Линейная алгебра и геометрия
Лекция 15

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.
Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

2 апреля 2021 г.

3.5. Ортогональное дополнение. Проекция и ортогональная составляющая. Угол между вектором и подпространством

Определение

Пусть $W \subset V$ — подпространство евклидова или эрмитова пространства. Ортогональным дополнением к W называется множество $W^{\perp}$, состоящее из векторов, ортогональных всем векторам из W, т. е.

$$W^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \in V : (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0 \quad \text{для всех } \boldsymbol{w} \in W\}.$$

Легко видеть, что ортогональное дополнение $W^{\perp}$ является подпространством.

Предложение

Для любого подпространства $W \subset V$ *имеет место разложение* $V = W \oplus W^{\perp}$.

Доказательство

Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ — базис в W, дополним его до базиса всего пространства V векторами $\boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Применив ортогонализацию Грама–Шмидта, получим ортогональный базис $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{b}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ в V, причём его первые k векторов будут базисом в W, так как $\langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle = W$. В то же время $\boldsymbol{b}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ лежат в $W^{\perp}$ по определению ортогонального дополнения. Итак, для любого вектора $\boldsymbol{v} \in V$ мы имеем разложение по базису

$$\boldsymbol{v} = \underbrace{\lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{b}_k}_{\in W} + \underbrace{\lambda_{k+1} \boldsymbol{b}_{k+1} + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{b}_n}_{\in W^{\perp}},$$

т. е. $V = W + W^{\perp}$.

Доказательство (продолжение).

Осталось доказать, что эта сумма $V = W + W^\perp$ прямая. Пусть $\boldsymbol{v} \in W \cap W^\perp$. Так как $\boldsymbol{v} \in W^\perp$, мы имеем $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ для всех $\boldsymbol{w} \in W$. Так как $\boldsymbol{v} \in W$, в качестве $\boldsymbol{w}$ мы можем взять сам вектор $\boldsymbol{v}$. Тогда $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$, т. е. $\boldsymbol{v} = 0$ и сумма — прямая. □

Определение

Пусть $W \subset V$ — подпространство евклидова или эрмитова пространства. Для произвольного вектора $\boldsymbol{v} \in V$ запишем разложение $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, где $\boldsymbol{v}_1 \in W$, а $\boldsymbol{v}_2 \in W^\perp$.

Тогда вектор $\boldsymbol{v}_1$ называется ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{v}$ на подпространство W и обозначается $\mathrm{pr}_W \boldsymbol{v}$, а вектор $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v} - \mathrm{pr}_W \boldsymbol{v}$ называется ортогональной составляющей вектора $\boldsymbol{v}$ относительно подпространства W и обозначается $\mathrm{ort}_W \boldsymbol{v}$.

Ясно, что $\mathrm{ort}_W \boldsymbol{v} = \mathrm{pr}_{W^\perp} \boldsymbol{v}$.

Предложение

Пусть подпространство $W \subset V$ *задано как линейная оболочка системы векторов:* $W = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$. *Тогда проекция вектора* $\boldsymbol{v} \in V$ *на* W *есть линейная комбинация*

$$\mathrm{pr}_W \boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{a}_k,$$

коэффициенты которой находятся из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)\lambda_1 + (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\lambda_2 + \ldots + (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_k)\lambda_k = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{v}), \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1)\lambda_1 + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2)\lambda_2 + \ldots + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_k)\lambda_k = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v}), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots \\ (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_1)\lambda_1 + (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_2)\lambda_2 + \ldots + (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_k)\lambda_k = (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{v}). \end{cases}$$

Доказательство.

Запишем $\boldsymbol{v} = \mathrm{pr}_W \boldsymbol{v} + \mathrm{ort}_W \boldsymbol{v}$. Тогда вектор $\mathrm{ort}_W \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 - \ldots - \lambda_k \boldsymbol{a}_k$ ортогонален каждому из векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. Взяв скалярное произведение $\boldsymbol{a}_i$ с $\mathrm{ort}_W \boldsymbol{v}$, мы получаем $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{v} - \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 - \ldots - \lambda_k \boldsymbol{a}_k) = 0$, что эквивалентно i-му уравнению системы. □

Определение

Пусть V — евклидово пространство. Углом между ненулевым вектором $\boldsymbol{v} \in V$ и подпространством $W \subset V$ называется точная нижняя грань углов между $\boldsymbol{v}$ и произвольным вектором $\boldsymbol{w} \in W$:

$$\angle(\boldsymbol{v}, W) := \inf_{\boldsymbol{w} \in W} \angle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}).$$

Точная нижняя грань $\inf_{\boldsymbol{w} \in W} \angle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ существует, так как множество углов $\angle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ ограничено снизу нулём.

На самом деле точная нижняя грань достигается на векторе $\boldsymbol{w} = \mathrm{pr}_W \boldsymbol{v}$, как показано в следующем утверждении.

Предложение

Угол между вектором и подпространством равен углу между вектором и его проекцией на это подпространство:

$$\angle(\boldsymbol{v}, W) = \angle(\boldsymbol{v}, \mathrm{pr}_W \boldsymbol{v}).$$

Доказательство.

Пусть $\boldsymbol{w} \in W$ — произвольный ненулевой вектор. Обозначим $\alpha = \angle(\boldsymbol{v}, \mathrm{pr}_W \boldsymbol{v})$, $\beta = \angle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ и $\boldsymbol{v}_1 = \mathrm{pr}_W \boldsymbol{v}$. Необходимо показать, что $\alpha \leqslant \beta$. Так как $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \pi$, неравенство $\alpha \leqslant \beta$ эквивалентно неравенству $\cos\alpha \geqslant \cos\beta$, т. е.

$$\frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1)}{|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{v}_1|} \geqslant \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})}{|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{w}|}. \qquad (1)$$

Запишем $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, где $\boldsymbol{v}_2 = \mathrm{ort}_W \boldsymbol{v} \in W^{\perp}$. Тогда $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) = |\boldsymbol{v}_1|^2$ и $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w})$. Подставив это в (1), получим $|\boldsymbol{v}_1| \geqslant \frac{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w})}{|\boldsymbol{w}|}$, что вытекает из неравенства Коши–Буняковского. □

3.6. Аффинные евклидовы пространства. Расстояния

Определение

Аффинное пространство $(\mathfrak{A}, V)$ называется **евклидовым**, если линейное пространство V является евклидовым.

Расстоянием между точками P и Q аффинного евклидова пространства $(\mathfrak{A}, V)$ называется длина вектора $\overline{PQ}$:

$$d(P, Q) := |\overline{PQ}|.$$

Расстоянием между точкой P и аффинным подпространством $(\mathfrak{B}, W)$ называется точная нижняя грань расстояний между P и произвольной точкой $Q \in \mathfrak{B}$:

$$d(P, \mathfrak{B}) := \inf_{Q \in \mathfrak{B}} d(P, Q).$$

Расстоянием между аффинными подпространствами $(\mathfrak{C}, U)$ и $(\mathfrak{B}, W)$ называется точная нижняя грань расстояний между точками $P \in \mathfrak{C}$ и $Q \in \mathfrak{B}$:

$$d(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}) := \inf_{P \in \mathfrak{C},\, Q \in \mathfrak{B}} d(P, Q).$$

Следующее утверждение обобщает утверждения о расстоянии между точкой и прямой или плоскостью из аналитической геометрии.

Теорема

Расстояние между точкой P и аффинным подпространством $(\mathfrak{B}, W)$ равно длине ортогональной составляющей вектора $\overline{PQ}$, соединяющего P с произвольной точкой $Q \in \mathfrak{B}$, относительно пространства W:

$$d(P, \mathfrak{B}) = |\operatorname{ort}_W \overline{PQ}| \qquad \text{для любой точки } Q \in \mathfrak{B}.$$

Доказательство

Вначале мы докажем, что ортогональная составляющая $\mathrm{ort}_W \overline{PQ}$ не зависит от выбора точки $Q \in \mathfrak{B}$. Пусть $Q' \in \mathfrak{B}$ — другая точка. Мы имеем $\overline{PQ} = \mathrm{pr}_W \overline{PQ} + \mathrm{ort}_W \overline{PQ}$ и $\overline{PQ'} = \mathrm{pr}_W \overline{PQ'} + \mathrm{ort}_W \overline{PQ'}$. С другой стороны, $\overline{PQ'} = \overline{PQ} + \overline{QQ'}$, где $\overline{QQ'} \in W$. Тогда

$$\overline{PQ'} = \underbrace{\mathrm{pr}_W \overline{PQ'}}_{\in W} + \underbrace{\mathrm{ort}_W \overline{PQ'}}_{\in W^\perp} = \overline{QQ'} + \overline{PQ} = \underbrace{\overline{QQ'} + \mathrm{pr}_W \overline{PQ}}_{\in W} + \underbrace{\mathrm{ort}_W \overline{PQ}}_{\in W^\perp}.$$

Отсюда в силу единственности разложения вектора в прямой сумме $V = W \oplus W^\perp$ получаем $\mathrm{ort}_W \overline{PQ'} = \mathrm{ort}_W \overline{PQ}$, что и требовалось.

Доказательство (продолжение)

Теперь докажем, что для любой точки $Q \in \mathfrak{B}$ мы имеем $|\overline{PQ}| \geqslant |\operatorname{ort}_W \overline{PQ}|$. Действительно,

$$|\overline{PQ}|^2 = (\overline{PQ}, \overline{PQ}) = (\operatorname{pr}_W \overline{PQ} + \operatorname{ort}_W \overline{PQ}, \operatorname{pr}_W \overline{PQ} + \operatorname{ort}_W \overline{PQ}) =$$
$$= (\operatorname{pr}_W \overline{PQ}, \operatorname{pr}_W \overline{PQ}) + (\operatorname{ort}_W \overline{PQ}, \operatorname{ort}_W \overline{PQ}) =$$
$$= |\operatorname{pr}_W \overline{PQ}|^2 + |\operatorname{ort}_W \overline{PQ}|^2 \geqslant |\operatorname{ort}_W \overline{PQ}|^2,$$

где в предпоследнем равенстве мы воспользовались тем, что $(\operatorname{pr}_W \overline{PQ}, \operatorname{ort}_W \overline{PQ}) = 0$. Следовательно, $d(P, \mathfrak{B}) = \inf_{Q \in \mathfrak{B}} |\overline{PQ}| \geqslant |\operatorname{ort}_W \overline{PQ}|$.

Доказательство (окончание).

Осталось доказать, что значение $|\operatorname{ort}_W \overline{PQ}|$ достигается, т. е. $|\overline{PQ'}| = |\operatorname{ort}_W \overline{PQ}|$ для некоторой точки $Q' \in \mathfrak{B}$. Для этого возьмём в качестве Q' точку $P + \operatorname{ort}_W \overline{PQ}$. Тогда, по определению расстояния, $|\overline{PQ'}| = |\operatorname{ort}_W \overline{PQ}|$. С другой стороны,

$$Q' = P + \operatorname{ort}_W \overline{PQ} = P + \overline{PQ} - \operatorname{pr}_W \overline{PQ} = Q - \operatorname{pr}_W \overline{PQ},$$

где $Q \in \mathfrak{B}$ и $\operatorname{pr}_W \overline{PQ} \in W$, т. е. $Q' \in \mathfrak{B}$. □

В аналитической геометрии расстояние между скрещивающимися прямыми в пространстве вычислялось как длина их общего перпендикуляра. Аналогичным образом вычисляется расстояние между аффинными подпространствами в общем случае, как показывает следующая теорема.

Теорема

Расстояние между двумя аффинными подпространствами $(\mathfrak{C}, U)$ *и* $(\mathfrak{B}, W)$ *равно длине ортогональной составляющей вектора* $\overline{PQ}$*, соединяющего произвольную точку* $P \in \mathfrak{C}$ *с произвольной точкой* $Q \in \mathfrak{B}$*, относительно пространства* $U + W$*:*

$$d(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}) = |\operatorname{ort}_{U+W} \overline{PQ}| \qquad \text{для любых точек } P \in \mathfrak{C},\ Q \in \mathfrak{B}.$$

Доказательство

Доказательство аналогично предыдущему. Вначале докажем, что ортогональная составляющая $\operatorname{ort}_{U+W}\overline{PQ}$ не зависит от выбора точек $P\in\mathfrak{C}$, $Q\in\mathfrak{B}$. Пусть $P'\in\mathfrak{C}$, $Q'\in\mathfrak{B}$ — другие точки. Мы имеем $\overline{PQ}=\operatorname{pr}_{U+W}\overline{PQ}+\operatorname{ort}_{U+W}\overline{PQ}$ и $\overline{P'Q'}=\operatorname{pr}_{U+W}\overline{P'Q'}+\operatorname{ort}_{U+W}\overline{P'Q'}$. С другой стороны, $\overline{P'Q'}=\overline{P'P}+\overline{PQ}+\overline{QQ'}$, где $\overline{P'P}\in U$ и $\overline{QQ'}\in W$. Тогда

$$\overline{P'Q'}=\underbrace{\operatorname{pr}_{U+W}\overline{P'Q'}}_{\in U+W}+\underbrace{\operatorname{ort}_{U+W}\overline{P'Q'}}_{\in(U+W)^\perp}=$$

$$=\underbrace{\overline{P'P}+\overline{QQ'}+\operatorname{pr}_{U+W}\overline{PQ}}_{\in U+W}+\underbrace{\operatorname{ort}_{U+W}\overline{PQ}}_{\in(U+W)^\perp}.$$

Отсюда в силу единственности разложения вектора в прямой сумме получаем $\operatorname{ort}_{U+W}\overline{P'Q'}=\operatorname{ort}_{U+W}\overline{PQ}$, что и требовалось.

Доказательство (продолжение).

Так же, как в предыдущей теореме, доказывается, что для $P \in \mathfrak{C}$ и $Q \in \mathfrak{B}$ мы имеем $|\overline{PQ}| \geqslant |\operatorname{ort}_{U+W} \overline{PQ}|$. Следовательно,

$$d(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}) = \inf_{P \in \mathfrak{C},\, Q \in \mathfrak{B}} |\overline{PQ}| \geqslant |\operatorname{ort}_{U+W} \overline{PQ}|.$$

Осталось доказать, что значение $|\operatorname{ort}_{U+W} \overline{PQ}|$ достигается в некоторой паре точек, т. е. $|\overline{P'Q'}| = |\operatorname{ort}_{U+W} \overline{PQ}|$ для некоторых точек $P' \in \mathfrak{C}$, $Q' \in \mathfrak{B}$. Запишем вектор $\operatorname{pr}_{U+W} \overline{PQ} \in U + W$ в виде суммы:

$$\operatorname{pr}_{U+W} \overline{PQ} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w},$$

где $\boldsymbol{u} \in U$ и $\boldsymbol{w} \in W$. Теперь возьмём $P' = P + \boldsymbol{u}$, тогда очевидно $P' \in (\mathfrak{C}, U)$. Далее, возьмём $Q' = P' + \operatorname{ort}_{U+W} \overline{PQ}$. Тогда, по определению расстояния, $|\overline{P'Q'}| = |\operatorname{ort}_{U+W} \overline{PQ}|$. С другой стороны,

$$Q' = P' + \operatorname{ort}_{U+W} \overline{PQ} = P + \boldsymbol{u} + \overline{PQ} - \operatorname{pr}_{U+W} \overline{PQ} = Q - \boldsymbol{w},$$

где $Q \in \mathfrak{B}$ и $\boldsymbol{w} \in W$, т. е. $Q' \in (\mathfrak{B}, W)$. $\square$

Если $d(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}) \neq 0$, то точки P' и Q', найденные в предыдущем доказательстве, различны. Прямая, содержащая P' и Q', перпендикулярна каждому из подпространств $(\mathfrak{C}, U)$ и $(\mathfrak{B}, W)$ и называется их общим перпендикуляром.

Такая прямая единственна тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ в разложении $\mathrm{pr}_{U+W} \overline{PQ} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$ определены однозначно, т. е. когда $U \cap W = \{0\}$. Например, это так в случае скрещивающихся прямых в 3-мерном пространстве.