

**ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА  
ПО КУРСУ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»  
КАЗ. ФИЛ. МГУ, АСТАНА**

ЛЕКТОРЫ: Д. В. МИЛЛИОНЩИКОВ, Т. Е. ПАНОВ

Часть 1.

- (1) Векторные (линейные) пространства: определение и основные примеры.
- (2) Линейная зависимость и независимость векторов, линейная оболочка.
- (3) Ранг системы векторов и максимальная система векторов подмножества векторного пространства.
- (4) Размерность векторного пространства, пример бесконечномерного векторного пространства, базис векторного пространства.
- (5) Координаты вектора, замена координат.
- (6) Изоморфизм векторных пространств, теорема об изоморфизме векторных пространств одной размерности.
- (7) Двойственное (сопряженное) векторное пространство, двойственный базис.
- (8) Подпространства и два способа их задания.
- (9) Сумма и пересечение подпространств, формула для размерности суммы подпространств.
- (10) Прямая сумма двух подпространств: эквивалентность различных определений.
- (11) Прямая сумма трех и более подпространств.

Часть 2.

- (12) Евклидово пространство, неравенство Коши-Буняковского и его следствия.
- (13) Ортогональные системы векторов, метод ортогонализации базиса Грама-Шмидта.
- (14) Ортогональное дополнение и теорема о разложении евклидова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.
- (15) Расстояние от вектора до подпространства и ортогональная проекция.
- (16) Матрица Грама, теорема об ее определителе, многомерный объем.
- (17) Метод наименьших квадратов.
- (18) Эрмитово (унитарное) пространство, примеры.
- (19) Аффинное пространство.
- (20) Билинейная функция и ее матрица, закон преобразования матрицы билинейной функции.
- (21) Симметричные и кососимметричные билинейные функции, квадратичные формы, формула поляризации.
- (22) Метод Лагранжа выделения полных квадратов.
- (23) Теорема об индексе инерции квадратичной формы.
- (24) Теорема Якоби.
- (25) Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

Часть 3.

- (26) Линейные отображения и операторы, их матрицы и законы их преобразования при заменах координат.
- (27) Ядро и образ линейного оператора.
- (28) Многочлены от оператора. Минимальный аннулирующий многочлен.

- (29) Определитель и след линейного оператора. Невырожденные операторы, критерий невырожденности. Линейное пространство операторов.
- (30) Проекторы, их алгебраическая характеристика.
- (31) Комплексная структура. Комплексификация пространства и оператора.
- (32) Факторпространство. Размерность факторпространства.
- (33) Инвариантное подпространство. Ограничение оператора и фактор-оператор. Вид матрицы оператора в соответствующем базисе.
- (34) Собственные значения, собственные векторы. Собственное подпространство, связь его размерности и кратности соответствующего ему корня характеристического многочлена.
- (35) Теорема о существовании одномерного или двумерного инвариантного подпространства.
- (36) Теорема Гамильтона–Кэли.
- (37) Диагонализируемые операторы. Критерий диагонализируемости.
- (38) Нильпотентные операторы. Нормальный вид.
- (39) Корневые векторы. Теорема о разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств.
- (40) Жорданова нормальная форма оператора. Теорема Жордана.
- (41) Вычисление многочленов и функций от матриц при помощи жордановой формы и метода интерполяции.
- (42) Экспонента линейного оператора (без обоснования сходимости), её свойства.

#### Часть 4.

- (43) Сопряжённые операторы в евклидовых и эрмитовых пространствах.
- (44) Самосопряжённые операторы. Канонический вид.
- (45) Самосопряжённые проекторы. Спектральное разложение самосопряжённого оператора.
- (46) Кососимметрические и косоэрмитовы операторы. Канонический вид. Эрмитово разложение.
- (47) Ортогональные и унитарные операторы. Канонический вид.
- (48) Положительные самосопряжённые операторы. Полярное разложение.
- (49) Нормальные операторы. Ортогональная диагонализируемость.
- (50) Симметрические билинейные функции в евклидовых пространствах. Канонический вид.
- (51) Приведение пары форм к диагональному виду. Собственные векторы и собственные значения пары форм.

#### Часть 5.

- (51) Полилинейные функции.
- (52) Тензоры: координатное определение.
- (53) Тензорное произведение, свёртка.
- (54) Базис в пространстве тензоров.
- (55) Симметрические и кососимметрические тензоры, симметризация и альтернирование.
- (56) Внешнее произведение кососимметрических тензоров, внешние формы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Ге] И. М. Гельфанд. *Лекции по линейной алгебре*. Москва, «Наука», 1974.
- [КМ] А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. *Линейная алгебра и геометрия*. Москва, «Наука», 1986.
- [Па] Т. Е. Панов. *Линейная алгебра и геометрия. Курс лекций*.  
<http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching/>