Линейная алгебра и геометрия

Лекция 13

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

26 марта 2021 г.

3.1. Аффинные пространства, системы координат, подпространства

В геометрии на плоскости или в пространстве рассматриваются точки и векторы. Для формализации этих понятий и взаимосвязей между ними служит понятие аффинного пространства.

Определение

Аффинным пространством называется пара $(\mathfrak{A}, V)$, состоящая из множества $\mathfrak{A}$, элементы которого называются точками, и векторного пространства V над полем $\mathbf{k}$, с дополнительной операцией сложения

$$+ \colon \mathfrak{A} \times V \to \mathfrak{A}, \quad (P, \boldsymbol{v}) \mapsto P + \boldsymbol{v}$$

для $P \in \mathfrak{A}$ и $\boldsymbol{v} \in V$. (Говоря неформально к точке P можно «приложить» вектор $\boldsymbol{v}$ и тогда его «конец» — это точка $P + \boldsymbol{v}$.)
При этом требуется, чтобы операция сложения точек и векторов удовлетворяла следующим условиям:

1) $P + \mathbf{0} = P$ для любой точки $P \in \mathfrak{A}$;
2) $(P + \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{v} = P + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$ для любых $P \in \mathfrak{A}$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$;
3) для любых $P, Q \in \mathfrak{A}$ существует единственный вектор $\boldsymbol{v} \in V$, такой, что $P + \boldsymbol{v} = Q$.

Часто аффинным пространством называют просто множество точек $\mathfrak{A}$ из определения выше (особенно когда из контекста понятно, какое векторное пространство V имеется ввиду). Вектор $\boldsymbol{v}$, однозначно сопоставляемый паре точек $P, Q \in \mathfrak{A}$ в силу свойства 3), обозначается $\overline{PQ}$. Тогда из свойства 2) вытекает, что $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$.

Свойства 1)–2) из определения аффинного пространства означают, что на множестве $\mathfrak{A}$ задано действие абелевой группы векторов пространства V. Свойство 3) по определению означает, что это действие свободно и транзитивно. Множество, на котором задано свободное и транзитивное действие группы G, называется главным однородным пространством группы G. Таким образом, аффинное пространство $\mathfrak{A}$ — это главное однородное пространство абелевой группы V.

Пример

1. Точки плоскости и (трёхмерного) пространства образуют аффинные пространства. Заметим, что точки «не помнят» начала координат: все точки на плоскости или в пространстве равноправны, пока мы не ввели там систему координат.

2. Рассмотрим совместную неоднородную систему линейных уравнений $Ax = b$, где A — матрица, а x и b — столбцы. Пусть $\mathfrak{A}$ — множество решений x этой системы, а V — векторное пространство решений y однородной системы $Ay = 0$. Тогда $(\mathfrak{A}, V)$ — аффинное пространство. Действительно, если $x \in \mathfrak{A}$ и $y \in V$, то $A(x+y) = Ax + Ay = b$ и поэтому $x + y \in \mathfrak{A}$.

3. Из всякого векторного пространства V можно получить аффинное пространство, взяв в качестве $\mathfrak{A}$ множество векторов V; при этом сложение точек и векторов — это просто сложение векторов в исходном пространстве V. Аффинное пространство, получаемое при помощи этой процедуры из $\mathbb{R}^n$, мы будем обозначать через $\mathbb{A}^n$.

Определение

Аффинной системой координат (или **репером**) в аффинном пространстве $(\mathfrak{A}, V)$ называется набор $(O, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, состоящий из точки $O \in \mathfrak{A}$, называемой **началом координат**, и базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в векторном пространстве V.

Координатами точки $P \in \mathfrak{A}$ в системе координат $(O, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ называются координаты $x^1, \ldots, x^n$ вектора $\overline{OP}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, т. е.

$$\overline{OP} = x^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x^n\boldsymbol{e}_n.$$

Определение

Аффинным подпространством в аффинном пространстве $(\mathfrak{A}, V)$ называется пара $(\mathfrak{B}, W)$, состоящая из подмножества $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ и векторного подпространства $W \subset V$, такая, что $(\mathfrak{B}, W)$ является аффинным пространством относительно операций в $(\mathfrak{A}, V)$.

Эквивалентно, $(\mathfrak{B}, W)$ называется аффинным подпространством в $(\mathfrak{A}, V)$, если

1) для любых $P \in \mathfrak{B}$ и $\boldsymbol{w} \in W$ точка $P + \boldsymbol{w}$ лежит в $\mathfrak{B}$;
2) для любых $P, Q \in \mathfrak{B}$ вектор $\overline{PQ}$ лежит в W.

Пример

Аффинные подпространства $(\mathfrak{B}, W)$ в $\mathbb{A}^n$ можно задавать двумя способами:

а) репером, т. е. точкой $P \in \mathfrak{B}$ и базисом $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_k$ векторного пространства $W \subset \mathbb{R}^n$. При этом любая другая точка $P' \in \mathfrak{B}$ представляется в виде $P' = P + x^1 \boldsymbol{f}_1 + \ldots + x^k \boldsymbol{f}_k$. Для такого способа задания используется обозначение

$$\mathfrak{B} = P + \langle \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_k \rangle.$$

б) как множество решений совместной неоднородной системы уравнений:

$$\mathfrak{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax = b\}.$$

При этом W — это пространство решений однородной системы $Ax = 0$.

Первый способ обобщает параметрическое задание прямых и плоскостей. Второй способ обобщает задание прямых и плоскостей уравнениями.

Переход от второго способа задания подпространства к первому заключается в решении неоднородной системы $Ax = b$: точка P — это частное решение, а набор $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_k$ — это фундаментальная система решений однородной системы $Ax = 0$.

Для перехода от первого способа задания подпространства ко второму необходимо задать линейную оболочку $\langle \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_k \rangle$ однородной системой $Ax = 0$; тогда столбец b правых частей неоднородной системы $Ax = b$ получается при подстановке координат точки P в уравнения системы $Ax = 0$.

3.2. Евклидовы и эрмитовы пространства

Определение

Линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ называется **евклидовым**, если на парах его векторов определена функция $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$ (обозначаемая $(a, b) := f(a, b)$ и называемая **скалярным произведением**), удовлетворяющая следующим свойствам:

1) **билинейность**, т. е.

$$(\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) = \lambda_1(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) + \lambda_2(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) \quad \text{и}$$
$$(\boldsymbol{u}, \mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2) = \mu_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1) + \mu_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2)$$

   для любых $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ и $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$;

2) **симметричность**: $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ для любых $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$;

3) **положительная определённость**: $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geqslant 0$ для любого $\boldsymbol{v} \in V$, причём $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$ только при $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

Свойство билинейности выражает линейность скалярного произведения по каждому из аргументов. Ввиду наличия свойства симметричности, билинейность очевидно вытекает из линейности по любому из двух аргументов.

В комплексном пространстве скалярное произведение не может быть одновременно билинейным и положительно определённым. Действительно, если (v, v) — положительное вещественное число, то $(iv, iv) = i^2(v, v) = -(v, v)$ — отрицательно.

Естественное определение скалярного произведения в комплексном пространстве заключается в следующем.

Определение

Линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ называется эрмитовым (или унитарным), если на парах его векторов определена функция $f\colon V \times V \to \mathbb{C}$ (обозначаемая $(a, b) := f(a, b)$ и называемая скалярным произведением), удовлетворяющая следующим свойствам:

1) полуторалинейность, т. е.
$$(\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) = \overline{\lambda}_1(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) + \overline{\lambda}_2(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) \quad \text{и}$$
$$(\boldsymbol{u}, \mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2) = \mu_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1) + \mu_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2)$$
для любых $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ и $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$;
2) эрмитовость: $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \overline{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}$ для любых $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$; в частности, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ вещественно для любого $\boldsymbol{v} \in V$.
3) положительная определённость: $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geqslant 0$ для любого $\boldsymbol{v} \in V$, причём $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$ только при $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

Свойство полуторалинейности выражает линейность скалярного произведения по второму аргументу и антилинейность по первому.

Пример

1. Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{u} = (u^1, \ldots, u^n)$ и $\boldsymbol{v} = (v^1, \ldots, v^n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ можно задать формулой

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := u^1 v^1 + u^2 v^2 + \ldots + u^n v^n,$$

а скалярное произведение векторов в $\mathbb{C}^n$ — формулой

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \overline{u^1} v^1 + \overline{u^2} v^2 + \ldots + \overline{u^n} v^n.$$

Это называется стандартным скалярным произведением.

2. Скалярное произведение в пространстве $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n, n)$ квадратных комплексных матриц размера n задаётся с помощью формулы

$$(A, B) := \mathrm{Tr}(\overline{A}^t B) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{a_{ij}} b_{ij}.$$

При отождествлении пространства $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n, n)$ с $\mathbb{C}^{n^2}$ это скалярное произведение переходит в стандартное скалярное произведение из предыдущего примера.

Пример

3. Рассмотрим пространство $C[a, b]$ вещественнозначных функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Зададим скалярное произведение функций f и g по формуле

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Тогда свойства 1) и 2) скалярного произведения очевидны, а 3) вытекает из того, что интеграл $\int_a^b f^2(x)dx$ от неотрицательной непрерывной функции $f^2(x)$ неотрицателен и обращается в нуль только при $f(x) \equiv 0$.

Аналогично, скалярное произведение в пространстве комплекснозначных функций можно определить по формуле

$$(f, g) := \int_a^b \overline{f(x)}g(x)dx.$$

Определение

Пусть V — евклидово или эрмитово пространство. Для $\boldsymbol{v} \in V$ величина $\sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}$ называется **длиной** вектора $\boldsymbol{v}$ и обозначается $|\boldsymbol{v}|$.

Векторы $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, скалярное произведение которых равно нулю, называются **перпендикулярными** или **ортогональными**. В этом случае пишут $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

Предложение

Пусть $\boldsymbol{u}$ — ненулевой вектор евклидова или эрмитова пространства V. Тогда для любого вектора $\boldsymbol{v} \in V$ существует единственное разложение $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, где вектор $\boldsymbol{v}_1$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{u}$, а вектор $\boldsymbol{v}_2$ ортогонален $\boldsymbol{u}$.

Доказательство.

Сначала докажем единственность. Пусть $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ — такое разложение. Тогда для некоторого числа λ имеем $\boldsymbol{v}_1 = \lambda\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v} - \lambda\boldsymbol{u}$. Условие $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}_2$ влечёт

$$\boldsymbol{0} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \lambda\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - \lambda(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}).$$

Отсюда $\lambda = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})/(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ и

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}\boldsymbol{u}.$$

Тем самым векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1$ определены однозначно. С другой стороны, определив $\boldsymbol{v}_1$ по этой формуле, мы получим $\boldsymbol{v}_2 = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1) \perp \boldsymbol{u}$. □

Определение

Вектор $\frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}\boldsymbol{u}$ называется ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{v}$ на направление вектора $\boldsymbol{u}$ и обозначается $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{v}$, а вектор $\boldsymbol{v}-\mathrm{pr}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{v}$ называется ортогональной составляющей вектора $\boldsymbol{v}$ относительно $\boldsymbol{u}$ и обозначается $\mathrm{ort}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{v}$.

Таким образом, мы имеем $\boldsymbol{v}=\mathrm{pr}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{v}+\mathrm{ort}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{v}$.

Длина ортогональной проекции вычисляется по формуле

$$|\mathrm{pr}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{v}|=\sqrt{(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{v},\mathrm{pr}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{v})}=\sqrt{\left(\frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}\boldsymbol{u},\frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}\boldsymbol{u}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{\overline{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}}=\frac{|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|}{|\boldsymbol{u}|}.$$