Линейная алгебра и геометрия

Лекция 7

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

5 марта 2021 г.

Определение

Композицией операторов $\mathcal{A}\colon V \to V$ и $\mathcal{B}\colon V \to V$ называется линейный оператор $\mathcal{A}\circ\mathcal{B}\colon V \to V$,определяемый формулой $(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})(\boldsymbol{v}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}\boldsymbol{v})$.

Предложение

Матрица композиции операторов $\mathcal{A}\circ\mathcal{B}$ в любом базисе есть произведение матриц операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в этом базисе.

Доказательство.

Пусть $A = (a^i_j)$ и $B = (b^i_j)$ — матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и пусть $C = AB = (c^i_j)$. Тогда

$$(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})(\boldsymbol{e}_i) = \mathcal{A}(\mathcal{B}\boldsymbol{e}_i) = \mathcal{A}(b^j_i\boldsymbol{e}_j) = b^j_i\mathcal{A}\boldsymbol{e}_j = b^j_i a^k_j\boldsymbol{e}_k = a^k_j b^j_i\boldsymbol{e}_k = c^k_i\boldsymbol{e}_k,$$

т. е. $C = AB$ есть матрица оператора $\mathcal{A}\circ\mathcal{B}$. □

Теорема

Следующие условия эквивалентны для оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$:

а) *оператор $\mathcal{A}$ невырожден, т. е. $\det \mathcal{A} \neq 0$;*

б) *оператор $\mathcal{A}$ обратим, т.е. существует $\mathcal{A}^{-1}\colon V \to V$, $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^{-1} = \mathrm{id}$;*

в) $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = V$;

г) $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$.

Доказательство

Мы докажем импликации а)$\Rightarrow$б)$\Rightarrow$в)$\Rightarrow$г$\Rightarrow$а).

а)$\Rightarrow$б). Пусть $\det \mathcal{A} \neq 0$ и A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе. Тогда $\det A \neq 0$. Следовательно, существует обратная матрица A^{-1}. Рассмотрим оператор $\mathcal{A}^{-1}$, который в данном базисе задаётся матрицей A^{-1}. Тогда по предыдущему предложению, матрица оператора $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^{-1}$ есть $AA^{-1} = E$, а значит $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^{-1} = \mathrm{id}$.

б)$\Rightarrow$в). Пусть $\mathcal{A}$ обратим. Предположим, что $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} \neq V$. Выберем такой $\boldsymbol{v} \in V$, что $\boldsymbol{v} \notin \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}$. Тогда $\mathcal{A}\boldsymbol{u} \in \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$. С другой стороны, $\mathcal{A}\boldsymbol{u} = \mathcal{A} \circ \mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$. Противоречие.

Теорема

Следующие условия эквивалентны для оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$*:*

а) *оператор* $\mathcal{A}$ *невырожден, т. е.* $\det \mathcal{A} \neq 0$*;*

б) *оператор* $\mathcal{A}$ *обратим, т.е. существует* $\mathcal{A}^{-1}\colon V \to V$*,* $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^{-1} = \mathrm{id}$*;*

в) $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = V$*;*

г) $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$.

Доказательство (продолжение).

в)$\Rightarrow$г). Пусть $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = V$, т. е. $\dim V = \dim \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$. Тогда $\dim V = \dim \mathrm{Ker}\,\mathcal{A} + \dim \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$. Следовательно, $\dim \mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = 0$, т. е. $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$.

г)$\Rightarrow$а). Пусть $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$. Предположим, что $\det \mathcal{A} = 0$. Тогда $\det A = 0$, где A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Это означает, что система линейных уравнений $Ax = 0$ имеет ненулевое решение $x^1, \ldots, x^n$. Отсюда следует, что $\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, где $\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{e}_i \neq \mathbf{0}$. Таким образом, $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ содержит ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$. Противоречие. $\square$

Множество $\mathrm{Hom}(V,V)$ всех линейных операторов $\mathcal{A}\colon V\to V$ в фиксированном пространстве V образует кольцо относительно операций сложения и композиции. (Если включить в рассмотрение и умножение операторов на элементы поля $\mathbf{k}$, то получаемый объект называется алгеброй над полем $\mathbf{k}$.) Наряду с $\mathrm{Hom}(V,V)$ для этого кольца (или алгебры) используется обозначение $\mathrm{End}(V)$.

Невырожденные операторы в V образуют (неабелеву) группу относительно композиции. Эта группа называется общей линейной группой пространства V и обозначается $GL(V)$. Если $\dim V=n$, то группа $GL(V)$ изоморфна группе невырожденных квадратных матриц размера n с элементами из поля $\mathbf{k}$ по умножению; эта группа обозначается $GL(n,\mathbf{k})$.

Матрицы (или операторы) с определителем 1 образуют подгруппу в $GL(n,\mathbf{k})$; эта подгруппа называется специальной линейной группой и обозначается $SL(n,\mathbf{k})$.

2.2. Проекторы, их алгебраическая характеризация

Определение

Пусть пространство V представлено в виде прямой суммы двух подпространств: $V = V_1 \oplus V_2$. Тогда для любого вектора $\boldsymbol{v} \in V$ имеется единственное разложение $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1 \in V_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in V_2$. Оператор $\mathcal{P}\colon V \to V$, переводящий вектор $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ в вектор $\boldsymbol{v}_1$, называется проектором на V_1 вдоль V_2.

Для такого проектора $\mathcal{P}$ мы очевидно имеем $\operatorname{Im}\mathcal{P} = V_1$ и $\operatorname{Ker}\mathcal{P} = V_2$.

Теорема

Следующие условия эквивалентны для оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$:

а) *$\mathcal{A}$ является проектором;*

б) *$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$.*

Доказательство

Если $\mathcal{A}$ — проектор на V_1 вдоль V_2, то для $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ имеем

$$\mathcal{A}^2\boldsymbol{v} = \mathcal{A}\big(\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)\big) = \mathcal{A}\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1 = \mathcal{A}\boldsymbol{v},$$

т. е. $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$.

Доказательство (продолжение)

Пусть теперь $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$. Положим $V_1 := \operatorname{Im}\mathcal{A}$ и $V_2 := \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Мы покажем, что $\mathcal{A}$ — проектор на V_1 вдоль V_2.

Сначала докажем, что $V = V_1 \oplus V_2$, т. е., что $V = V_1 + V_2$ и $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$. Пусть $\boldsymbol{v} \in V_1 \cap V_2$. Тогда $\boldsymbol{v} \in V_1 = \operatorname{Im}\mathcal{A}$, т. е. существует такой вектор $\boldsymbol{u} \in V$, что $\mathcal{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, и $\boldsymbol{v} \in V_2 = \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{A}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Тогда

$$\boldsymbol{v} = \mathcal{A}\boldsymbol{u} = \mathcal{A}^2\boldsymbol{u} = \mathcal{A}(\mathcal{A}\boldsymbol{u}) = \mathcal{A}\boldsymbol{v} = \mathbf{0},$$

т. е. $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Итак, V_1 и V_2 действительно образуют прямую сумму. Кроме того,

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 = \dim\operatorname{Im}\mathcal{A} + \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \dim V,$$

т. е. $V = V_1 \oplus V_2$.

Доказательство (окончание).

Рассмотрим теперь произвольный вектор $\boldsymbol{v} \in V$ и представим его в виде $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1 \in V_1 = \operatorname{Im} \mathcal{A}$, $\boldsymbol{v}_2 \in V_2 = \operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Тогда существует $\boldsymbol{u} \in V$ такой, что $\boldsymbol{v}_1 = \mathcal{A}\boldsymbol{u}$, а $\mathcal{A}\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$. Мы имеем

$$\mathcal{A}\boldsymbol{v} = \mathcal{A}\boldsymbol{v}_1 + \mathcal{A}\boldsymbol{v}_2 = \mathcal{A}(\mathcal{A}\boldsymbol{u}) = \mathcal{A}^2\boldsymbol{u} = \mathcal{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1.$$

Итак, $\mathcal{A}$ — действительно проектор на V_1 вдоль V_2. $\square$

Матрица проектора на V_1 вдоль V_2 в базисе, составленном из базисов пространств V_1 и V_2, имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

где E — единичная матрица размера $k = \dim V_1$, а 0 обозначает матрицу из нулей соответствующего размера.

2.3. Многочлены от оператора. Минимальный аннулирующий многочлен

Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ — оператор. Мы уже рассматривали его квадрат $\mathcal{A}^2$. На самом деле каждому многочлену $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n \in \mathbf{k}[t]$ можно сопоставить оператор

$$P(\mathcal{A}) := a_0 \,\mathrm{id} + a_1 \mathcal{A} + a_2 \mathcal{A}^2 + \ldots + a_n \mathcal{A}^n,$$

который называется многочленом от оператора $\mathcal{A}$.

Определение

Многочлен $P(t)$ называется аннулирующим оператор $\mathcal{A}$, если $P(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ (нулевой оператор).

Пример

1. Многочлен $t - 1$ аннулирует тождественный оператор id.

2. Многочлен $t^2 - t$ аннулирует любой проектор $\mathcal{P}$.

Предложение

У любого оператора существует ненулевой аннулирующий многочлен.

Доказательство.

Пусть $\dim V = n$. Рассмотрим n^2+1 операторов $\mathcal{A}^0 = \mathrm{id}$, $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \ldots, \mathcal{A}^{n^2}$. Так как размерность пространства операторов равна n^2, эти операторы линейно зависимы, т. е. существуют числа $a_0, a_1, \ldots, a_{n^2}$, не все равные нулю, такие, что $a_0 \,\mathrm{id} + a_1\mathcal{A} + \ldots + a_{n^2}\mathcal{A}^{n^2} = \mathcal{O}$. Тогда ненулевой многочлен $P(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n^2} t^{n^2}$ аннулирует оператор $\mathcal{A}$. □

Определение

Ненулевой многочлен $P(t)$ называется **минимальным аннулирующим многочленом** (или просто **минимальным многочленом**) для оператора $\mathcal{A}$, если $P(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, многочлен $P(t)$ имеет наименьшую степень среди всех ненулевых аннулирующих многочленов, и его старший коэффициент равен 1.

Предложение

Для любого оператора существует единственный минимальный аннулирующий многочлен.

Доказательство.

Мы уже доказали существование ненулевого аннулирующего многочлена. Среди всех аннулирующих многочленов выберем многочлен наименьшей степени и разделим его на старший коэффициент. В результате мы по определению получим минимальный многочлен.

Докажем единственность. Пусть $P_1(t)$ и $P_2(t)$ — два минимальных многочлена для оператора $\mathcal{A}$. Степени и старшие коэффициенты многочленов $P_1(t)$ и $P_2(t)$ равны. Тогда $P_1(t) - P_2(t)$ будет аннулирующим многочленом меньшей степени, а значит $P_1(t) - P_2(t) = 0$. $\square$

2.4. Овеществление и комплексификация

При работе с линейными пространствами и операторами часто бывает удобно изменить поле скаляров. Здесь мы рассмотрим две такие операции:

– переход от пространств над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ к пространствам над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ (комплексификация вещественного пространства);
– переход от пространств над $\mathbb{C}$ к пространствам над $\mathbb{R}$ (овеществление комплексного пространства).

Овеществление

Определение

Пусть V — комплексное пространство (пространство над полем $\mathbb{C}$). Рассмотрим множество $V_{\mathbb{R}}$, состоящее из тех же векторов, что и V. На $V_{\mathbb{R}}$ имеется операция сложения (та же, что и на V), а вместо операции умножения на все комплексные числа мы оставим лишь умножение на вещественные числа. Тогда $V_{\mathbb{R}}$ — вещественное пространство (пространство над полем $\mathbb{R}$), которое называется **овеществлением** пространства V.

Предложение

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ *— базис пространства* V*. Тогда* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$*,* $i\boldsymbol{e}_1, \ldots, i\boldsymbol{e}_n$ *— базис пространства* $V_{\mathbb{R}}$*. Таким образом,* $\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V$.

Доказательство

Проверим, что векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, i\boldsymbol{e}_1, \ldots, i\boldsymbol{e}_n$ линейно независимы в $V_{\mathbb{R}}$. Пусть

$$\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n + \mu_1 i\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \mu_n i\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0},$$

в пространстве $V_{\mathbb{R}}$, где $\lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R}$. Тогда в пространстве V мы имеем

$$(\lambda_1 + i\mu_1)\boldsymbol{e}_1 + \ldots + (\lambda_n + i\mu_n)\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}.$$

Так как векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейно независимы в V, мы имеем $\lambda_k + i\mu_k = 0$, т. е. $\lambda_k = \mu_k = 0$. Следовательно, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, i\boldsymbol{e}_1, \ldots, i\boldsymbol{e}_n$ линейно независимы в $V_{\mathbb{R}}$.

Доказательство (продолжение).

Теперь проверим, что любой вектор $\boldsymbol{v} \in V_{\mathbb{R}}$ представляется в виде линейной комбинации (с вещественными коэффициентами) векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, i\boldsymbol{e}_1, \ldots, i\boldsymbol{e}_n$. Рассмотрим $\boldsymbol{v}$ как вектор из V. Так как $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — базис в V, мы имеем

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n$$

для некоторых $\alpha_k \in \mathbb{C}$. Запишем $\alpha_k = \lambda_k + i\mu_k$, где $\lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n + \mu_1 i\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \mu_n i\boldsymbol{e}_n.$$

Итак, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, i\boldsymbol{e}_1, \ldots, i\boldsymbol{e}_n$ — базис в $V_{\mathbb{R}}$. □

Определение

Пусть V — комплексное пространство и $\mathcal{A}\colon V \to V$ — оператор. Тогда тот же оператор, рассматриваемый в пространстве $V_{\mathbb{R}}$, называется **овеществлением** оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$.

Предложение

Запишем матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ пространства V в виде $A+iB$, где A и B — вещественные матрицы. Тогда

а) *матрица оператора $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n, i\boldsymbol{e}_1,\ldots,i\boldsymbol{e}_n$ есть* $\left(\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array}\right)$;

б) $\det\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = |\det\mathcal{A}|^2$.

Доказательство

Пусть $A=(a_k^l)$ и $B=(b_k^l)$. Тогда

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{e}_k)=\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_k)=(a_k^l+ib_k^l)\boldsymbol{e}_l=a_k^l\boldsymbol{e}_l+b_k^l i\boldsymbol{e}_l,$$
$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}}(i\boldsymbol{e}_k)=\mathcal{A}(i\boldsymbol{e}_k)=i\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_k)=i(a_k^l+ib_k^l)\boldsymbol{e}_l=-b_k^l\boldsymbol{e}_l+a_k^l i\boldsymbol{e}_l,$$

и утверждение а) вытекает из определения матрицы оператора.

Доказательство (продолжение).

Для доказательства утверждения б) произведём следующие элементарные преобразования над строками и столбцами матрицы оператора $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$:

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-iB & -B-iA \\ B & A \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} A-iB & -B-iA+i(A-iB) \\ B & A+iB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-iB & 0 \\ B & A+iB \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем

$\det \mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \det(A-iB)\det(A+iB) = \overline{\det \mathcal{A}} \cdot \det \mathcal{A} = |\det \mathcal{A}|^2.$ □