Линейная алгебра и геометрия
Лекция 3

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.
Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

16 февраля 2021 г.

1.4. Прямая сумма подпространств.

Определение

Сумма $V_1 + V_2$ подпространств пространства V называется прямой (обозначение: $V_1 \oplus V_2$), если для любого вектора $\boldsymbol{v} \in V_1 + V_2$ представление $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, где $\boldsymbol{v}_1 \in V_1$ и $\boldsymbol{v}_2 \in V_2$, единственно.

Теорема

Следующие условия эквивалентны для подпространств V_1, V_2:

а) *сумма $V_1 + V_2$ прямая;*

б) $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$.

в) *если $\mathbf{0} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, где $\boldsymbol{v}_1 \in V_1$ и $\boldsymbol{v}_2 \in V_2$, то $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$;*

г) $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2)$;

Доказательство.

Мы докажем импликации а)$\Rightarrow$б)$\Rightarrow$в)$\Rightarrow$а) и б)$\Leftrightarrow$г).

Доказательство (продолжение).

а)$\Rightarrow$б). Пусть существует $\boldsymbol{v} \in V_1 \cap V_2$, $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$. Тогда $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v})$, где $\boldsymbol{v} \in V_1$ и $\boldsymbol{v} \in V_2$. Получаем, что представление вектора $\mathbf{0}$ в виде суммы векторов из V_1 и V_2 не единственно, т.е. сумма $V_1 + V_2$ не прямая.

б)$\Rightarrow$в). Если существует представление $\mathbf{0} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, где $\boldsymbol{v}_1 \in V_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in V_2$ и $\boldsymbol{v}_1 \neq \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{v}_1 \in V_1$ и $\boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{v}_2 \in V_2$, т.е. $\boldsymbol{v}_1 \in V_1 \cap V_2$ и $V_1 \cap V_2 \neq \{\mathbf{0}\}$. Противоречие.

в)$\Rightarrow$а). Пусть у вектора $\boldsymbol{v} \in V$ есть два разложения:
$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, где $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1 \in V_1$ и $\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2 \in V_2$. Тогда
$\mathbf{0} = (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}_1) + (\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{v}_2)$, где $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}_1 \in V_1$ и $\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{v}_2 \in V_2$.
Следовательно, $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$, т.е. два разложения вектора $\boldsymbol{v}$ совпадают.

б)$\Leftrightarrow$г). Эта эквивалентность вытекает из теоремы о размерности суммы, так как лишь тривиальное пространство может иметь нулевую размерность. $\square$

Понятие прямой суммы обобщается на несколько подпространств:

Определение

Сумма $V_1+\ldots+V_n$ подпространств пространства V называется **прямой**, если для любого вектора $\boldsymbol{v}\in V_1+\ldots+V_n$ представление $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\ldots+\boldsymbol{v}_n$, где $\boldsymbol{v}_i\in V_i$, единственно.

Теорема

Следующие условия эквивалентны для подпространств $V_1,\ldots,V_n$:

а) *сумма $V_1+\ldots+V_n$ прямая;*

б) $V_i\cap(V_1+\ldots+V_{i-1}+V_{i+1}+\ldots+V_n)=\{\mathbf{0}\}$ *для любого* $i=1,\ldots,n$;

в) $V_i\cap(V_{i+1}+\ldots+V_n)=\{\mathbf{0}\}$ *для любого* $i=1,\ldots,n-1$;

г) *если* $\mathbf{0}=\boldsymbol{v}_1+\ldots+\boldsymbol{v}_n$, *где* $\boldsymbol{v}_i\in V_i$, *то* $\boldsymbol{v}_1=\ldots=\boldsymbol{v}_n=\mathbf{0}$;

д) $\dim V_1+\ldots+\dim V_n=\dim(V_1+\ldots+V_n)$.

Доказательство теоремы проводится по индукции по n (опускаем).

Пример

При $n \geqslant 3$ условие б) в предыдущей теореме более сильное, чем условие $V_i \cap V_j = \{\mathbf{0}\}$ при $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Это последнее условие не гарантирует, что сумма подпространств прямая. Действительно, рассмотрим следующие три подпространства в $\mathbb{R}^2$ со стандартным базисом $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$:

$$V_1 = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle, \quad V_2 = \langle \boldsymbol{e}_2 \rangle, \quad V_3 = \langle \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \rangle$$

(или любые три попарно различные прямые, пересекающиеся в нуле).

Тогда $V_i \cap V_j = \{\mathbf{0}\}$ при $i \neq j$, но сумма $V_1 + V_2 + V_3$ не прямая, так как, например, вектор $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ допускает два различных представления в виде суммы $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$ с $\boldsymbol{v}_i \in V_i$, а именно
$\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} + (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$.

Заметим также, что $\dim V_i = 1$, а $\dim(V_1 + V_2 + V_3) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

Определение

Пусть $V_1, \ldots, V_n$ — линейные пространства над одним полем $\mathbf{k}$. Их **внешней прямой суммой**, обозначаемой через $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, называется линейное пространство, состоящее из всех упорядоченных наборов $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$, где $\boldsymbol{v}_i \in V_i$ с операциями, определёнными покомпонентно:

$$(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) + (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) := (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{v}_n),$$
$$\lambda \cdot (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) := (\lambda \boldsymbol{v}_1, \ldots, \lambda \boldsymbol{v}_n).$$

1.5. Факторпространство. Размерность факторпространства

Определение

Пусть V — линейное пространство, а $W \subset V$ — подпространство.

Классом смежности вектора $\boldsymbol{v} \in V$ по подпространству W называется множество $\boldsymbol{v} + W$, состоящее из всех векторов вида $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, где $\boldsymbol{w} \in W$.

Лемма

Равенство $\boldsymbol{v}_1 + W = \boldsymbol{v}_2 + W$ имеет место тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \in W$.

Доказательство.

Пусть $\boldsymbol{v}_1 + W = \boldsymbol{v}_2 + W$. Тогда $\boldsymbol{v}_1 \in \boldsymbol{v}_1 + W = \boldsymbol{v}_2 + W$, а значит найдётся такой вектор $\boldsymbol{w} \in W$, что $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}$. Следовательно, $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w} \in W$.

Доказательство (продолжение).

Обратно, пусть $\boldsymbol{v} := \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \in W$. Докажем, что $\boldsymbol{v}_1 + W \subset \boldsymbol{v}_2 + W$.

Возьмём произвольный вектор $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{v}_1 + W$. Тогда $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}$ для некоторого $\boldsymbol{w} \in W$. Мы имеем $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_2 + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$, где $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in W$. Следовательно, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{v}_2 + W$ и $\boldsymbol{v}_1 + W \subset \boldsymbol{v}_2 + W$. Противоположное включение $\boldsymbol{v}_2 + W \subset \boldsymbol{v}_1 + W$ доказывается аналогично. Итак, $\boldsymbol{v}_1 + W = \boldsymbol{v}_2 + W$. □

Определение

Факторпространством V/W линейного пространства V по подпространству W называется множество $\{\boldsymbol{v} + W : \boldsymbol{v} \in V\}$ всех классов смежности по подпространству W с операциями сложения и умножения на скаляры:

$$(\boldsymbol{u} + W) + (\boldsymbol{v} + W) := (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + W,$$
$$\lambda \cdot (\boldsymbol{v} + W) := \lambda \boldsymbol{v} + W.$$

Предложение

Приведённые выше операции определены на классах смежности корректно и задают на V/W структуру линейного пространства.

Доказательство.

Вначале проверим корректность определения операций, т.е. независимость результата операции от выбора вектора $\boldsymbol{v}$ в смежном классе $\boldsymbol{v}+W$.

Докажем корректность для сложения. Если $\boldsymbol{u}_1+W=\boldsymbol{u}_2+W$ и $\boldsymbol{v}_1+W=\boldsymbol{v}_2+W$, то $\boldsymbol{u}:=\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2\in W$ и $\boldsymbol{v}:=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\in W$ в силу леммы. Следовательно,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}_1+W)+(\boldsymbol{v}_1+W)=(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{v}_1)+W=(\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{v}_2)+(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+W=\\=(\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{v}_2)+W=(\boldsymbol{u}_2+W)+(\boldsymbol{v}_2+W),\end{aligned}$$

т.е. сложение определено корректно.

Корректность определения умножения на скаляры проверяется аналогично.

Доказательство (продолжение).

Теперь докажем, что V/W — линейное пространство. Свойства 1) и 2) из определения (ассоциативность и коммутативность сложения для смежных классов) вытекают из соответствующих свойств сложения в V. Нулевым элементом в V/W является смежный класс $\mathbf{0} + W = W$, а противоположным элементом для $\boldsymbol{v} + W$ является $(-\boldsymbol{v}) + W$. Проверим свойство 5):

$$\lambda\bigl((\boldsymbol{u}+W)+(\boldsymbol{v}+W)\bigr) = \lambda\bigl((\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+W\bigr) = \lambda(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+W = (\lambda\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{v})+W =$$
$$= (\lambda\boldsymbol{u} + W) + (\lambda\boldsymbol{v} + W) = \lambda(\boldsymbol{u} + W) + \lambda(\boldsymbol{v} + W).$$

Оставшиеся свойства 6)–8) проверяются аналогично. $\square$

Теорема

Пусть W — подпространство линейного пространства V. Тогда

$$\dim V/W = \dim V - \dim W.$$

Доказательство

Пусть $\dim V = n$, $\dim W = k$ и пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ — базис в W. Дополним его до базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в V. Докажем, что классы смежности

$$\boldsymbol{e}_{k+1} + W, \ldots, \boldsymbol{e}_n + W$$

образуют базис в V/W.

Доказательство (продолжение).

Вначале докажем, что классы смежности

$$\boldsymbol{e}_{k+1} + W, \ldots, \boldsymbol{e}_n + W \tag{1}$$

линейно независимы. Пусть

$$\lambda_{k+1}(\boldsymbol{e}_{k+1} + W) + \ldots + \lambda_n(\boldsymbol{e}_n + W) = \boldsymbol{0} + W.$$

Тогда $(\lambda_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1} + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n) + W = \boldsymbol{0} + W$, т.е. $\boldsymbol{v} := \lambda_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1} + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n \in W$ в силу леммы. Так как $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ — базис в W, мы можем записать $\boldsymbol{v} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{e}_k$. Тогда получаем

$$\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{e}_k - \lambda_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1} - \ldots - \lambda_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}.$$

Так как $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — базис в V, отсюда вытекает, что $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, т.е. классы (1) линейно независимы.

Доказательство (окончание).

Осталось доказать, что классы смежности

$$\boldsymbol{e}_{k+1} + W, \ldots, \boldsymbol{e}_n + W \tag{2}$$

порождают всё пространство V/W.

Возьмём произвольный вектор $\boldsymbol{v} + W \in V/W$. Разложим вектор $\boldsymbol{v}$ по базису в V:

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{e}_k + \lambda_{k+1} \boldsymbol{e}_{k+1} + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} + W &= (\lambda_{k+1} \boldsymbol{e}_{k+1} + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n) + (\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{e}_k) + W = \\ &= (\lambda_{k+1} \boldsymbol{e}_{k+1} + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n) + W = \\ &= \lambda_{k+1}(\boldsymbol{e}_{k+1} + W) + \ldots + \lambda_n(\boldsymbol{e}_n + W).\end{aligned}$$

Итак, (2) — базис в V/W, а значит $\dim V/W = n - k$. □