Линейная алгебра и геометрия

Лекция 2

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

12 февраля 2021 г.

Определение

Линейно независимая система векторов $\{\boldsymbol{v}_i \colon i \in I\}$ называется **базисом** пространства V, если каждый вектор $\boldsymbol{v} \in V$ представляется линейной комбинацией $\sum_{i \in I} \lambda_i \boldsymbol{v}_i$. Другими словами, базисом называется **максимальная** (по включению) линейно независимая система векторов в пространстве V.

Пространство V называется **конечномерным**, если в нём существует базис, состоящий из конечного числа векторов. В противном случае пространство называется **бесконечномерным**.

Предложение

Если $\{\mathbf{v}_i \colon i \in I\}$ *— базис пространства* V*, то представление любого вектора* $\mathbf{v} \in V$ *в виде линейной комбинации* $\sum_{i\in I} \lambda_i \mathbf{v}_i$ *единственно.*

Доказательство.

Действительно, если $\mathbf{v} = \sum_{i\in I} \lambda_i \mathbf{v}_i = \sum_{i\in I} \mu_i \mathbf{v}_i$, то получаем $\mathbf{0} = \sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i)\mathbf{v}_i$. Так как система $\{\mathbf{v}_i \colon i \in I\}$ линейно независима, из последнего равенства вытекает, что $\lambda_i = \mu_i$, т.е. два представления $\mathbf{v}$ в виде линейных комбинаций совпадают. $\square$

Теорема

В конечномерном пространстве все базисы состоят из одного числа элементов.

Доказательство этой теоремы будет опираться на следующую лемму.

Лемма

Пусть $e_1, \ldots, e_m$ и $f_1, \ldots, f_n$ — две (конечных) линейно независимых системы векторов, причём вторая система содержится в линейной оболочке первой системы. Тогда $n \leqslant m$.

Доказательство

Пусть $\boldsymbol{f}_j = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_{mj}\boldsymbol{e}_m$, $a_{ij} \in \mathbf{k}$, $j = 1, \ldots, n$.
Так как $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ — линейно независимая система, мы имеем

$$x_1\boldsymbol{f}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{f}_n = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = \ldots = x_n = 0. \tag{1}$$

Подставляя в линейную комбинацию (1) выражения $\boldsymbol{f}_i$ через $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$, получаем:

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = x_1(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_{m1}\boldsymbol{e}_m) + \ldots + x_n(a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_{mn}\boldsymbol{e}_m) = \\ = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)\boldsymbol{e}_1 + \ldots + (a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)\boldsymbol{e}_m.\end{aligned}$$

Так как $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ — линейно независимая система, предыдущее равенство равносильно системе уравнений:

Лемма

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ и $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ — две (конечных) линейно независимых системы векторов, причём вторая система содержится в линейной оболочке первой системы. Тогда $n \leqslant m$.

Доказательство (продолжение).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Если $n > m$, то эта система имеет ненулевое решение, что противоречит (1). $\square$

Теорема

В конечномерном пространстве все базисы состоят из одного числа элементов.

Доказательство.

Пусть V — конечномерное пространство. По определению, в V существует конечный базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$.

Пусть $\{\boldsymbol{f}_i \colon i \in I\}$ — другой базис. Если это базис бесконечен, то в нём содержится конечная линейно независимая система $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$, где $n > m$. При этом, так как $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ — базис, мы имеем $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n\} \subset \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m \rangle$, что противоречит лемме.

Следовательно базис $\{\boldsymbol{f}_i \colon i \in I\}$ конечен, т.е. имеет вид $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$.

Тогда $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n\} \subset \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m \rangle$ и $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m\} \subset \langle \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n \rangle$, и из леммы вытекает, что $m = n$. □

Определение

Размерностью конечномерного линейного пространства V (обозначение: $\dim V$) называется число элементов в любом базисе V. Если же V бесконечномерно, то мы пишем $\dim V = \infty$.

Размерность линейной оболочки системы векторов $\{\boldsymbol{e}_i : i \in I\}$ называется **рангом** системы векторов.

Замечание

В пространстве $\{\mathbf{0}\}$ базисом естественно считать пустое множество $\varnothing$. Мы имеем $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$, так как пустое множество состоит из 0 элементов.

Предложение

Подпространство W конечномерного пространства V конечномерно, причём $\dim W \leqslant \dim V$, и равенство достигается только при $W = V$.

Доказательство.

Пусть $\dim V = m$ и $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ — базис пространства V. Если $\dim W > m$, то в W найдётся линейно независимая система $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ с $n > m$. Тогда $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n\} \subset \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m \rangle = V$, что противоречит лемме. Следовательно, $\dim W \leqslant \dim V$.

Пусть $\dim W = \dim V = m$ и пусть $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ — базис в W. Тогда каждый вектор $\boldsymbol{e}_i$ линейно выражается через $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$, так как иначе мы бы получили линейно независимую систему $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m, \boldsymbol{e}_i$ из $m+1$ векторов в V, что противоречит теореме. Следовательно, любой вектор из V лежит в $\langle \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m \rangle = W$, т.е. $V = W$. $\square$

Теорема

Любой базис подпространства W конечномерного пространства V можно дополнить до базиса всего пространства V.

Доказательство.

Согласно предыдущему предложению, пространство W конечномерно; пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ — его базис. Если $W = V$, то $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ — базис в V и доказывать нечего. В противном случае в V найдётся вектор $\boldsymbol{e}_{r+1} \notin \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r \rangle = W$. Рассмотрим подпространство $W_1 = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1} \rangle \subset V$. Если $W_1 = V$, то всё доказано. В противном случае аналогично строим подпространство $W_2 = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, \boldsymbol{e}_{r+2} \rangle \subset V$, и так далее.

Пусть $k = \dim V - \dim W$. Тогда на k-м шаге мы получим подпространство $W_k \subset V$ с $\dim W_k = \dim V$. Согласно предыдущему предложению, $W_k = V$, а значит мы дополнили базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ в W до базиса в V векторами $\boldsymbol{e}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{r+k}$. $\square$

Замечание

На самом деле предыдущая теорема имеет место и в бесконечномерном случае. В частности, в любом пространстве (даже бесконечномерном) существует базис. Доказательство этого факта, хотя и не сложно, использует абстрактные теоретико-множественные построения (лемму Цорна), которые выходят за рамки данного курса. Подробности можно найти в книге Кострикина и Манина.

Пример

1. В арифметическом пространстве $\mathbf{k}^n$ имеется стандартный базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, где $\boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ — строка, в которой на i-м месте стоит 1, а на остальных местах — нули. Таким образом, $\dim \mathbf{k}^n = n$.

Пример

2. В пространстве $\mathbf{k}_n[x]$ многочленов степени $\leqslant n$ имеется базис из одночленов $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Таким образом, $\dim \mathbf{k}_n[x] = n + 1$.
В пространстве $\mathbf{k}[x]$ всех многочленов имеется бесконечный базис из одночленов $1, x, x^2, x^3, \ldots$ всех степеней. Таким образом, $\dim \mathbf{k}[x] = \infty$.

3. В пространстве финитных последовательностей $\mathbb{R}^\infty$ имеется бесконечный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots$, где $\boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ — последовательность, в которой на i-м месте стоит 1, а на остальных местах — нули.
Заметим, что эта же система $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots$ *не является* базисом в пространстве $\widehat{\mathbb{R}}^\infty$ всех последовательностей. Действительно, например, последовательность, состоящая из одних единиц не представляется в виде (конечной) линейной комбинации последовательностей $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots$.

Далее все пространства мы будем предполагать конечномерными, если явно не указано противное.

Бесконечномерным пространствам будет посвящён отдельный курс функционального анализа. В этом курсе линейной алгебры мы лишь иногда будем встречаться с ними в примерах.

1.3. Пересечение и сумма подпространств

Предложение

Пересечение $V_1 \cap V_2$ подпространств пространства V также является подпространством.

Доказательство.

Для любых $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V_1 \cap V_2$ и $\lambda \in \mathbf{k}$ сумма $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ и произведение $\lambda \boldsymbol{v}$ также лежат и в V_1, и в V_2, а значит и в пересечении $V_1 \cap V_2$. $\square$

В отличие от пересечения, объединение подпространств $V_1 \cup V_2$ в общем случае не будет линейным подпространством.

Определение

Суммой $V_1 + V_2$ подпространств V_1 и V_2 пространства V называется множество всех векторов $\boldsymbol{v} \in V$, которые можно представить в виде суммы $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, где $\boldsymbol{v}_1 \in V_1$ и $\boldsymbol{v}_2 \in V_2$.

Предложение

Сумма подпространств является линейной оболочкой их объединения: $V_1 + V_2 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$. *Таким образом,* $V_1 + V_2$ *является линейным подпространством.*

Доказательство.

Включение $V_1 + V_2 \subset \langle V_1 \cup V_2 \rangle$ следует из того, что вектор $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V_1 \cup V_2$.

Докажем обратное включение $\langle V_1 \cup V_2 \rangle \subset V_1 + V_2$. Рассмотрим линейную комбинацию $\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n$ векторов $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in V_1 \cup V_2$. Можно считать, что $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ лежат в V_1, а $\boldsymbol{u}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ лежат в V_2. Тогда мы имеем $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, где $\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{u}_k \in V_1$ и $\boldsymbol{v}_2 = \lambda_{k+1} \boldsymbol{u}_{k+1} + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n \in V_2$. Следовательно, $\boldsymbol{v} \in V_1 + V_2$. □

Теорема

Для любых подпространств V_1 и V_2 линейного пространства V имеет место равенство

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2).$$

Доказательство

Выберем базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ пространства $V_1 \cap V_2$. Воспользовавшись предыдущей теоремой, дополним его до базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_l$ пространства V_1 и до базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_m$ пространства V_2. Тогда мы имеем

$$\dim(V_1 \cap V_2) = k, \quad \dim V_1 = k + l, \quad \dim V_2 = k + m. \tag{2}$$

Докажем, что $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_l, \boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_m$ — базис пространства $V_1 + V_2$. Прежде всего заметим, что так как $V_1 + V_2 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$, любой вектор из $V_1 + V_2$ линейно выражается через эту систему векторов.

Доказательство (продолжение).

Остаётся проверить, что система $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_l, \boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_m$ линейно независима. Пусть имеет место равенство

$$\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{e}_k + \mu_1 \boldsymbol{f}_1 + \ldots + \mu_l \boldsymbol{f}_l + \nu_1 \boldsymbol{g}_1 + \ldots + \nu_m \boldsymbol{g}_m = \mathbf{0}. \qquad (3)$$

Перепишем его в виде

$$\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{e}_k + \mu_1 \boldsymbol{f}_1 + \ldots + \mu_l \boldsymbol{f}_l = -\nu_1 \boldsymbol{g}_1 - \ldots - \nu_m \boldsymbol{g}_m.$$

Вектор, стоящий в обеих частях этого равенства, лежит как в V_1, так и в V_2. Следовательно, он лежит в $V_1 \cap V_2$ и линейно выражается через $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$. Так как векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_l$ линейно независимы по построению, мы получаем, что $\mu_1 = \ldots = \mu_l = 0$. Аналогичным образом доказывается, что $\nu_1 = \ldots = \nu_m = 0$. Тогда из линейной независимости $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ и (3) следует, что $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Итак, система $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_l, \boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_m$ порождает пространство $V_1 + V_2$ и линейно независима. Следовательно, это — базис в $V_1 + V_2$ и $\dim(V_1 + V_2) = k + l + m$. Отсюда и из (2) вытекает требуемое равенство. $\square$