

**ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА
ПО КУРСУ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»**

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

Часть 1. Линейные пространства.

1. Линейные пространства и подпространства. Примеры.
2. Линейная зависимость, базис, размерность.
3. Пересечение и сумма подпространств, их размерности.
4. Прямая сумма подпространств, эквивалентные определения. Внешняя прямая сумма.
5. Факторпространство. Размерность факторпространства.
6. Координаты вектора. Закон изменения координат при замене базиса.
7. Линейные отображения и изоморфизмы. Ядро и образ, их размерности.
8. Матрица линейного отображения. Преобразование матрицы линейного отображения при заменах базисов.
9. Двойственное пространство V^* , двойственный базис. Отсутствие изоморфизма $V \cong V^*$ в бесконечномерном случае (пример).
10. Второе двойственное пространство, канонический изоморфизм $V \cong V^{**}$.
11. Сопряжённое линейное отображение, его матрица.

Часть 2. Линейные операторы.

12. Матрица линейного оператора. Определитель и след оператора. Невырожденные операторы. Группы GL_n и SL_n .
13. Проекторы, их алгебраическая характеристика.
14. Многочлены от оператора. Минимальный аннулирующий многочлен.
15. Овеществление пространства и оператора.
16. Оператор комплексной структуры. Комплексификация пространства и оператора.
17. Инвариантное подпространство. Ограничение оператора и фактор-оператор. Вид матрицы оператора в соответствующем базисе. Собственные значения, собственные векторы.
18. Характеристический многочлен. Связь размерности собственного подпространства и кратности соответствующего ему корня характеристического многочлена.
19. Теорема о существовании одномерного или двумерного инвариантного подпространства.
20. Теорема Гамильтона–Кэли.
21. Диагонализуемые операторы. Критерий диагонализуемости.
22. Нильпотентные операторы. Нормальный вид.
23. Корневые векторы. Теорема о разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств.
24. Жорданова нормальная форма оператора. Теорема Жордана.
25. Вычисление многочленов и функций от матриц при помощи жордановой формы и метода интерполяции.
26. Экспонента линейного оператора (без обоснования сходимости), её свойства.

Часть 3. Геометрия евклидовых и эрмитовых пространств.

27. Аффинные пространства, системы координат, подпространства.
28. Евклидовы и эрмитовы пространства, примеры. Неравенство Коши–Буняковского, неравенство треугольника.

29. Ортогональные системы векторов, ортонормированные базисы. Ортогонализация Грама–Шмидта.
30. Ортогональные и унитарные матрицы. QR -разложение.
31. Ортогональное дополнение. Проекция и ортогональная составляющая. Угол между вектором и подпространством.
32. Аффинные евклидовы пространства. Расстояние от точки до подпространства. Расстояние между подпространствами.
33. Определитель матрицы Грама и многомерный объём.
34. Метод наименьших квадратов.
35. Изоморфизмы евклидовых и эрмитовых пространств. Канонический изоморфизм евклидова пространства и его сопряжённого.

Часть 4. Операторы в евклидовых и эрмитовых пространствах

36. Сопряжённые операторы в евклидовых и эрмитовых пространствах.
37. Самосопряжённые операторы. Канонический вид.
38. Самосопряжённые проекторы. Спектральное разложение самосопряжённого оператора.
39. Кососимметрические и косоэрмитовы операторы. Канонический вид. Эрмитово разложение.
40. Ортогональные и унитарные операторы. Канонический вид. Группы O_n и SO_n , U_n и SU_n .
41. Положительные самосопряжённые операторы. Полярное разложение.
42. Нормальные операторы, связь с диагонализуемостью в ортонормированном базисе.

Часть 5. Билинейные и полуторалинейные функции

43. Билинейные и полуторалинейные функции, их матрицы. Закон изменения матрицы при замене базиса. Канонический изоморфизм пространства билинейных функций и пространства $\text{Hom}(V, V^*)$.
44. Симметрические, кососимметрические и эрмитовы функции. Квадратичные формы.
45. Нормальный вид симметрических билинейных функций и квадратичных форм (теорема Лагранжа).
46. Нормальный вид эрмитовых полуторалинейных функций.
47. Закон инерции. Единственность нормального вида.
48. Теорема Якоби. Критерий Сильвестра.
49. Симметрические билинейные функции в евклидовых пространствах. Канонический вид.
50. Приведение пары форм к диагональному виду. Собственные значения и собственные векторы пары форм.
51. Нормальный вид кососимметрических билинейных функций.
52. Симплектические пространства. Лагранжевы подпространства. Существование дополнительного лагранжева подпространства.

Часть 6. Тензоры

53. Полилинейные функции.
54. Тензоры: координатное определение.
55. Тензорное произведение, свёртка, опускание и поднятие индексов.
56. Базис в пространстве тензоров.
57. Симметрические и кососимметрические тензоры, симметризация и альтернирование.
58. Внешнее произведение кососимметрических тензоров, внешние формы.

Текст лекций доступен на странице в интернет:

<http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching/>