Линейная алгебра и геометрия

Лекция 16

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

6 апреля 2021 г.

3.7. Определитель матрицы Грама и многомерный объём

Определение

Матрицей Грама системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ называется матрица

$$G = G(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & \ldots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_k) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) & \ldots & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_2) & \ldots & (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_k) \end{pmatrix}.$$

Матрица G симметрична ($G^t = G$) в евклидовом пространстве и эрмитова ($\overline{G}^t = G$) в эрмитовом.

Матрица Грама уже появлялась как матрица системы для нахождения коэффициентов проекции вектора на подпространство $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$.

Предложение

Пусть G — матрица Грама системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, а $A = (a^i_j)$ — матрица, в столбцы которой записаны координаты векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ в некотором ортонормированном базисе. Тогда имеет место соотношение

$$G = \overline{A}^t A \qquad (G = A^t A \text{ в евклидовом пространстве}).$$

Доказательство.

Это следует из закона умножения матриц и формулы для скалярного произведения в ортонормированном базисе. $\square$

Определение

Пусть $P \in (\mathfrak{A}, V)$ — точка в аффинном пространстве, а $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ — набор векторов в линейном пространстве V. Параллелепипедом с вершиной в точке P, натянутым на векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, называется следующее множество точек аффинного пространства $\mathfrak{A}$:

$$\Pi(P; \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k) := \{Q \in \mathfrak{A}\colon Q = P + x^1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + x^k \boldsymbol{a}_k, \quad 0 \leqslant x^i \leqslant 1\}.$$

Определим k-мерный объём vol_k параллелепипеда $\Pi(P; \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ в аффинном евклидовом пространстве индуктивно:

1) одномерный объём $\mathrm{vol}_1 \Pi(P; \boldsymbol{a}_1) := |\boldsymbol{a}_1|$ — это длина вектора;
2) $\mathrm{vol}_k \Pi(P; \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k) := \mathrm{vol}_{k-1} \Pi(P; \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}) \cdot |\operatorname{ort}_{\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1} \rangle} \boldsymbol{a}_k|$.

Это определение обобщает определение площади параллелограмма (или объёма 3-мерного параллелепипеда) как произведение длины (или площади) основания на высоту. Из определения объёма $\mathrm{vol}_k \Pi(P; \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ видно, что он не зависит от вершины P; поэтому далее мы будем использовать обозначение $\mathrm{vol}_k \Pi(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$.

Теорема

Квадрат объёма равен определителю матрицы Грама:

$$\big(\mathrm{vol}_k \Pi(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)\big)^2 = \det G(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k).$$

В частности, объём $\mathrm{vol}_k \Pi(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ *не зависит от порядка векторов.*

Доказательство

Индукция по k. При $k = 1$, очевидно, $|\boldsymbol{a}_1|^2 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)$.

Пусть утверждение доказано для vol_{k-1}, докажем его для vol_k.
Рассмотрим разложение

$$\boldsymbol{a}_k = \mathrm{pr}_{\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1} \rangle} \boldsymbol{a}_k + \mathrm{ort}_{\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1} \rangle} \boldsymbol{a}_k,$$

где $\mathrm{pr}_{\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1} \rangle} \boldsymbol{a}_k = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_{k-1} \boldsymbol{a}_{k-1}$,
и обозначим $\boldsymbol{b} = \mathrm{ort}_{\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1} \rangle} \boldsymbol{a}_k$.

Тогда $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}) = 0$ при $i = 1, \ldots, k-1$ и $(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$.

Доказательство (продолжение).

Мы имеем:

$$\det G = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \dots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_1) & \dots & (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \dots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{k-1}) & (\boldsymbol{a}_1, \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + \lambda_{k-1} \boldsymbol{a}_{k-1} + \boldsymbol{b}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_1) & \dots & (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k-1}) & (\boldsymbol{a}_k, \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + \lambda_{k-1} \boldsymbol{a}_{k-1} + \boldsymbol{b}) \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda_1 \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \dots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{k-1}) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_1) & \dots & (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k-1}) & (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_1) \end{vmatrix} + \dots + \lambda_{k-1} \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \dots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{k-1}) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{k-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_1) & \dots & (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k-1}) & (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k-1}) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \dots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{k-1}) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{a}_1) & \dots & (\boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{a}_{k-1}) & (\boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_1) & \dots & (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k-1}) & (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \dots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{k-1}) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{a}_1) & \dots & (\boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{a}_{k-1}) & 0 \\ (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_1) & \dots & (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k-1}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \dots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{k-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{a}_1) & \dots & (\boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{a}_{k-1}) \end{vmatrix} \cdot (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = \left(\mathrm{vol}_{k-1} \Pi(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{k-1})\right)^2 |\boldsymbol{b}|^2 = \left(\mathrm{vol}_k \Pi(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k)\right)^2.$$

□

Следствие

Векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\det G(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k) = 0$.

Доказательство.

Действительно, предположим, что векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ линейно зависимы. Можно считать, что $\boldsymbol{a}_k$ линейно выражается через $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}$. Тогда $\mathrm{ort}_{\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1} \rangle} \boldsymbol{a}_k = 0$ и, следовательно,

$$\det G = \bigl(\mathrm{vol}_k \Pi(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)\bigr)^2 = \\ = \bigl(\mathrm{vol}_{k-1} \Pi(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1})\bigr)^2 |\,\mathrm{ort}_{\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1} \rangle} \boldsymbol{a}_k|^2 = 0.$$

Обратно, пусть $\det G = (\mathrm{vol}_k \Pi(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k))^2 = 0$. Тогда, в силу индуктивного определения объема, мы имеем $\mathrm{vol}_i \Pi(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i) = 0$, а $\mathrm{vol}_{i-1} \Pi(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}) \neq 0$ для некоторого i. Так как $\mathrm{vol}_i \Pi(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i) = \mathrm{vol}_{i-1} \Pi(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}) |\,\mathrm{ort}_{\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1} \rangle} \boldsymbol{a}_i|$, это означает, что $\mathrm{ort}_{\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1} \rangle} \boldsymbol{a}_i = 0$, т. е. $\boldsymbol{a}_i$ линейно выражается через $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}$. $\square$

Следствие

Пусть $\dim V = n$ *и* $A = (a^i_j)$ — *квадратная матрица из координат векторов* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ *в некотором ортонормированном базисе. Тогда*

$$\mathrm{vol}_n \Pi(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = |\det A|.$$

Доказательство.

Мы имеем $G = A^t A$. Тогда из предыдущей теоремы получаем

$$\big(\mathrm{vol}_n \Pi(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\big)^2 = \det G = \det(A^t A) = (\det A)^2.$$

$\square$

3.8. Метод наименьших квадратов

Часто на практике при исследовании какого-нибудь природного или социального явления делается допущение, что это явление описывается линейной формулой. Точнее, мы предполагаем, что некоторая величина b линейно зависит от других величин $a_1, \ldots, a_n$, и хотим найти эту зависимость

$$b = a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n,$$

т. е. найти неизвестные коэффициенты $x^1, \ldots, x^n$. Это называется моделью линейной регрессии.

Для нахождения зависимости b от $a_1, \ldots, a_n$ делается большое число m измерений (как правило $m \gg n$), и по таблице измеренных значений записывается система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \ldots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_1^m x^1 + \ldots + a_n^m x^n = b^m \end{cases}$$

в которой число неизвестных меньше числа уравнений.

Такая система

$$\begin{cases} a^1_1 x^1 + \ldots + a^1_n x^n = b^1, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a^m_1 x^1 + \ldots + a^m_n x^n = b^m, \end{cases}$$

как правило, несовместна. Поэтому находится «наилучшее приближённое» решение $x^1, \ldots, x^n$, для которого отклонение значений b^i от $a^i_j x^j = a^i_1 x^1 + \ldots + a^i_n x^n$ будет наименьшим.

Метод наименьших квадратов решает задачу нахождения наилучшего приближённого решения в предположении, что в качестве меры отклонения берётся сумма квадратов разностей величин $a^i_1 x^1 + \ldots + a^i_n x^n$ и b^i.

Определение

Псевдорешением системы

$$\begin{cases} a_1^1x^1 + \ldots + a_n^1x^n = b^1 \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_1^mx^1 + \ldots + a_n^mx^n = b^m \end{cases}$$

называется набор $\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n$, который минимизирует сумму квадратов разностей левых и правых частей уравнений системы, т. е. минимизирует величину

$$(a_j^1x^j - b^1)^2 + (a_j^2x^j - b^2)^2 + \ldots + (a_j^mx^j - b^m)^2$$

по всем $(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Эта величина называется **квадратичным отклонением**.

Пусть $A = (a^i_j)$ — матрица системы

$$\begin{cases} a^1_1x^1 + \ldots + a^1_nx^n = b^1, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a^m_1x^1 + \ldots + a^m_nx^n = b^m, \end{cases} \tag{1}$$

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ — векторы-столбцы этой матрицы, а $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ — вектор правых частей.

Теорема

Псевдорешение системы (1) *находится как решение системы*

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)x^1 + \ldots + (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_n)x^n = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}), \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_1)x^1 + \ldots + (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_n)x^n = (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}). \end{cases}$$

Другими словами, псевдорешение — это набор коэффициентов в разложении проекции $\mathrm{pr}_{\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle} \boldsymbol{b}$ *по векторам* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$*, а квадратичное отклонение псевдорешения — это квадрат длины вектора* $\mathrm{ort}_{\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle} \boldsymbol{b}$.

Доказательство.

Квадратичное отклонение набора $x^1, \ldots, x^n$ — это по определению квадрат длины вектора $\boldsymbol{a}_j x^j - \boldsymbol{b}$, т. е. квадрат расстояния между точками $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}_j x^j \in \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ аффинного пространства $\mathbb{A}^m$.

Мы знаем, что расстояние между $\boldsymbol{b}$ и точкой $\boldsymbol{a}_j x^j$ подпространства $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ минимально, когда $\boldsymbol{a}_j x^j$ — это проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$. Коэффициенты в разложении проекции по векторам подпространства находятся из системы

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)x^1 + \ldots + (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_n)x^n = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}), \\ \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_1)x^1 + \ldots + (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_n)x^n = (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}), \end{cases}$$

а минимальное расстояние равно $|\operatorname{ort}_{\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle} \boldsymbol{b}|$. $\square$

Аналогично, методом наименьших квадратов можно находить более сложные зависимости величины b от $a_1, \ldots, a_n$.

Например, в случае неоднородной линейной зависимости $b = x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n$ можно находить коэффициенты $x^0, x^1, \ldots, x^n$.

В случае, когда предполагаемая зависимость b от одной величины a выражается многочленом n-й степени $b = x^0 + ax^1 + a^2x^2 + \ldots + a^nx^n$ с неизвестными коэффициентами $x^0, x^1, \ldots, x^n$, метод наименьших квадратов позволяет находить наилучшее приближение для этих коэффициентов.

3.9. Изоморфизмы евклидовых и эрмитовых пространств

Определение

Два евклидовых или эрмитовых пространства V и W называются **изоморфными**, если существует изоморфизм линейных пространств $\mathcal{A}\colon V \to W$, сохраняющий скалярное произведение, т. е.

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{u}, \mathcal{A}\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \qquad \text{для любых } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V.$$

Предложение

Два евклидовых или эрмитовых пространства V и W изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.

Доказательство.

Если V и W изоморфны как евклидовы (эрмитовы) пространства, то они изоморфны как линейные пространства, а потому $\dim V = \dim W$.

Доказательство обратного утверждения аналогично доказательству соответствующего утверждения для линейных пространств: изоморфизм между евклидовыми (эрмитовыми) пространствами n устанавливается при помощи взаимно однозначного соответствия между базисами $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в V и $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ в W. Для того, чтобы получаемый изоморфизм линейных пространств $\mathcal{A}\colon V \to W$ сохранял скалярное произведение, базисы необходимо выбрать ортонормированными. В этом случае мы имеем $\boldsymbol{f}_i = \mathcal{A}\boldsymbol{e}_i$ и $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j) = \delta_{ij}$. Поэтому для любых векторов $\boldsymbol{u} = u^i\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{v} = v^j\boldsymbol{e}_j$ из V мы имеем

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{u}, \mathcal{A}\boldsymbol{v}) = \overline{u}^i v^j(\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i, \mathcal{A}\boldsymbol{e}_j) = \overline{u}^i v^j(\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j) = \overline{u}^i v^j\delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \overline{u}^i v^i = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}),$$

т. е. изоморфизм $\mathcal{A}$ сохраняет скалярное произведение. $\square$

Так как пространства V и V^* имеют одну размерность (в конечномерном случае), они изоморфны. Однако построение изоморфизма между ними требует выбора базисов и в этом смысле неканонично. Оказывается, что в присутствии скалярного произведения можно установить изоморфизм $V \to V^*$ каноническим образом, т. е. не прибегая к выбору базисов.

Пусть V — евклидово пространство. Каждому вектору $\boldsymbol{u} \in V$ сопоставим линейную функцию $\xi_{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u}, \cdot\,)$, заданную по формуле $\xi_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

Теорема

Пусть V — евклидово пространство. Отображение $\boldsymbol{u} \mapsto \xi_{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u}, \cdot\,)$ устанавливает канонический изоморфизм $\mathcal{A}\colon V \to V^*$.

Доказательство.

Линейность отображения $\boldsymbol{u} \mapsto \xi_{\boldsymbol{u}}$ вытекает из линейности скалярного произведения по первому аргументу. Так как $\dim V = \dim V^*$, чтобы проверить, что $\mathcal{A}\colon V \to V^*$ — изоморфизм, достаточно проверить, что $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$. Пусть $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$, т. е. $\mathcal{A}\boldsymbol{v} = \xi_{\boldsymbol{v}} = o$. Следовательно, $\xi_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ для любого $\boldsymbol{w} \in V$. Но тогда и $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$, значит $\boldsymbol{v} = 0$ и ядро отображения $\mathcal{A}$ нулевое. □

Аналогичным образом для эрмитова пространства V устанавливается канонический изоморфизм $\overline{V} \to V^*$, $\boldsymbol{u} \mapsto (\boldsymbol{u}, \,\cdot\,)$, где $\overline{V}$ — комплексно сопряжённое пространство (с умножением на скаляры, определённым по формуле $\lambda \cdot \boldsymbol{v} := \overline{\lambda}\boldsymbol{v}$). Это позволяет отождествить два понятия «сопряжённого» пространства для эрмитова пространства V.