Линейная алгебра и геометрия

Лекция 5

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

26 февраля 2021 г.

Теорема

Пусть $\mathcal{A}\colon V \to W$ *— линейное отображение. Тогда соответствие* $\boldsymbol{v} + \operatorname{Ker}\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}\boldsymbol{v}$ *задаёт изоморфизм между факторпространством* $V/\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ *и подпространством* $\operatorname{Im}\mathcal{A}$.

Доказательство

Это доказательство полностью повторяет доказательство теоремы из курса алгебры о том, что «гомоморфный образ группы изоморфен факторгруппе по ядру гомоморфизма».

Сначала проверим, что $\boldsymbol{v} + \operatorname{Ker}\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}\boldsymbol{v}$ действительно корректно определяет отображение $\widetilde{\mathcal{A}}\colon V/\operatorname{Ker}\mathcal{A} \to \operatorname{Im}\mathcal{A}$. Для этого нужно проверить, что если $\boldsymbol{u} + \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \boldsymbol{v} + \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}\boldsymbol{u} = \mathcal{A}\boldsymbol{v}$. В силу доказанной ранее леммы, из равенства классов смежности $\boldsymbol{u} + \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \boldsymbol{v} + \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ вытекает, что $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, т. е. $\mathcal{A}\boldsymbol{u} = \mathcal{A}\boldsymbol{v} + \mathcal{A}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \mathcal{A}\boldsymbol{v}$. Итак, отображение $\widetilde{\mathcal{A}}\colon V/\operatorname{Ker}\mathcal{A} \to \operatorname{Im}\mathcal{A}$ определено корректно.

Доказательство (продолжение).

Линейность и сюръективность отображения $\widetilde{\mathcal{A}}$ очевидны. Проверим, что оно также инъективно. Пусть $\widetilde{\mathcal{A}}(\boldsymbol{u} + \operatorname{Ker} \mathcal{A}) = \widetilde{\mathcal{A}}(\boldsymbol{v} + \operatorname{Ker} \mathcal{A})$. Это означает, что $\mathcal{A}\boldsymbol{u} = \mathcal{A}\boldsymbol{v}$, т. е. $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Тогда из леммы следует, что $\boldsymbol{u} + \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \boldsymbol{v} + \operatorname{Ker} \mathcal{A}$, т. е. $\widetilde{\mathcal{A}}$ инъективно. Так как линейное отображение $\widetilde{\mathcal{A}} \colon V / \operatorname{Ker} \mathcal{A} \to \operatorname{Im} \mathcal{A}$ сюръективно и инъективно, оно является изоморфизмом. □

Следствие

Для любого линейного отображения $\mathcal{A} \colon V \to W$ мы имеем

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}.$$

Доказательство.

Из предыдущей теоремы следует, что $\dim(V / \operatorname{Ker} \mathcal{A}) = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$, а $\dim(V / \operatorname{Ker} \mathcal{A}) = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ по теореме о размерности факторпространства. □

1.8. Матрица линейного отображения. Преобразование матрицы линейного отображения при заменах базисов

Пусть $\mathcal{A}\colon V \to W$ — линейное отображение, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ — базис в V, а $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ — базис в W.

Определение

Матрицей отображения $\mathcal{A}\colon V \to W$ по отношению к базисам $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ и $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ называется матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_m^n \end{pmatrix}$$

размера $n \times m$, в которой i-й столбец составлен из координат вектора $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_i)$ относительно базиса $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$:

$$\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i = a_i^j \boldsymbol{f}_j.$$

Зная матрицу линейного отображения $\mathcal{A}$, мы можем найти образ любого вектора $\boldsymbol{x} \in V$ при отображении $\mathcal{A}$ следующим образом.

Предложение

Пусть $\boldsymbol{x} = x^j \boldsymbol{e}_j$ — произвольный вектор из V, а $\boldsymbol{y} = y^i \boldsymbol{f}_i$ — его образ в W, т.е. $\boldsymbol{y} = \mathcal{A}\boldsymbol{x}$. Тогда

$$y^i = a^i_j x^j \qquad \text{или} \qquad \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & \dots & a^n_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

Действительно,

$$y^i \boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{y} = \mathcal{A}\boldsymbol{x} = \mathcal{A}(x^j \boldsymbol{e}_j) = x^j \mathcal{A}\boldsymbol{e}_j = x^j a^i_j \boldsymbol{f}_i.$$

Так как $\{\boldsymbol{f}_i\}$ — базис, отсюда следует, что $y^i = a^i_j x^j$. $\square$

Определение

Множество всех линейных отображений $\mathcal{A}\colon V \to W$ из V в W с операциями сложения и умножения

$$(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)(\boldsymbol{v}) := \mathcal{A}_1\boldsymbol{v} + \mathcal{A}_2\boldsymbol{v}, \quad (\lambda\mathcal{A})(\boldsymbol{v}) := \lambda(\mathcal{A}\boldsymbol{v})$$

является линейным пространством. Оно называется пространством линейных отображений из V в W и обозначается $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V, W)$ или просто $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Предложение

Пусть $\dim V = m$ *и* $\dim W = n$. *Тогда пространство линейных отображений* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V, W)$ *изоморфно пространству матриц* $\mathrm{Mat}_{\mathbf{k}}(n, m)$.

Доказательство.

Выберем базисы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ и $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ в V и W соответственно.

Определим отображение $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V, W) \to \mathrm{Mat}_{\mathbf{k}}(n, m)$, которое сопоставляет линейному отображению его матрицу в выбранных базисах.

Непосредственно проверяется, что это отображение линейно. Кроме того, оно биективно: обратное отображение сопоставляет $n \times m$-матрице $A = (a^i_j)$ линейное отображение, определяемое в координатах формулой $y^i = a^i_j x^j$. Следовательно, наше отображение $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V, W) \to \mathrm{Mat}_{\mathbf{k}}(n, m)$ является изоморфизмом. $\square$

Пусть в пространстве V выбран новый базис $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{m'}$, а в пространстве W — новый базис $\boldsymbol{f}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{f}_{n'}$.

Теорема (закон изменения матрицы линейного отображения)

Имеет место соотношение

$$A' = D^{-1}AC,$$

где A — матрица линейного отображения $\mathcal{A}\colon V \to W$ по отношению к базисам $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ и $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$;
A' — матрица отображения $\mathcal{A}$ по отношению к базисам $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{m'}$ и $\boldsymbol{f}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{f}_{n'}$;
$C = C_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{e}'}$ — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ к базису $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{m'}$
и $D = D_{\boldsymbol{f}\to\boldsymbol{f}'}$ — матрица перехода от $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ к $\boldsymbol{f}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{f}_{n'}$.

Доказательство.

Пусть $C = (c^i_{i'})$ и $A = (a^j_i)$, тогда

$$\mathcal{A}\boldsymbol{e}_{i'} = \mathcal{A}(c^i_{i'}\boldsymbol{e}_i) = c^i_{i'}\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i = c^i_{i'}a^j_i\boldsymbol{f}_j.$$

С другой стороны, если $A' = (a^{j'}_{i'})$ и $D = (d^j_{j'})$, то

$$\mathcal{A}\boldsymbol{e}_{i'} = a^{j'}_{i'}\boldsymbol{f}_{j'} = a^{j'}_{i'}d^j_{j'}\boldsymbol{f}_j.$$

Сравнивая последние два соотношения, с учётом того, что $\{\boldsymbol{f}_j\}$ — базис, получаем $a^j_i c^i_{i'} = d^j_{j'}a^{j'}_{i'}$. Это эквивалентно соотношению $AC = DA'$, т. е. $A' = D^{-1}AC$. □

1.9. Двойственное пространство V^*, двойственный базис. Отсутствие изоморфизма $V \cong V^*$ в бесконечномерном случае (пример)

Напомним, что **линейной функцией** называется линейное отображение $f\colon V \to \mathbf{k}$. Как и всякое множество линейных отображений между двумя пространствами, множество линейных функций является линейным пространством.

Определение

Пространство $\mathrm{Hom}(V, \mathbf{k})$ линейных функций $f\colon V \to \mathbf{k}$ называется **двойственным** (или **сопряжённым**) **пространством** к V и обозначается V^*.

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ — базис в V. Значение линейной функции $\xi \in V^*$ на любом векторе $\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{e}_i \in V$ определяется её значениями на базисных векторах, так как $\xi(\boldsymbol{x}) = x^i \xi(\boldsymbol{e}_i)$.

Определим линейные функции $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n \in V^*$ по правилу

$$\varepsilon^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j.$$

Тогда для любого вектора $\boldsymbol{x} = x^j \boldsymbol{e}_j$ мы имеем

$$\varepsilon^i(\boldsymbol{x}) = \varepsilon^i(x^j \boldsymbol{e}_j) = x^j \varepsilon^i(\boldsymbol{e}_j) = x^j \delta^i_j = x^i.$$

В связи с этим функции ε^i часто называют координатными функциями.

Предложение

Линейные функции $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ образуют базис в V^*.

Доказательство.

Линейная независимость. Пусть $x_1\varepsilon^1 + \ldots + x_n\varepsilon^n = o$. Это равенство означает, что линейная функция $\xi := x_i\varepsilon^i$ равна нулю на любом векторе из V. Вычислим её на векторе $\boldsymbol{e}_j$:
$0 = \xi(\boldsymbol{e}_j) = x_i\varepsilon^i(\boldsymbol{e}_j) = x_i\delta^i_j = x_j$. Итак, все коэффициенты x_j равны нулю, а значит $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n \in V^*$ линейно независимы.

Теперь проверим, что $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ порождают всё пространство V^*. Мы утверждаем, что любая линейная функции ξ представляется в виде линейной комбинации $\xi = \xi_i\varepsilon^i$, где $\xi_i = \xi(\boldsymbol{e}_i)$. Действительно, для любого вектора $\boldsymbol{x} = x^j\boldsymbol{e}_j \in V$ мы имеем

$$\xi_i\varepsilon^i(\boldsymbol{x}) = \xi_i x^i = \xi(\boldsymbol{e}_i)x^i = \xi(x^i\boldsymbol{e}_i) = \xi(\boldsymbol{x}).$$

Следовательно, $\xi = \xi_i\varepsilon^i$, т.е. $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ — базис в V^*. □

Определение

Базис $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ пространства V^* называется двойственным (или сопряжённым) базисом к $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Следствие

$\dim V = \dim V^*$ *(для конечномерных пространств).*

Пусть теперь $\boldsymbol{e}_{1'}, \dots, \boldsymbol{e}_{n'}$ — другой базис пространства V и $C = (c^i_{i'})$ — матрица перехода, $\boldsymbol{e}_{i'} = c^i_{i'}\boldsymbol{e}_i$. Рассмотрим двойственные базисы $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ и $\varepsilon^{1'}, \dots, \varepsilon^{n'}$.

Предложение

Матрица перехода от $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ к $\varepsilon^{1'}, \dots, \varepsilon^{n'}$ есть $(C^{-1})^t$.

Доказательство.

Для любого вектора $\boldsymbol{x} = x^i\boldsymbol{e}_i = x^{i'}\boldsymbol{e}_{i'}$ мы имеем
$\varepsilon^i(\boldsymbol{x}) = x^i = c^i_{i'}x^{i'} = c^i_{i'}\varepsilon^{i'}(\boldsymbol{x})$. Следовательно, $\varepsilon^i = c^i_{i'}\varepsilon^{i'}$, т. е.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^1 \\ \vdots \\ \varepsilon^n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \varepsilon^{1'} \\ \vdots \\ \varepsilon^{n'} \end{pmatrix}$$

или

$$(\varepsilon^{1'} \dots \varepsilon^{n'}) = (\varepsilon^1 \dots \varepsilon^n)(C^{-1})^t.$$

Это означает, что $(C^{-1})^t$ — это матрица перехода от $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ к $\varepsilon^{1'}, \dots, \varepsilon^{n'}$. □

Так как (конечномерные) пространства V и V^* имеют одинаковую размерность, они изоморфны. Однако для построения изоморфизма между ними нам необходимо выбрать базис в V (и двойственный базис в V^*); изоморфизм между V и V^* «неканоничен» в том смысле, что он зависит от выбора базиса. Разные базисы дают разные изоморфизмы.