Линейная алгебра и геометрия

Лекция 1

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 1 курс, весна 2021 г.
Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

9 февраля 2021 г.

1.1. Линейные пространства и подпространства.

Определение

Линейным (или векторным) пространством над полем $\mathbf{k}$ называется множество V с заданными на нём операциями сложения «$+$» двух элементов множества V,

$$+\colon V \times V \to V, \qquad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$$

и умножения «$\cdot$» элементов V на элементы поля $\mathbf{k}$,

$$\cdot\colon \mathbf{k} \times V \to V, \qquad (\lambda, \boldsymbol{v}) \mapsto \lambda \cdot \boldsymbol{v},$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ для любых $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$;
2) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ для любых $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$;
3) существует такой элемент $\mathbf{0} \in V$, что $\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$ для любого $\boldsymbol{v} \in V$;
4) для любого $\boldsymbol{v} \in V$ существует такой элемент $-\boldsymbol{v} \in V$, что $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$;

5) $\lambda \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \lambda \cdot \boldsymbol{u} + \lambda \cdot \boldsymbol{v}$ для любых $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ и $\lambda \in \mathbf{k}$;
6) $(\lambda + \mu) \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \cdot \boldsymbol{v} + \mu \cdot \boldsymbol{v}$ для любых $\boldsymbol{v} \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$;
7) $\lambda \cdot (\mu \cdot \boldsymbol{v}) = (\lambda\mu) \cdot \boldsymbol{v}$ для любых $\boldsymbol{v} \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$;
8) $1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ для любого $\boldsymbol{v} \in V$.

Элементы линейного пространства называются векторами. Свойства 1)–4) означают, что V является абелевой (коммутативной) группой относительно операции сложения. Элемент $\mathbf{0}$ называется нулевым вектором, а элемент $(-\boldsymbol{v})$ называется противоположным вектором к $\boldsymbol{v}$.

Элементы поля $\mathbf{k}$ иногда называют скалярами. Свойства 5)–8) означают, что поле $\mathbf{k}$ линейно действует на V. Часто мы будем опускать знак умножения $\cdot$.

За исключением некоторых примеров, в качестве поля $\mathbf{k}$ у нас будет выступать поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ или поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Далее, говоря о пространстве, мы будем иметь ввиду линейное пространство.

Вот некоторые простые свойства линейных пространств.

Предложение

а) $0\boldsymbol{v} = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ *для любых* $\boldsymbol{v} \in V$, $\lambda \in \mathbf{k}$;

б) $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$ *для любого* $\boldsymbol{v} \in V$;

в) *если* $\lambda\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, *то либо* $\lambda = 0$, *либо* $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

Доказательство.

Докажем а). Действительно, $0\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{v} = (0+0)\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v}$, откуда $0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ по свойству сокращения в абелевой группе. Аналогично,
$\lambda\mathbf{0} + \lambda\mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = \lambda\mathbf{0}$, т. е. $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Докажем б). Действительно,
$\boldsymbol{v} + (-1)\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v} + (-1)\boldsymbol{v} = (1 + (-1))\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$,
т. е. вектор $(-1)\boldsymbol{v}$ противоположен к $\boldsymbol{v}$.

Наконец, докажем в). Если $\lambda \neq 0$, то
$\mathbf{0} = \lambda^{-1}(\lambda\boldsymbol{v}) = (\lambda^{-1}\lambda)\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$. $\square$

Пример

1. Множество $\{\mathbf{0}\}$, состоящее из одного элемента $\mathbf{0}$, является линейным пространством над любым полем.

2. Множества векторов на прямой, на плоскости, в пространстве, являются линейными пространствами над полем $\mathbb{R}$.

3. Поле $\mathbf{k}$ является векторным пространством над самим собой.

4. Поле $\mathbb{C}$ является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$, а поле $\mathbb{R}$ является линейным пространством над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Более общо, если $\mathbf{k}_1$ — подполе в $\mathbf{k}_2$ (т. е. $\mathbf{k}_2$ является расширением поля $\mathbf{k}_1$), то $\mathbf{k}_2$ является линейным пространством над $\mathbf{k}_1$.

5. Пусть

$$\mathbf{k}^n := \{(x_1, \ldots, x_n)\colon x_i \in \mathbf{k}\}$$

— множество последовательностей (строк) фиксированной длины n из элементов поля $\mathbf{k}$.

Операции покомпонентного сложения и умножения на скаляры, т.е.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n),$$

задают на $\mathbf{k}^n$ структуру линейного пространства над $\mathbf{k}$. Оно называется n-мерным координатным (или арифметическим) пространством над $\mathbf{k}$.

Мы в основном будем иметь дело с пространствами $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$.

При $n = 1$ мы получаем пространство из примера 3.

6. Множество решений однородной системы линейных уравнений является линейным пространством.

7. Множество функций на произвольном множестве X со значениями в поле $\mathbf{k}$, обозначаемое $\mathbf{k}^X$, является линейным пространством относительно операций поточечного сложения (т.е. значение функции $f+g$ в точке $x \in X$ полагается равным $f(x)+g(x)$) и поточечного умножения на скаляры (т. е. $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$). В случае, когда X — конечное множество из n элементов, мы получаем пространство $\mathbf{k}^n$ из предыдущего примера.

8. Множество $C(\mathbb{R})$ непрерывных функций на вещественной прямой и множество $C[a,b]$ непрерывных функций на отрезке являются линейными пространствами над $\mathbb{R}$. Также линейными пространствами являются множества дифференцируемых функций (на прямой или на отрезке).

9. Рассмотрим множество $\mathbb{R}^\infty$, состоящее из бесконечных последовательностей вещественных чисел, в которых лишь конечное число членов отлично от нуля (такие последовательности называются финитными). Тогда $\mathbb{R}^\infty$ — линейное пространство относительно операций поэлементного сложения и умножения на числа.
Пространство $\mathbb{R}^\infty$ можно отождествить с бесконечным объединением $\bigcup_{n\geqslant 0}\mathbb{R}^n$.

Пространство $\widehat{\mathbb{R}}^\infty = \mathbb{R}^\mathbb{N}$ *всех* бесконечных последовательностей также является линейным пространством.

10. Множество $\mathbf{k}[x]$ многочленов от одной переменной с коэффициентами в $\mathbf{k}$ является линейным пространством. Также линейным пространством является множество $\mathbf{k}_n[x]$ многочленов степени не выше n.

11. Множество всех матриц размера $m \times n$ с элементами из $\mathbf{k}$ образует линейное пространство $\mathrm{Mat}_\mathbf{k}(m, n)$ относительно операций сложения матриц и поэлементного умножения матриц на числа. При $m = 1$ мы получаем пространство строк $\mathbf{k}^n$.

В предыдущих примерах мы столкнулись с ситуацией, когда подмножество линейного пространства само является линейным пространством. Это приводит к следующему определению.

Определение

Непустое подмножество $W \subset V$ линейного пространства V называется подпространством, если для любых векторов $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ и скаляра $\lambda \in \mathbf{k}$ мы имеем $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$ и $\lambda \boldsymbol{u} \in W$.

Другими словами, W — подпространство, если W само является линейным пространством относительно операций, заданных в пространстве V.

Пример

1. $\{\mathbf{0}\}$ является подпространством в любом пространстве V.

2. Множество векторов, коллинеарных заданному вектору, является подпространством в пространстве всех векторов на плоскости или в пространстве.

3. Пространство $C(\mathbb{R})$ непрерывных функций является подпространством в пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ всех функций на $\mathbb{R}$.

4. Пространство $\mathbb{R}^\infty$ финитных последовательностей является подпространством в пространстве $\widehat{\mathbb{R}}^\infty = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ всех последовательностей.

5. $\mathbf{k}_n[x]$ является подпространством в $\mathbf{k}_m[x]$ при $m \geqslant n$, а также в $\mathbf{k}[x]$.

1.2. Линейная зависимость. Базис. Размерность

Пусть V — линейное пространство над полем $\mathbf{k}$.

Определение

Линейной комбинацией конечной системы (множества) векторов $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ пространства V называется формальная сумма вида $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k$, где $\lambda_i \in \mathbf{k}$.

Слово «формальная» означает, что мы различаем линейную комбинацию $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k$ и вектор $\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k$, **представляемый** этой линейной комбинацией.

Например, в пространстве $\mathbb{R}^3$ различные линейные комбинации $2(1,0,0) + (-2)(0,1,0) + 2(-1,1,0)$, $0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(-1,1,0)$ и $5(0,0,0)$ представляют один и тот же вектор $\mathbf{0} = (0,0,0)$.

Линейной комбинацией бесконечной системы векторов $\{\boldsymbol{v}_i \colon i \in I\}$ называется формальная сумма вида $\sum_{i\in I} \lambda_i \boldsymbol{v}_i$, в которой лишь **конечное** число скаляров λ_i отлично от нуля. По-другому линейную комбинацию системы $\{\boldsymbol{v}_i \colon i \in I\}$ можно определить как функцию $I \to \mathbf{k}$, $i \mapsto \lambda_i$, которая принимает ненулевое значение только на конечном числе индексов.

Линейная комбинация $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n$ или $\sum_{i\in I} \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ называется **тривиальной**, если в ней все коэффициенты λ_i равны нулю.

В примере из $\mathbb{R}^3$ выше линейные комбинации $2(1,0,0) + (-2)(0,1,0) + 2(-1,1,0)$ и $5(0,0,0)$ нетривиальны, а $0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(-1,1,0)$ тривиальна; при этом все они представляют нулевой вектор. Это приводит к следующему определению.

Система векторов $\{\boldsymbol{v}_i\colon i \in I\}$ (конечная или бесконечная) называется линейно зависимой, если существуют числа λ_i, не все равные нулю, такие, что $\sum_{i\in I} \lambda_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$ (т. е. существует нетривиальная линейная комбинация векторов системы, представляющая нулевой вектор). В противном случае система называется линейно независимой.

Линейной оболочкой системы векторов $\{\boldsymbol{v}_i\colon i \in I\}$ называется множество векторов из V, представляемых линейными комбинациями векторов этой системы. Для линейной оболочки используется обозначение $\langle \boldsymbol{v}_i\colon i \in I\rangle$ или $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\rangle$ в случае конечной системы.

Предложение

Линейная оболочка $\langle \mathbf{v}_i : i \in I \rangle$ *является линейным подпространством в* V. *Более того,* $\langle \mathbf{v}_i : i \in I \rangle$ *является наименьшим по включению линейным подпространством, содержащим все векторы системы* $\{\mathbf{v}_i : i \in I\}$.

Доказательство.

Сумма векторов системы и результат умножения вектора системы на скаляр представляются линейными комбинациями и потому принадлежат линейной оболочке. Следовательно, $\langle \mathbf{v}_i : i \in I \rangle$ — подпространство.

Если W — произвольное подпространство, содержащее все векторы из $\{\mathbf{v}_i : i \in I\}$, то W также содержит все векторы, представляемые их линейными комбинациями, а значит W содержит $\langle \mathbf{v}_i : i \in I \rangle$. □

Лемма

Если система векторов $\{\boldsymbol{v}_i \colon i \in I\}$ линейно зависима, то один из векторов системы является линейной комбинацией остальных.

Доказательство.

Пусть $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}$, причем существует $\lambda_i \neq 0$. Тогда

$$\lambda_i \boldsymbol{v}_i = -\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 - \ldots - \lambda_{i-1} \boldsymbol{v}_{i-1} - \lambda_{i+1} \boldsymbol{v}_{i+1} - \ldots - \lambda_k \boldsymbol{v}_k.$$

Умножив обе части этого равенства на λ_i^{-1}, получим, что $\boldsymbol{v}_i$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. $\square$