Линейная алгебра и геометрия

Лекция 6

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

2 марта 2021 г.

Для конечномерного пространства V мы имеем изоморфизм $V \cong V^*$, так как оба пространства имеют одинаковую размерность. Базису $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства V соответствует сопряжёный базис $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ пространства V^*.

Для бесконечномерных пространств ситуация иная: пространства V и V^* *никогда* не изоморфны, пространство V^* всегда «больше». Мы не будем приводить доказательства этого факта (и даже не будем приводить его точной формулировки), а лишь проиллюстрируем его на примере. Это последний раз, когда у нас появляются бесконечномерные пространства; здесь нам также понадобится поле, отличное от $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Напомним, что $\mathbf{k}^\infty$ — это пространство финитных последовательностей, т. е. бесконечных последовательностей элементов поля $\mathbf{k}$, в которых лишь конечное число элементов отличны от нуля. Через $\widehat{\mathbf{k}}^\infty$ мы обозначали пространство всех бесконечных последовательностей.

Предложение

Двойственное пространство к $\mathbf{k}^\infty$ *изоморфно* $\widehat{\mathbf{k}}^\infty$.

Доказательство.

В пространстве $\mathbf{k}^\infty$ имеется стандартный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots$, где $\boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ с 1 на i-м месте.

Рассмотрим линейное отображение

$$\mathcal{A}\colon (\mathbf{k}^\infty)^* \to \widehat{\mathbf{k}}^\infty, \quad f \mapsto \bigl(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots\bigr),$$

которое линейной функции $f \in (\mathbf{k}^\infty)^*$ ставит в соответствие последовательность её значений на базисных векторах $\boldsymbol{e}_i$.
Отображение $\mathcal{A}$ имеет обратное, задаваемое формулой

$$\mathcal{A}^{-1}\bigl((x_1, x_2, \ldots)\bigr) = f \in (\mathbf{k}^\infty)^*, \quad \text{где } f(\boldsymbol{e}_i) = x_i.$$

Так как любой элемент $\boldsymbol{y} \in \mathbf{k}^\infty$ есть (конечная) линейная комбинация элементов $\boldsymbol{e}_i$, значение линейной функции f на $\boldsymbol{y}$ однозначно восстанавливается по её значениям $f(\boldsymbol{e}_i)$. Итак, $\mathcal{A}$ — изоморфизм. □

Пусть $\mathbf{k} = \mathbb{Z}_2$ — поле из двух элементов.

Предложение

Пространства $\mathbb{Z}_2^\infty$ и $\widehat{\mathbb{Z}_2^\infty}$ неизоморфны. Таким образом, пространство $\mathbb{Z}_2^\infty$ не изоморфно своему двойственному пространству.

Доказательство

Дело в том, что $\mathbb{Z}_2^\infty$ как множество счётно, а $\widehat{\mathbb{Z}_2^\infty}$ не является счётным, так что между $\mathbb{Z}_2^\infty$ и $\widehat{\mathbb{Z}_2^\infty}$ нельзя установить биекцию. (Множество X называется счётным, если имеется биекция между X и множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$.)

Действительно, элементы множества $\mathbb{Z}_2^\infty$ соответствуют конечным последовательностям из нулей и единиц. Количество таких последовательностей длины n конечно (равно 2^n), а поэтому $\mathbb{Z}_2^\infty$ счётно, как счётное объединение конечных множеств. (Это также можно увидеть, отождествив $\mathbb{Z}_2^\infty$ с множеством рациональных чисел на отрезке $[0, 1]$ в двоичной записи.)

Доказательство (продолжение).

С другой стороны, множество $\widehat{\mathbb{Z}}_2^\infty$ всех последовательностей из нулей и единиц не является счётным. Действительно, предположим, что нам удалось перенумеровать все такие последовательности: $a_1, a_2, \ldots,$. Рассмотрим последовательность b, в которой k-й элемент отличается от k-го элемента последовательности a_k. Тогда последовательность b не может присутствовать в списке $a_1, a_2, \ldots$, так как она отличается от k-ой последовательности из списка по крайней мере в k-м члене. Полученное противоречие показывает, что $\widehat{\mathbb{Z}}_2^\infty$ не является счётным. (Множество $\widehat{\mathbb{Z}}_2^\infty$ можно также отождествить с множеством всех чисел на отрезке $[0, 1]$ в двоичной записи.) $\square$

В качестве задачи полезно доказать, что пространство $\mathbb{R}^\infty$ также не изоморфно своему двойственному пространству $\widehat{\mathbb{R}}^\infty$ (Указание: в $\mathbb{R}^\infty$ имеется счётный базис, а в $\widehat{\mathbb{R}}^\infty$ не существует счётного базиса.)

1.10. Второе двойственное пространство, канонический изоморфизм $V \cong V^{**}$

Мы видели, что пространства V и V^* изоморфны (в конечномерном случае), однако для построения изоморфизма нам требовалось выбрать базис в V. Сейчас мы построим изоморфизм между пространством V и его **вторым двойственным пространством** V^{**}, который не требует выбора базиса.

По определению, элементами пространства V^{**} являются линейные функции на пространстве линейных функций V^*.

Теорема

Пусть V — конечномерное линейное пространство. Отображение $\varphi\colon V \to V^{**}$, сопоставляющее вектору $\boldsymbol{x} \in V$ линейную функцию $\varphi_{\boldsymbol{x}}$ на V^*, задаваемую формулой

$$\varphi_{\boldsymbol{x}}(\xi) := \xi(\boldsymbol{x}) \qquad \text{для } \xi \in V^*,$$

является изоморфизмом.

Доказательство

Очевидно, что $\varphi_{\boldsymbol{x}}$ — линейная функция на V^*. Кроме того,

$$\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \varphi_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}} = \varphi_{\boldsymbol{x}} + \varphi_{\boldsymbol{y}} = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y})$$

и $\varphi(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{x})$, т. е. отображение φ линейно.

Доказательство (продолжение).

Докажем, что $\varphi\colon V \to V^{**}$ инъективно, т. е. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$. Пусть $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi_{\boldsymbol{x}} = o$. Последнее равенство означает, что $\varphi_{\boldsymbol{x}}(\xi) = \xi(\boldsymbol{x}) = 0$ для любой линейной функции $\xi \in V^*$. В частности, это верно для всех линейных функций $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ двойственного базиса к произвольному базису $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в V. Следовательно, $\varepsilon^i(\boldsymbol{x}) = x^i = 0$, т. е. все координаты вектора $\boldsymbol{x} \in V$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ равны нулю. Это означает, что $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, т. е. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$.

Так как $\dim V = \dim V^{**} = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi$ и $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 0$, мы получаем $\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V^{**}$. Следовательно, $\operatorname{Im}\varphi = V^{**}$ и φ сюръективно.

Итак, φ линейно и биективно, а значит это — изоморфизм. □

При построении изоморфизма $\varphi\colon V \to V^{**}$ мы ни разу не использовали базис (базис использовался только при доказательстве). Изоморфизм, который не зависит от выбора базиса, называется канонический.

1.11. Сопряжённое линейное отображение

Определение

Пусть $\mathcal{A}\colon V \to W$ — линейное отображение. Отображение $\mathcal{A}^*\colon W^* \to V^*$, заданное формулой

$$(\mathcal{A}^*\xi)(\boldsymbol{v}) := \xi(\mathcal{A}\boldsymbol{v}) \qquad \text{для } \xi \in W^*, \boldsymbol{v} \in V,$$

называется сопряжённым к $\mathcal{A}$.

Непосредственно проверяется, что $\mathcal{A}^*$ — линейное отображение.

Предложение

Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ *и* $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ *— базисы пространств* V *и* W *соответственно. Тогда матрица отображения* $\mathcal{A}\colon V \to W$ *в этих базисах и матрица сопряжённого отображения* $\mathcal{A}^*\colon W^* \to V^*$ *в двойственных базисах* $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ *и* $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m$ *получаются друг из друга траспонированием.*

Доказательство.

Пусть $A = (a^i_j)$ — матрица отображения $\mathcal{A}$ в базисах $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ и $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$. Тогда для любого вектора $\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{e}_i$ мы имеем

$$(\mathcal{A}^*\varphi^i)(\boldsymbol{x}) = \varphi^i(\mathcal{A}\boldsymbol{x}) = \varphi^i(a^j_k x^k \boldsymbol{f}_j) = a^j_k x^k \varphi^i(\boldsymbol{f}_j) = \\ = a^j_k x^k \delta^i_j = a^i_k x^k = a^i_k \varepsilon^k(\boldsymbol{x}).$$

Следовательно, $\mathcal{A}^*\varphi^i = a^i_k \varepsilon^k$. Это равенство означает, что в i-й *строке* матрицы $A = (a^i_k)$ стоят координаты образа φ^i при отображении $\mathcal{A}^*$ по отношению к базису $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m$. Поэтому матрица линейного отображения $\mathcal{A}^*$ получается из матрицы A транспонированием. □

Матрица линейного оператора. Определитель и след оператора. Невырожденные операторы. Группы $GL(n)$ и $SL(n)$

Далее все пространства предполагаются конечномерными. Напомним, что линейным оператором называется линейное отображение $\mathcal{A}\colon V \to V$ пространства V в себя. Далее мы будем называть линейные операторы просто «операторами».

В определении матрицы A линейного отображения $\mathcal{A}\colon V \to V$ естественно в качестве базисов в обоих экземплярах пространства V брать один и тот же базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Получаемая квадратная матрица $A = (a_i^j)$ называется матрицей линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Таким образом, i-й столбец матрицы A составлен из координат вектора $\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i$ относительно базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i = a_i^j \boldsymbol{e}_j.$$

Пример

1. Тождественный оператор id переводит каждый вектор $\boldsymbol{v} \in V$ в себя: $\mathrm{id}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$. Матрицей оператора id в любом базисе является единичная матрица E. Обратно, если матрица оператора $\mathcal{A}$ в каком-то базисе есть E, то $\mathcal{A} = \mathrm{id}$.

2. Рассмотрим оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$ в пространстве $\mathbf{k}_2[x]$ многочленов степени не выше 2. Тогда $\frac{d}{dx}1 = 0$, $\frac{d}{dx}x = 1$ и $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$. Таким образом, матрицей оператора $\frac{d}{dx}$ в базисе $1, x, x^2$ является матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример

3. В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим оператор $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{v}}$ ортогонального проектирования на направление вектора $\boldsymbol{v} = (1,1,1)$. Найдём матрицу этого оператора в стандартном базисе $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$ и $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$. По формуле из аналитической геометрии, для любого вектора $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ мы имеем $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = \frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v}$. Следовательно,

$$\mathrm{pr}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{e}_1 = \mathrm{pr}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{e}_2 = \mathrm{pr}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{3}(1,1,1) = \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_3.$$

Таким образом, матрица оператора $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{v}}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Теорема (закон изменения матрицы линейного оператора)

Имеет место соотношение

$$A' = C^{-1}AC,$$

где A *— матрица оператора* $\mathcal{A}\colon V \to V$ *в базисе* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$*,*
A' *— матрица в базисе* $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$
и C *— матрица перехода от базиса* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ *к базису* $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$*.*

Доказательство.

Так как мы выбираем один и тот же базис в обоих экземплярах пространства V, мы должны подставить $C = D$ в формулу $A' = D^{-1}AC$ преобразования матрицы линейного отображения. □

Квадратные матрицы A и A', удовлетворяющие соотношению $A' = C^{-1}AC$, где C — невырожденная матрица, называются **подобными**. Таким образом, матрицы одного оператора в разных базисах подобны.

След $\operatorname{tr} A$ квадратной матрицы $A = (a^i_j)$ — это сумма её диагональных элементов, $\operatorname{tr} A = a^i_i$.

Лемма

Определитель и след подобных матриц равны.

Доказательство.

Пусть $A' = C^{-1}AC$. Тогда для определителя имеем

$$\det A' = \det(C^{-1}AC) = (\det C^{-1})(\det A)(\det C) = \\ = (\det C)^{-1}(\det C)(\det A) = \det A.$$

Для вычисления следа используем обозначения Эйнштейна:
$a^{i'}_{j'} = c^{i'}_i a^i_j c^j_{j'}$, откуда

$$\operatorname{tr} A' = a^{i'}_{i'} = c^{i'}_i a^i_j c^j_{i'} = c^j_{i'} c^{i'}_i a^i_j = \delta^j_i a^i_j = a^i_i = \operatorname{tr} A. \qquad \square$$

Определение

Определитель (соответственно, след) линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ — это определитель (соответственно, след) матрицы оператора $\mathcal{A}$ в любом базисе; обозначается $\det \mathcal{A}$ (соответственно, $\operatorname{tr} \mathcal{A}$).

Оператор $\mathcal{A}$ называется невырожденным, если $\det \mathcal{A} \neq 0$.