Линейная алгебра и геометрия

Лекция 8

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

9 марта 2021 г.

Комплексная структура

Определение

Пусть V — вещественное пространство. Комплексной структурой на V называется такой оператор $\mathcal{J}\colon V \to V$, что $\mathcal{J}^2 = -\mathrm{id}$.

Предложение

Пусть V — вещественное пространство с комплексной структурой $\mathcal{J}$. Введём на V операцию умножения на комплексные числа по правилу

$$(\lambda + i\mu) \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v} + \mu \mathcal{J}(\boldsymbol{v}).$$

Тогда V превращается в комплексное пространство $\widetilde{V}$, для которого $\widetilde{V}_{\mathbb{R}} = V$, а овеществление оператора умножения на i есть $\mathcal{J}$.

Доказательство.

Необходимо проверить свойства 5)–8) из определения линейного пространства над $\mathbb{C}$. Эта проверяется непосредственно. □

Предложение

Пусть $\mathcal{J}$ — комплексная структура на V. Тогда

а) *размерность вещественного пространства V чётна;*

б) *в подходящем базисе матрица оператора $\mathcal{J}$ имеет вид*
$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & -E \\ \hline E & 0 \end{array}\right).$$

Доказательство.

Рассмотрим комплексное пространство $\widetilde{V}$ из предыдущего предложения. Так как любой базис в V порождает $\widetilde{V}$, это пространство конечномерно. Так как $V = \widetilde{V}_{\mathbb{R}}$, мы имеем $\dim V = 2\dim\widetilde{V}$ — чётно.

Далее, если $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — базис комплексного пространства $\widetilde{V}$, то $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, $i\boldsymbol{e}_1, \ldots, i\boldsymbol{e}_n$ — базис пространства $\widetilde{V}_{\mathbb{R}} = V$. В этом базисе оператор $\mathcal{J}$ (овеществление оператора умножения на i) имеет указанный вид. Это проверяется непосредственно (или вытекает из вида матрицы овеществления оператора). □

Комплексификация

Определение

Пусть V — пространство над $\mathbb{R}$. Рассмотрим пространство $V \oplus V$, состоящее из пар $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, где $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, и введём на нём комплексную структуру следующим образом: $\mathcal{J}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := (-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$. Получаемое пространство $\widetilde{V \oplus V}$ над полем $\mathbb{C}$ называется **комплексификацией** пространства V и обозначается $V_{\mathbb{C}}$.

Предложение

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ *— базис пространства* V*. Тогда* $(\boldsymbol{e}_1, \mathbf{0}), \ldots, (\boldsymbol{e}_n, \mathbf{0})$ *— базис пространства* $V_{\mathbb{C}}$*. Таким образом,* $\dim V_{\mathbb{C}} = \dim V$*.*

Доказательство.

Как всегда, нужно проверить, что $(\boldsymbol{e}_1, \mathbf{0}), \ldots, (\boldsymbol{e}_n, \mathbf{0})$ линейно независимы и порождают всё пространство $V_{\mathbb{C}}$. Пусть

$$\alpha_1(\boldsymbol{e}_1, \mathbf{0}) + \ldots + \alpha_n(\boldsymbol{e}_n, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$$

для некоторых $\alpha_k = \lambda_k + i\mu_k \in \mathbb{C}$. Так как $(\lambda_k + i\mu_k) \cdot (\boldsymbol{e}_k, \mathbf{0}) = \lambda_k(\boldsymbol{e}_k, \mathbf{0}) + \mu_k \mathcal{J}(\boldsymbol{e}_k, \mathbf{0}) = (\lambda_k \boldsymbol{e}_k, \mu_k \boldsymbol{e}_k)$, из предыдущего равенства мы получаем

$$(\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n, \mu_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \mu_n \boldsymbol{e}_n) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}),$$

откуда все λ_k, μ_k, а значит и α_k, равны нулю. Итак, $(\boldsymbol{e}_1, \mathbf{0}), \ldots, (\boldsymbol{e}_n, \mathbf{0})$ линейно независимы. То, что они порождают пространство $V_{\mathbb{C}}$, проверяется аналогично. $\square$

Определение

Пусть V — вещественное пространство и $\mathcal{A}\colon V \to V$ — оператор. Оператор $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, заданный формулой $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := (\mathcal{A}\boldsymbol{u}, \mathcal{A}\boldsymbol{v})$, называется комплексификацией оператора $\mathcal{A}$.

Предложение

Пусть A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Тогда оператор $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \mathbf{0}), \ldots, (\boldsymbol{e}_n, \mathbf{0})$ задаётся той же матрицей A.

Доказательство.

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{e}_k, \mathbf{0}) = (\mathcal{A}\boldsymbol{e}_k, \mathbf{0}) = (a_k^l \boldsymbol{e}_l, \mathbf{0}) = a_k^l (\boldsymbol{e}_l, \mathbf{0})$. □

При работе с комплексифицированным пространством $V_{\mathbb{C}}$ удобно записывать векторы $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in V_{\mathbb{C}}$ в виде $\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$. Тогда действие комплексифицированного оператора $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ записывается в виде $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) = \mathcal{A}\boldsymbol{u} + i\mathcal{A}\boldsymbol{v}$.

Предложение

Пространство $(V_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ *канонически изоморфно* $V \oplus V$.

Доказательство.

Действительно, $V_{\mathbb{C}} = \widetilde{V \oplus V}$, а $(\widetilde{V \oplus V})_{\mathbb{R}} = V \oplus V$ (мы просто сначала добавили, а потом убрали умножение на комплексные скаляры). $\square$

Можно доказать (задача), что $(V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ канонически изоморфно $V \oplus \overline{V}$, где $\overline{V}$ — комплексно сопряжённое пространство, в котором сложение то же, что и в V, а умножение на комплексные числа определено по формуле $\lambda \cdot \boldsymbol{v} := \overline{\lambda}\boldsymbol{v}$.

Как мы вскоре убедимся, комплексификация предоставляет весьма полезный инструмент для работы с операторами в вещественных пространствах.

2.5. Инвариантные подпространства. Собственные векторы.

Определение

Подпространство $W \subset V$ называется инвариантным относительно оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$, если $\mathcal{A}(W) \subset W$.

Пример

Ядро $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ и образ $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ оператора $\mathcal{A}$ являются инвариантными подпространствами.

Пусть $W \subset V$ — инвариантное подпространство для оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$. Выберем базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ в W и дополним его до базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в V. Пусть $A = (a^i_j)$ — матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда $\mathcal{A}\boldsymbol{e}_j = a^1_j \boldsymbol{e}_1 + \ldots + a^k_j \boldsymbol{e}_k$ при $j = 1, \ldots, k$. Это означает, что матрица A имеет вид

$$A = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right),$$

где в левом нижнем углу стоит матрица размера $(n-k) \times k$ из нулей.

Аналогично, если имеет место разложение $V = W_1 \oplus W_2$ в прямую сумму инвариантных подпространств, $\mathcal{A}(W_1) \subset W_1$ и $\mathcal{A}(W_2) \subset W_2$, то в подходящем базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ будет иметь блочно-диагональный вид

$$A = \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right).$$

Определение

Пусть $W \subset V$ — инвариантное подпространство для оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$. Тогда оператор $\widehat{\mathcal{A}}\colon W \to W$, определённый равенством $\widehat{\mathcal{A}}\boldsymbol{w} := \mathcal{A}\boldsymbol{w}$ для $\boldsymbol{w} \in W$, называется ограничением оператора $\mathcal{A}$ на подпространство W и обозначается $\mathcal{A}|_W$.

Линейный оператор $\widetilde{\mathcal{A}}\colon V/W \to V/W$, определённый на классах смежности по правилу $\widetilde{\mathcal{A}}(\boldsymbol{v} + W) = \mathcal{A}\boldsymbol{v} + W$, называется фактор-оператором.

Определение фактор-оператора корректно. Действительно, если $\boldsymbol{v} + W = \boldsymbol{u} + W$, то $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \in W$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \in W$, и мы имеем

$$\widetilde{\mathcal{A}}(\boldsymbol{v}+W) = \mathcal{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})+W = \mathcal{A}\boldsymbol{u}+\mathcal{A}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})+W = \mathcal{A}\boldsymbol{u}+W = \widetilde{\mathcal{A}}(\boldsymbol{u}+W).$$

Предложение

Пусть $W \subset V$ — инвариантное подпространство для оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ — базис в W и $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — базис в V. Тогда матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \widehat{A} & * \\ \hline 0 & \widetilde{A} \end{array}\right),$$

где $\widehat{A}$ — матрица ограничения $\mathcal{A}|_W$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, а $\widetilde{A}$ — матрица фактор-оператора в базисе $\boldsymbol{e}_{k+1} + W, \ldots, \boldsymbol{e}_n + W$ факторпространства V/W.

Доказательство.

Это вытекает из определений ограничения, фактор-оператора и матрицы оператора. □

Определение

Ненулевой вектор $\boldsymbol{v} \in V$ называется собственным для оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{k}$.

Число $\lambda \in \mathbf{k}$ называется собственным значением, если существует собственный вектор $\boldsymbol{v}$, для которого $\mathcal{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$.

Предложение

Все собственные векторы, отвечающие собственному значению λ, и вектор $\mathbf{0}$ образуют подпространство, которое совпадает с ядром оператора $\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id}$.

Доказательство.

Равенство $\mathcal{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ имеет место тогда и только, когда $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})$. □

Определение

Пусть λ — собственное значение для оператора $\mathcal{A}$. Подпространство $V_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id})$ называется собственным подпространством, соответствующим λ.

Предложение

Собственное подпространство V_λ инвариантно.

Доказательство.

Действительно, если $\boldsymbol{v} \in V_\lambda$, то $\mathcal{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \in V_\lambda$. $\square$

Пример

1. Для тождественного оператора $\mathrm{id}\colon V \to V$ все ненулевые векторы являются собственными с собственным значением 1.

2. Ядро любого оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ состоит из собственных векторов с собственным значением 0 и нулевого вектора.

3. Все собственные значения проектора $\mathcal{P}\colon V \to V$ суть 0 или 1. Причём если $\mathcal{P}$ — проектор на U вдоль W, то U — это собственное подпространство, соответствующее $\lambda = 1$, а W — собственное подпространство, соответствующее $\lambda = 0$.

2.6. Характеристический многочлен.

Определение

Многочлен $P_{\mathcal{A}}(t) := \det(\mathcal{A} - t \cdot \mathrm{id})$ называется характеристическим многочленом оператора $\mathcal{A}$.

Так как характеристический многочлен определён как определитель оператора, его можно вычислять как определитель матрицы этого оператора в любом базисе:

$$P_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = \begin{vmatrix} a_1^1 - t & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - t & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n - t \end{vmatrix},$$

где $A = (a_j^i)$ — матрица оператора $\mathcal{A}$ в любом базисе, а E — единичная матрица. Из этой формулы ясно, что $P_{\mathcal{A}}(t) = p_n t^n + p_{n-1} t^{n-1} + \ldots + p_0$ — многочлен степени $n = \dim V$. Кроме того, мы имеем $p_n = (-1)^n$, $p_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr} \mathcal{A}$, $p_0 = \det \mathcal{A}$.

Предложение

Собственные значения оператора $\mathcal{A}$ — это в точности корни его характеристического многочлена.

Доказательство.

Если λ — собственное значение, то оператор $\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id}$ вырожден, т. е. $\det(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id}) = 0$, а значит λ — корень многочлена $P_{\mathcal{A}}(t)$. Обратно, если λ — корень многочлена $P_{\mathcal{A}}(t)$, то $\det(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id}) = 0$. Поэтому $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathrm{id}) \neq \{\mathbf{0}\}$, а значит λ — собственное значение. $\square$