространстве верно утверждение, обратное к теореме об ортогональной диагонализируемости самосопряжённого оператора:

### Предложение

*Если оператор  $A$  в евклидовом пространстве диагонализуем в ортонормированном базисе, то  $A$  самосопряжён.*

### Доказательство.

Действительно, диагональная матрица симметрична, а оператор, имеющий симметричную матрицу в ортонормированном базисе евклидова пространства самосопряжён. □

В эрмитовом пространстве класс операторов, диагонализуемых в ортонормированном базисе, шире, чем самосопряжённые операторы (так как на диагонали могут стоять не вещественные числа). Такие операторы мы изучим позже.