Линейная алгебра и геометрия

Лекция 4

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

19 февраля 2021 г.

1.6. Координаты вектора. Закон изменения координат при замене базиса

Определение

Пусть V — линейное пространство и $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — базис в V. Любой вектор $\boldsymbol{x} \in V$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации базисных векторов: $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$. Числа $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{k}$ называются координатами вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Далее мы приведём ряд соглашений об обозначениях, которые существенно упростят выкладки, связанные с координатами.

Соглашение (обозначения Эйнштейна для координат)

Мы, как правило, будем писать индексы у координат сверху, а не снизу, т. е. $x^1, \ldots, x^n$ вместо $x_1, \ldots, x_n$. Вместо длинной записи разложения вектора по базису $\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x^n\boldsymbol{e}_n$ мы будем использовать запись $\boldsymbol{x} = x^i\boldsymbol{e}_i$, подразумевая сумму $\sum_{i=1}^n x^i\boldsymbol{e}_i$ (т.е. суммирование всегда будет подразумеваться по повторяющимся верхним и нижним индексам).

При работе с матрицами координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ мы будем записывать в виде столбца высоты n, обозначая его простой (нежирной) буквой x, т. е. $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$. Часто для экономии места вместо $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ будем писать $(x^1 \ \ldots \ x^n)^t$.

Пусть в пространстве V заданы два базиса: «старый» $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ и «новый» $\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_n$. Нам будет удобно обозначать векторы нового базиса через $\boldsymbol{e}_{1'}, \dots, \boldsymbol{e}_{n'}$. Запишем формулы, выражающие векторы нового базиса через старый базис:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{1'} &= c^1_{1'}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + c^n_{1'}\boldsymbol{e}_n, \\ \ldots & \qquad\quad \ldots \\ \boldsymbol{e}_{n'} &= c^1_{n'}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + c^n_{n'}\boldsymbol{e}_n, \end{aligned}$$

или, используя обозначения Эйнштейна,

$$\boldsymbol{e}_{i'} = c^i_{i'}\boldsymbol{e}_i, \quad i' = 1, \dots, n.$$

Эти формулы равносильны одному матричному равенству

$$(\boldsymbol{e}_{1'} \ \ldots \ \boldsymbol{e}_{n'}) = (\boldsymbol{e}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{e}_n) \begin{pmatrix} c^1_{1'} & \cdots & c^1_{n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^n_{1'} & \cdots & c^n_{n'} \end{pmatrix}.$$

Определение

Матрица

$$C = (c^i_{i'}) = \begin{pmatrix} c^1_{1'} & \cdots & c^1_{n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^n_{1'} & \cdots & c^n_{n'} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей перехода** от базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$. Её столбцами являются координаты новых базисных векторов в старом базисе.

Теорема (закон изменения координат)

Пусть $x^1, \ldots, x^n$ *— координаты вектора* $\boldsymbol{x}$ *в базисе* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, *а* $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ *— координаты этого же вектора в базисе* $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$.
Тогда два набора координат связаны следующими формулами.
В развёрнутом координатном виде:

$$x^1 = c^1_{1'} x^{1'} + \ldots + c^1_{n'} x^{n'},$$
$$\ldots\ldots$$
$$x^n = c^n_{1'} x^{1'} + \ldots + c^n_{n'} x^{n'}.$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}.$$

В обозначениях Эйнштейна:

$$x^i = c^i_{i'} x^{i'}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Доказательство.

Хотя все три формулы закона преобразования координат эквивалентны, мы докажем их по отдельности, чтобы лучше освоиться с различными обозначениями. Мы имеем

$$\begin{aligned}
x^1\boldsymbol{e}_1+\ldots+x^n\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{x}&=x^{1'}\boldsymbol{e}_{1'}+\ldots+x^{n'}\boldsymbol{e}_{n'}=\\
&=x^{1'}(c^1_{1'}\boldsymbol{e}_1+\ldots+c^n_{1'}\boldsymbol{e}_n)+\ldots+x^{n'}(c^1_{n'}\boldsymbol{e}_1+\ldots+c^n_{n'}\boldsymbol{e}_n)=\\
&=(c^1_{1'}x^{1'}+\ldots+c^1_{n'}x^{n'})\boldsymbol{e}_1+\ldots+(c^n_{1'}x^{1'}+\ldots+c^n_{n'}x^{n'})\boldsymbol{e}_n.
\end{aligned}$$

Так как $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ — базис, мы получаем $x^i=c^i_{1'}x^{1'}+\ldots+c^i_{n'}x^{n'}$ для $i=1,\ldots,n$.

Доказательство (продолжение).

Та же выкладка в матричных обозначениях имеет вид

$$(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'})\begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix} =$$

$$= (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} c^1_{1'} & \cdots & c^1_{n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^n_{1'} & \cdots & c^n_{n'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}.$$

Доказательство (окончание).

Наконец, используя обозначения Эйнштейна, получаем

$$x^i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{x} = x^{i'} \boldsymbol{e}_{i'} = x^{i'} c^i_{i'} \boldsymbol{e}_i,$$

откуда $x^i = x^{i'} c^i_{i'} = c^i_{i'} x^{i'}$. □

Из доказательства видно, что выкладка, использующая обозначения Эйнштейна, имеет наиболее простой вид. Далее в аналогичных выкладках мы как правило будем пользоваться обозначениями Эйнштейна.

Обратим внимание также, что в определении матрицы перехода мы выражаем *новые* векторы через *старые*, а в законе преобразования координат, наоборот, *старые* координаты выражаются через *новые*.

Соглашение (обозначения Эйнштейна для матриц)

Пусть $A = (a^i_j)$ — матрица размера $\ell \times m$, а $B = (b^j_k)$ — матрица размера $m \times n$. Тогда закон умножения матриц в обозначениях Эйнштейна выглядит следующим образом: для компонент $\ell \times n$-матрицы $C = (c^i_k)$, получаемой как произведение матриц A и B, имеет место соотношение $c^i_k = a^i_j b^j_k$ (по повторяющемуся индексу j производится суммирование).

Компоненты единичной (квадратной) матрицы E задаются символом Кронекера: $E = (\delta^i_j)$, где

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Матрица $D = (d^j_k)$ является обратной к матрице $C = (c^i_j)$, т.е. $D = C^{-1}$, если выполнено соотношение $c^i_j d^j_k = \delta^i_k$.

Предложение

а) *Матрица* $C_{\mathbf{e}'\to\mathbf{e}} = (c_i^{i'})$ *перехода от базиса* $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ *к базису* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *является обратной к матрице* $C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} = (c_{i'}^i)$ *перехода от* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *к* $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$, *т. е.*

$$C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} C_{\mathbf{e}'\to\mathbf{e}} = E.$$

В частности, матрица перехода всегда невырождена (обратима).

б) *Если* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$, $\mathbf{e}_{1''}, \ldots, \mathbf{e}_{n''}$ *— три базиса, то для соответствующих матриц перехода имеет место соотношение*

$$C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}''} = C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} C_{\mathbf{e}'\to\mathbf{e}''}.$$

Доказательство.

Первое утверждение следует из второго, если положить $\mathbf{e}_{i''} = \mathbf{e}_i$.

Докажем второе утверждение. Пусть $C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} = (c_{i'}^i)$, $C_{\mathbf{e}'\to\mathbf{e}''} = (c_{i''}^{i'})$, $C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}''} = (c_{i''}^i)$. Тогда

$$c_{i''}^i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i''} = c_{i''}^{i'} \mathbf{e}_{i'} = c_{i''}^{i'} c_{i'}^i \mathbf{e}_i = c_{i'}^i c_{i''}^{i'} \mathbf{e}_i,$$

откуда $c_{i''}^i = c_{i'}^i c_{i''}^{i'}$, т. е. $C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}''} = C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} C_{\mathbf{e}'\to\mathbf{e}''}$. □

1.7. Линейные отображения и изоморфизмы. Ядро и образ

Определение

Пусть V и W — линейные пространства над полем $\mathbf{k}$. Отображение $\mathcal{A}\colon V \to W$ называется линейным, если для любых векторов $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ и скаляра $\lambda \in \mathbf{k}$ выполнены равенства

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \mathcal{A}\boldsymbol{u} + \mathcal{A}\boldsymbol{v}, \quad \mathcal{A}(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda\mathcal{A}\boldsymbol{v}.$$

Биективное (т. е. взаимно однозначное) линейное отображение $\mathcal{A}\colon V \to W$ называется изоморфизмом. Пространства V и W называются изоморфными, если между ними существует изоморфизм.

Вот два важнейших примера линейных отображений.

Пример

1. Линейное отображение $f\colon V \to \mathbf{k}$ пространства V над полем $\mathbf{k}$ в поле $\mathbf{k}$ (рассматриваемое как 1-мерное линейное пространство) называется линейной функцией или линейным функционалом. Линейные функции мы вскоре отдельно рассмотрим более подробно.

2. Линейное отображение $\mathcal{A}\colon V \to V$ пространства V в себя называется линейным оператором. Линейные операторы будут подробно изучены во второй главе.

Теорема

Два пространства V и W над полем $\mathbf{k}$ изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые размерности.

Доказательство.

Из определения изоморфизма вытекает, что свойства системы векторов быть линейной независимой и порождать всё пространство сохраняются при изоморфизмах, т. е. при изоморфизме базис переходит в базис. Следовательно, если $\mathcal{A}\colon V \to W$ — изоморфизм, то $\dim V = \dim W$.

Пусть теперь $\dim V = \dim W = n$. Выберем базисы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ в V и W соответственно. Тогда формула

$$\mathcal{A}(x^i \boldsymbol{e}_i) = x^i \boldsymbol{f}_i$$

(где по i подразумевается суммирование) определяет линейное отображение $\mathcal{A}\colon V \to W$. Оно является биекцией, так как формула $\mathcal{A}^{-1}(x^i \boldsymbol{f}_i) = x^i \boldsymbol{e}_i$ определяет обратное отображение. Итак, $\mathcal{A}$ — изоморфизм. □

В качестве стандартного примера n-мерного пространства над $\mathbb{R}$ мы будем рассматривать координатное пространство $\mathbb{R}^n$; в силу предыдущей теоремы оно изоморфно любому другому n-мерному вещественному пространству.

Определение

Пусть $\mathcal{A}\colon V \to W$ — линейное отображение. Множество векторов $\boldsymbol{v} \in V$, для которых $\mathcal{A}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, называется ядром отображения $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Образ линейного отображения $\mathcal{A}\colon V \to W$, обозначаемый $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, определяется так же, как и для любого отображения: $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \{\mathcal{A}\boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \in V\}$.

Предложение

Пусть $\mathcal{A}\colon V \to W$ — линейное отображение. Тогда $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ является подпространством в V, а $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ является подпространством в W.

Доказательство.

Пусть $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{A}\boldsymbol{u} = \mathcal{A}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Тогда $\mathcal{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \mathcal{A}\boldsymbol{u} + \mathcal{A}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}$ и $\mathcal{A}(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda\mathcal{A}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Следовательно, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ и $\lambda\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$, а значит $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ — подпространство в V.

Пусть теперь $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$, т. е. существуют $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, такие, что $\mathcal{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}$ и $\mathcal{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y}$. Тогда $\mathcal{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ и $\mathcal{A}(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{x}$. Следовательно, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ и $\lambda\boldsymbol{x} \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$, а значит $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ — подпространство в W. □