Линейная алгебра и геометрия

Лекция 14

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.
Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

30 марта 2021 г.

Теорема (неравенство Коши–Буняковского)

Для любых двух векторов $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ евклидова или эрмитова пространства имеет место неравенство

$$|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leqslant |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|,$$

причем равенство имеет место только в случае, когда векторы $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ коллинеарны.

Доказательство.

Если $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, утверждение очевидно. Пусть $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$. Запишем $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, где $\boldsymbol{v}_1 = \mathrm{pr}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}_2 = \mathrm{ort}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v}$. Тогда $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = 0$, и

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{v}|^2 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \\ = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) + (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) + (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) + (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2) = |\boldsymbol{v}_1|^2 + |\boldsymbol{v}_2|^2.\end{aligned}$$

Отсюда $|\boldsymbol{v}_1| \leqslant |\boldsymbol{v}|$, причём равенство достигается только при $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$, т. е. когда вектор $\boldsymbol{v}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{u}$. Осталось заметить, что $|\boldsymbol{v}_1| = |\,\mathrm{pr}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v}| = \frac{|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})|}{|\boldsymbol{u}|}$, так что неравенство $|\boldsymbol{v}_1| \leqslant |\boldsymbol{v}|$ эквивалентно требуемому. □

Определение

Углом между двумя ненулевыми векторами $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ евклидова пространства называется величина

$$\angle(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \arccos \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|} \in [0, \pi].$$

Неравенство Коши–Буняковского гарантирует, что угол между ненулевыми векторами всегда определен.

Следствие (неравенство треугольника)

Для любых двух векторов $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ евклидова или эрмитова пространства выполнено неравенство

$$|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}| \leqslant |\boldsymbol{u}|+|\boldsymbol{v}|.$$

Доказательство.

В обеих частях неравенства стоят неотрицательные величины, поэтому при возведении в квадрат получается равносильное неравенство

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \leqslant (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})+(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})+2|\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|.$$

После раскрытия скобок в левой части и сокращения подобных членов мы получаем следующее неравенство:

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})+(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \leqslant 2|\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|,$$

которое следует из неравенства Коши–Буняковского. □

3.3. Ортогональные системы векторов.

Предложение

Пусть $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ *— набор попарно ортогональных ненулевых векторов. Тогда эти векторы линейно независимы.*

Доказательство.

Пусть некоторая линейная комбинация данных векторов равна нулю: $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$. Умножим обе части этого равенства скалярно на $\boldsymbol{v}_j$ и воспользуемся линейностью скалярного произведения по второму аргументу:

$$0 = \Bigl(\boldsymbol{v}_j, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{v}_i\Bigr) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i) = \lambda_j (\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_j),$$

так как по условию остальные слагаемые в этой сумме равны нулю. Поскольку $\boldsymbol{v}_j \neq \boldsymbol{0}$, из положительной определенности скалярного произведения следует, что $(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_j) \neq 0$, а значит, $\lambda_j = 0$. Это выполнено для любого $j = 1, \ldots, k$, следовательно, линейная комбинация $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ тривиальна. $\square$

Определение

Базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ евклидова или эрмитова пространства называется ортогональным, если его векторы попарно ортогональны.
Если при этом длина каждого вектора равна 1, то базис называется ортонормированным.

Теорема

Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ — набор линейно независимых векторов пространства V. Тогда существует такой набор попарно ортогональных векторов $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$, что для каждого $i = 1, \ldots, k$ линейная оболочка $\langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_i \rangle$ совпадает с $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i \rangle$.

Доказательство

При $k = 1$ утверждение очевидно: можно взять $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$.
Предположим, что утверждение верно для наборов из i векторов, и докажем его для наборов из $i + 1$ вектора.

Доказательство (продолжение)

Пусть $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_i$ — ортогональный набор, построенный по набору $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i$. Мы хотим, чтобы для нового вектора $\boldsymbol{b}_{i+1}$ линейная оболочка $\langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_{i+1} \rangle$ совпадала с $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1} \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{a}_{i+1} \rangle$, и поэтому будем искать $\boldsymbol{b}_{i+1}$ в виде

$$\boldsymbol{b}_{i+1} = \boldsymbol{a}_{i+1} + \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \lambda_i \boldsymbol{b}_i.$$

Коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ будем подбирать так, чтобы вектор $\boldsymbol{b}_{i+1}$ был ортогонален всем предыдущим векторам $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_i$. Умножив скалярно предыдущее равенство слева на $\boldsymbol{b}_j$ и использовав то, что $(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_\ell) = 0$ при $j \neq \ell$, получаем

$$0 = (\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_{i+1}) = (\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{a}_{i+1}) + \lambda_j (\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_j),$$

откуда $\lambda_j = -\frac{(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{a}_{i+1})}{(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_j)}$ для $j = 1, \ldots, i$.

Доказательство (окончание).

Окончательно для вектора $\boldsymbol{b}_{i+1}$ получаем

$$\boldsymbol{b}_{i+1} = \boldsymbol{a}_{i+1} - \frac{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_{i+1})}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_{i+1})}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 - \ldots - \frac{(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{a}_{i+1})}{(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i)}\boldsymbol{b}_i =$$
$$= \boldsymbol{a}_{i+1} - \mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}_1}\boldsymbol{a}_{i+1} - \mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}_2}\boldsymbol{a}_{i+1} - \ldots - \mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}_i}\boldsymbol{a}_{i+1}.$$

При этом $\boldsymbol{b}_{i+1} \neq \boldsymbol{0}$ (так как $\boldsymbol{b}_1 \ldots, \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}$ линейно независимы), $\boldsymbol{b}_{i+1}$ ортогонален векторам $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_i$, а
$\langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_{i+1}\rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}\rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}\rangle$. $\square$

Индуктивная процедура перехода от набора $\boldsymbol{a}_1 \ldots, \boldsymbol{a}_k$ к ортогональному набору $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ называется процессом ортогонализации Грама–Шмидта.

Условие $\langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_i\rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i\rangle$ при $i = 1, \ldots, k$ означает, что матрица перехода от $\boldsymbol{a}_1 \ldots, \boldsymbol{a}_k$ к $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ является *верхнетреугольной*.

Следствие

В евклидовом или эрмитовом пространстве V существуют ортонормированные базисы.

Доказательство.

Действительно, возьмём произвольный базис пространства V и применим к нему ортогонализацию Грама–Шмидта. В результате получим ортогональный базис $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$. Тогда базис, состоящий из векторов $\frac{\boldsymbol{b}_1}{|\boldsymbol{b}_1|}, \ldots, \frac{\boldsymbol{b}_n}{|\boldsymbol{b}_n|}$ будет ортонормированным. □

Предложение

Пусть векторы $\boldsymbol{u}$ *и* $\boldsymbol{v}$ *имеют координаты* $u^1, \ldots, u^n$ *и* $v^1, \ldots, v^n$ *в некотором ортонормированном базисе евклидова или эрмитова пространства* V*. Тогда их скалярное произведение вычисляется по формуле*

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \bar{u}^1 v^1 + \bar{u}^2 v^2 + \ldots + \bar{u}^n v^n.$$

Доказательство.

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — ортонормированный базис. Тогда $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (u^i \boldsymbol{e}_i, v^j \boldsymbol{e}_j) = \bar{u}^i v^j (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \bar{u}^i v^j \delta_{ij} = \bar{u}^1 v^1 + \bar{u}^2 v^2 + \ldots + \bar{u}^n v^n$. $\square$

3.4. Ортогональные и унитарные матрицы. QR-разложение

Определение

Матрица перехода от одного ортонормированного базиса евклидова (соответственно, эрмитова) пространства к другому ортонормированному базису называется *ортогональной* (соответственно, *унитарной*).

Предложение

Следующие условия эквивалентны:

а) *матрица C ортогональна (соответственно, унитарна);*

б) $C^tC = E$ *(соответственно,* $\overline{C}^tC = E$*);*

в) *столбцы матрицы C образуют ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^n$ (соответственно, пространства $\mathbb{C}^n$);*

г) $CC^t = E$ *(соответственно,* $\overline{C}C^t = E$*);*

д) *строки матрицы C образуют ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^n$ (соответственно, пространства $\mathbb{C}^n$).*

Доказательство

Условия б) и г) эквивалентны, так как каждое из них эквивалентно равенству $C^t = C^{-1}$ (соответственно, $\overline{C}^t = C^{-1}$).

Эквивалентности б)$\Leftrightarrow$в) и г)$\Leftrightarrow$д) вытекают из правила умножения матриц и формул для стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$.

Доказательство (продолжение).

Докажем а)$\Rightarrow$б). Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$ — ортонормированные базисы в эрмитовом пространстве и $C = (c^i_{i'})$ — матрица перехода, т. е. $\boldsymbol{e}_{i'} = c^i_{i'}\boldsymbol{e}_i$. Тогда $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ и $(\boldsymbol{e}_{i'}, \boldsymbol{e}_{j'}) = \delta_{i'j'}$, откуда

$$\delta_{i'j'} = (\boldsymbol{e}_{i'}, \boldsymbol{e}_{j'}) = (c^i_{i'}\boldsymbol{e}_i, c^j_{j'}\boldsymbol{e}_j) = \overline{c}^i_{i'}c^j_{j'}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \overline{c}^i_{i'}c^j_{j'}\delta_{ij} = \overline{c}^i_{i'}\delta_{ij}c^j_{j'}. \quad (1)$$

Согласно правилу умножения матриц, это эквивалентно матричному соотношению $E = \overline{C}^t EC$ или $\overline{C}^t C = E$. Случай евклидова пространства рассматривается аналогично.

Осталось доказать б)$\Rightarrow$а). Пусть $\overline{C}^t C = E$ или, в обозначениях Эйнштейна, $\overline{c}^i_{i'}\delta_{ij}c^j_{j'} = \delta_{i'j'}$. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — ортонормированный базис. Из $\overline{C}^t C = E$ следует, что матрица C невырождена, и поэтому можно рассмотреть новый базис $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$, где $\boldsymbol{e}_{i'} = c^i_{i'}\boldsymbol{e}_i$. Тогда аналогично (1) получаем $(\boldsymbol{e}_{i'}, \boldsymbol{e}_{j'}) = \overline{c}^i_{i'}\delta_{ij}c^j_{j'} = \delta_{i'j'}$, т. е. базис $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$ также ортонормирован, и C — матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому. $\square$

Теорема (QR-разложение)

Для любой невырожденной вещественной (соответственно, комплексной) матрицы A имеет место разложение

$$A = QR,$$

где Q — ортогональная (соответственно, унитарная) матрица, а R — верхнетреугольная матрица с положительными числами на диагонали.

Доказательство.

Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ — базис пространства $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$), состоящий из столбцов матрицы A. Применив к нему ортогонализацию Грама–Шмидта, получим ортогональный базис $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$. Пусть C — матрица перехода, т. е.

$$(\boldsymbol{b}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_n) = (\boldsymbol{a}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{a}_n)\, C$$

или $B = AC$, где B — матрица, столбцы которой суть $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$. При этом матрица C — верхнетреугольная с единицами на диагонали (это следует из соотношений процесса ортогонализации). При переходе от ортогонального базиса $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ к ортонормированному базису $\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_n$, где $\boldsymbol{b}'_i = \frac{\boldsymbol{b}_i}{|\boldsymbol{b}_i|}$, мы получаем $B = B'D$, где $B' = (\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_n)$ — ортогональная матрица, а D — диагональная матрица с числами $|\boldsymbol{b}_i|$ на диагонали.

Из соотношений $B = AC$ и $B = B'D$ мы получаем $A = B'DC^{-1}$. Тогда положив $Q = B'$ и $R = DC^{-1}$, мы получим требуемое разложение $A = QR$, так как R — верхнетреугольная матрица, на диагонали которой стоят положительные числа $|\boldsymbol{b}_i|$. □

QR-разложение имеет место также и для вырожденных матриц A (при этом на диагонали R могут стоять нули), а также для прямоугольных матриц A произвольного размера (задача).