

**ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА
ПО КУРСУ «ВВЕДЕНИЕ В ТОПОЛОГИЮ»**

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Топологические пространства, непрерывные отображения, гомеоморфизмы.
2. Связность, компактность, хаусдорфовость. Непрерывное взаимно однозначное отображение компактного пространства на хаусдорфово есть гомеоморфизм.
3. Фактор-топология, факторпространства, примеры.
4. Топология произведения, универсальное свойство.
5. Декартовы и кодекартовы квадраты. Расслоенное произведение (коамальгама), склейка (амальгама), универсальные свойства, примеры.
6. Топология на пространстве отображений (компактно-открытая топология), связь с топологией произведения. Экспоненциальный закон (без доказательства).
7. Цилиндр, конус, надстройка, джойн (соединение).
8. Пространства с отмеченной точкой, их произведение, букет и приведённое произведение (смаш-произведение).
9. Пространства путей и петель. Гомеоморфизм сопряжения (связь отображений из надстройки и отображений в пространство петель).
10. Гомотопия, два определения и их связь через экспоненциальный закон. Гомотопические эквивалентности, стягиваемость, примеры.
11. Клеточные пространства, аксиоматическое определение. Операция приклеивания клетки. Клеточное разбиение произведения клеточных пространств.
12. Примеры клеточных пространств: сферы, конечные и бесконечные проективные пространства, классические поверхности.
13. Свойство продолжения гомотопии, связь с ретракцией.
14. Свойство продолжения гомотопии для клеточных пар. Следствие для факторпространства по стягиваемому подпространству.
15. Теорема о клеточной аппроксимации. Гомотопическая тривиальность отображений $S^k \rightarrow S^n$ при $k < n$.
16. Гомотопия петель. Произведение петель, его свойства.
17. Фундаментальная группа пространства с отмеченной точкой. Её поведение при отображениях. Связь с гомотопией и гомотопической эквивалентностью.
18. Зависимость фундаментальной группы от отмеченной точки.
19. Фундаментальная группа окружности.
20. Следствия вычисления $\pi_1(S^1)$: несуществование ретракции $D^2 \rightarrow S^1$, теорема Брауэра, основная теорема алгебры.

21. Свободное произведение групп. Приведённые слова. Ассоциативность умножения приведённых слов. Свободная группа. Задание группы образующими и соотношениями. Абелианизация.
22. Теорема ван Кампена.
23. Линейно связное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с единственной нульмерной клеткой.
24. Задание фундаментальной группы клеточного пространства образующими и соотношениями.
25. Накрытия. Примеры. Свойство поднятия путей.
26. Свойство поднятия гомотопии. Существование и единственность накрывающей гомотопии для накрытий.
27. Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный отображением накрытия. Связь числа точек в прообразе точки при накрытии и индекса подгруппы.
28. Теорема о поднятии отображений для накрытий (для отображений из локально линейно связных пространств).
29. Существование односвязного накрытия над линейно связным, локально линейно связным и полулокально односвязным пространством. Понятие об универсальном накрытии.
30. Классификация накрытий подгруппами в фундаментальной группе.
31. Графы. Существование максимального дерева. Фундаментальная группа графа.
32. Накрытия над графами. Теорема Нильсена–Шрайера о подгруппах свободной группы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Васильев. *Введение в топологию*. Москва, Фазис, 1997.
- [2] О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов. *Элементарная топология*. Москва, МЦНМО, 2010.
- [3] Т. Е. Панов. *Введение в топологию / Топология-1. Курс лекций*. <http://higeom.math.msu.ru/people/taras/#teaching>
- [4] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. *Курс гомотопической топологии*. Москва, «Наука», 1989.
- [5] А. Хатчер. *Алгебраическая топология*. Москва, МЦНМО, 2011.