Линейная алгебра и геометрия

Лекция 11

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

19 марта 2021 г.

2.9. Корневые векторы. Теорема о разложении в прямую сумму корневых подпространств

Если оператор $\mathcal{A}$ в комплексном пространстве имеет всего одно собственное значение λ, то его характеристический многочлен имеет вид $(-1)^n(t-\lambda)^n$, а значит $(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathrm{id})^n=0$ по теореме Гамильтона–Кэли. Следовательно, оператор $\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathrm{id}$ нильпотентен и к нему можно применить теорему из предыдущей лекции.

В случае, когда имеется более одного различного собственного значения λ, соответствующие операторы $\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathrm{id}$ не будут нильпотентными.

Определение

Вектор $\boldsymbol{v}\in V$ называется **корневым вектором** оператора $\mathcal{A}$, отвечающим числу $\lambda\in\mathbf{k}$, если существует такое m, что $(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathrm{id})^m\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$.

Обозначим через R_λ множество всех корневых векторов, отвечающих λ.

Предложение

R_λ является подпространством в V.

Доказательство.

Пусть $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in R_\lambda$, т. е. $(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})^l \boldsymbol{u} = (\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})^m \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ для некоторых l, m. Тогда $(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})^l (\mu \boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ для любого $\mu \in \mathbf{k}$.
Положим $p = \max\{l, m\}$. Тогда $(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})^p (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$, т. е. R_λ — действительно подпространство. □

Подпространство $R_\lambda \subset V$ называется корневым подпространством для оператора $\mathcal{A}$, отвечающим λ.

Предложение

Подпространство R_λ нетривиально тогда и только тогда, когда λ — собственное значение оператора $\mathcal{A}$. При этом $V_\lambda \subset R_\lambda$, т. е. корневое подпространство содержит собственное подпространство.

Доказательство.

Действительно, если λ — собственное значение, то существует ненулевой вектор $\boldsymbol{v}$, для которого $(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, т. е. $\boldsymbol{v} \in R_\lambda$ и R_λ нетривиально. Отсюда также следует, что $V_\lambda \subset R_\lambda$.

Обратно, пусть R_λ содержит ненулевой вектор $\boldsymbol{u}$, для которого $(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})^m \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, причём m минимально, т. е. $\boldsymbol{v} := (\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})^{m-1} \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$. Тогда имеем $(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})\boldsymbol{v} = (\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})^m \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, т. е. $\boldsymbol{v}$ — собственный вектор, отвечающий λ. □

Далее будем рассматривать только нетривиальные корневые подпространства R_λ.

Теорема (о корневом разложении)

Пусть $\mathcal{A}$ — оператор в пространстве V над алгебраически замкнутым полем, и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — все собственные значения оператора $\mathcal{A}$. Тогда V является прямой суммой всех корневых подпространств, т. е.

$$V = R_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus R_{\lambda_k}.$$

Доказательство теоремы будет опираться на три леммы.

Лемма 1

Подпространство R_λ инвариантно относительно любого оператора $\mathcal{A} - \mu \cdot \mathrm{id}$, $\mu \in \mathbf{k}$ (в частности, R_λ инвариантно относительно $\mathcal{A}$). Ограничение

$$(\mathcal{A} - \mu \cdot \mathrm{id})|_{R_\lambda} \colon R_\lambda \to R_\lambda$$

при $\lambda \neq \mu$ является обратимым, а при $\lambda = \mu$ — нильпотентным оператором.

Доказательство

Пусть $\boldsymbol{v} \in R_\lambda$, т. е. $(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})^m \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Тогда

$$(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})^m (\mathcal{A} - \mu \cdot \mathrm{id}) \boldsymbol{v} = (\mathcal{A} - \mu \cdot \mathrm{id})(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})^m \boldsymbol{v} = \mathbf{0},$$

так как $(\mathcal{A} - \mu \cdot \mathrm{id})$ и $(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})^m$ являются многочленами от оператора $\mathcal{A}$, а любые два многочлена от оператора коммутируют. Итак, R_λ является $(\mathcal{A} - \mu \cdot \mathrm{id})$-инвариантным подпространством, и мы можем рассмотреть ограничение $(\mathcal{A} - \mu \cdot \mathrm{id})|_{R_\lambda}$.

Доказательство (продолжение).

Пусть $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \mu \cdot \mathrm{id})|_{R_\lambda}$, т. е. $\boldsymbol{v} \in R_\lambda$ и $\mathcal{A}\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}$. Тогда $(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})^m \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ для некоторого m и $(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})\boldsymbol{v} = (\mu - \lambda)\boldsymbol{v}$, а значит

$$(\mu - \lambda)^m \boldsymbol{v} = (\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})^m \boldsymbol{v} = \mathbf{0}.$$

Следовательно, если $\lambda \neq \mu$, то $\boldsymbol{v} = 0$. Таким образом, при $\lambda \neq \mu$ мы получаем, что ядро оператора $(\mathcal{A} - \mu \cdot \mathrm{id})|_{R_\lambda}$ тривиально, а значит этот оператор обратим.

Наконец, если $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ — базис в R_λ и $(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})^{m_i} \boldsymbol{e}_i = \mathbf{0}$, то $(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})^m \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ для любого вектора $\boldsymbol{v} \in R_\lambda$, где m — наибольшее из чисел $m_1, \ldots, m_r$. Это означает, что оператор $(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})|_{R_\lambda}$ нильпотентен. □

Лемма 2

Корневые подпространства $R_{\lambda_1}, \ldots, R_{\lambda_k}$, соответствующие различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, образуют прямую сумму $R_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus R_{\lambda_k}$.

Доказательство

Проведём индукцию по k. При $k = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для $k - 1$ подпространств.

Доказательство (продолжение).

Докажем, что соотношение

$$\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{v}_i \in R_{\lambda_i}$, влечёт $\boldsymbol{v}_1 = \ldots = \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$. Имеем $(\mathcal{A} - \lambda_k \cdot \mathrm{id})^p \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ для некоторого p. Применив к (1) оператор $(\mathcal{A} - \lambda_k \cdot \mathrm{id})^p$, получим

$$(\mathcal{A} - \lambda_k \cdot \mathrm{id})^p \boldsymbol{v}_1 + \ldots + (\mathcal{A} - \lambda_k \cdot \mathrm{id})^p \boldsymbol{v}_{k-1} = \boldsymbol{0}. \tag{2}$$

Так как подпространства $R_{\lambda_1}, \ldots, R_{\lambda_{k-1}}$ инвариантны относительно $\mathcal{A} - \lambda_k \cdot \mathrm{id}$, мы имеем $(\mathcal{A} - \lambda_k \cdot \mathrm{id})^p \boldsymbol{v}_i \in R_{\lambda_i}$, $\;i = 1, \ldots, k-1$. Тогда по предположению индукции из (2) вытекает, что $(\mathcal{A} - \lambda_k \cdot \mathrm{id})^p \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$, $i = 1, \ldots, k-1$. Так как по предыдущей лемме оператор $\mathcal{A} - \lambda_k \cdot \mathrm{id}$ в пространствах $R_{\lambda_1}, \ldots, R_{\lambda_{k-1}}$ обратим, , отсюда следует, что $\boldsymbol{v}_1 = \ldots = \boldsymbol{v}_{k-1} = \boldsymbol{0}$. Тогда из (1) получаем, что и $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$. $\square$

Лемма 3

Размерность корневого подпространства R_λ равна кратности λ как корня характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$.

Доказательство

Обозначим через r_λ кратность корня λ. Пусть $\widehat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}|_{R_\lambda}$ — ограничение оператора $\mathcal{A}$ на R_λ и $\widetilde{\mathcal{A}}\colon V/R_\lambda \to V/R_\lambda$ — фактор-оператор. Тогда для характеристических многочленов мы имеем

$$P_{\mathcal{A}}(t) = P_{\widehat{\mathcal{A}}}(t)P_{\widetilde{\mathcal{A}}}(t) = (\lambda - t)^{\dim R_\lambda} P_{\widetilde{\mathcal{A}}}(t),$$

откуда $\dim R_\lambda \leqslant r_\lambda$.

Доказательство (продолжение).

Предположим, что $\dim R_\lambda < r_\lambda$. Тогда из соотношения

$$P_{\mathcal{A}}(t) = (\lambda - t)^{\dim R_\lambda} P_{\widetilde{\mathcal{A}}}(t)$$

следует, что λ является корнем многочлена $P_{\widetilde{\mathcal{A}}}(t)$, т. е. собственным значением оператора $\widetilde{\mathcal{A}}\colon V/R_\lambda \to V/R_\lambda$. Пусть $\boldsymbol{v} + R_\lambda$ — соответствующий (ненулевой) собственный вектор, т. е.

$$\widetilde{\mathcal{A}}(\boldsymbol{v} + R_\lambda) = \lambda(\boldsymbol{v} + R_\lambda) \qquad \text{или} \qquad \mathcal{A}\boldsymbol{v} + R_\lambda = \lambda\boldsymbol{v} + R_\lambda.$$

Отсюда вытекает, что $\mathcal{A}\boldsymbol{v} - \lambda\boldsymbol{v} = (\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})\boldsymbol{v} \in R_\lambda$. По определению R_λ это означает, что $\mathbf{0} = (\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})^m(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})\boldsymbol{v} = (\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})^{m+1}\boldsymbol{v}$, т. е. $\boldsymbol{v} \in R_\lambda$. Но тогда $\boldsymbol{v} + R_\lambda$ — нулевой вектор пространства V/R_λ. Противоречие. $\square$

Теперь мы можем доказать теорему о корневом разложении.

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ — оператор в пространстве V над алгебраически замкнутым полем, и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — все собственные значения оператора $\mathcal{A}$. Тогда V является прямой суммой всех корневых подпространств, т. е.

$$V = R_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus R_{\lambda_k}.$$

Доказательство.

Пусть $\dim V = n$ и пусть r_i — кратность корня λ_i, $i = 1 \ldots, k$. Тогда $\sum_{i=1}^k r_i = n$ (здесь мы пользуемся алгебраической замкнутостью поля) и из двух предыдущих лемм вытекает, что $\dim(R_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus R_{\lambda_k}) = \sum_{i=1}^k r_i = \dim V$. Следовательно, $V = R_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus R_{\lambda_k}$. □

Разложение $V = R_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus R_{\lambda_k}$ называется корневым разложением для оператора $\mathcal{A}$ в пространстве V.

2.10. Жорданова нормальная форма оператора

Давайте посмотрим, как выглядит матрица оператора $\mathcal{A}|_{R_\lambda}$ (ограничения оператора $\mathcal{A}$ на корневое подпространство R_λ). Так как $(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})|_{R_\lambda}$ является нильпотентным оператором, в пространстве R_λ можно выбрать нормальный базис для этого оператора. Тогда матрица оператора $(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})|_{R_\lambda}$ в этом базисе будет состоять из блоков вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},$$

а значит матрица оператора $\mathcal{A}|_{R_\lambda}$ в том же базисе будет состоять из блоков вида

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

На диагонали матрицы J_λ стоит λ, над диагональю — единицы, а на остальных местах нули.

Определение

Матрица J_λ называется жордановой клеткой. Если матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе является блочно-диагональной с блоками вида J_λ (возможно, соответствующими различным λ), то такая матрица называется жордановой нормальной формой оператора $\mathcal{A}$. Базис, в котором оператор имеет жорданову нормальную форму, называется жордановым.

Теорема

Для любого оператора $\mathcal{A}$ в пространстве V над алгебраически замкнутым полем существует жорданов базис (в котором оператор имеет жорданову нормальную форму). Жорданова нормальная форма оператора единственна с точностью до перестановки блоков (клеток).

Доказательство

Существование жордановой формы является прямым следствием теорем о разложении в сумму корневых подпространств и существования нормального вида для нильпотентных операторов.

Действительно, пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — все собственные значения $\mathcal{A}$. Выберем в каждом корневом пространстве R_{λ_i} нормальный базис для нильпотентного оператора $(\mathcal{A} - \lambda_i \cdot \mathrm{id})|_{R_{\lambda_i}}$. Тогда объединение этих базисов даст жорданов базис для оператора $\mathcal{A}$ в силу наличия корневого разложения $V = R_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus R_{\lambda_k}$ (здесь мы пользуемся алгебраической замкнутостью поля).

Доказательство (продолжение)

Докажем единственность жордановой формы. Надо показать, что количество жордановых клеток фиксированного размера с одним и тем же λ не зависит от способа приведения к жордановой форме (т. е. от выбора жорданова базиса). Выберем произвольный жорданов базис. Пусть W_{λ_i} — линейная оболочка части этого базиса, отвечающей всем клеткам с λ_i на диагонали. Тогда ограничение оператора $(\mathcal{A} - \lambda_i \cdot \mathrm{id})$ на W_{λ_i} — нильпотентный оператор, а значит $W_{\lambda_i} \subset R_{\lambda_i}$. Кроме того, $V = W_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus W_{\lambda_k}$ по определению жорданова базиса и $V = R_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus R_{\lambda_k}$ (корневое разложение). Следовательно, $\dim W_{\lambda_i} = \dim R_{\lambda_i}$ и $W_{\lambda_i} = R_{\lambda_i}$. Итак, подпространства, отвечающие клеткам с собственным значением λ_i, не зависят от способа приведения к жордановой форме и равны R_{λ_i}.

Доказательство (окончание).

Таким образом, мы свели доказательство единственности жордановой формы к случаю, когда оператор $\mathcal{A}$ имеет одно собственное значение λ. Любой жорданов базис для такого оператора будет также нормальным базисом для нильпотентного оператора $\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id}$. Для нильпотентных операторов мы уже доказали единственность нормального вида (т. е. жордановой формы). $\square$