

**ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО КУРСУ
«ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ–5. ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ И
ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ»**

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Симплициальные комплексы и триангуляции.
2. Полусимплициальные комплексы (Δ -комплексы).
3. Симплициальные гомологии: определение, примеры вычислений.
4. Сингулярные гомологии: определение, вычисление нульмерных гомологий и гомологий точки.
5. Функториальность и гомотопическая инвариантность сингулярных гомологий.
6. Длинная точная последовательность гомологий цепных комплексов.
7. Относительные группы сингулярных гомологий и точная последовательность пары.
8. Теорема вырезания для сингулярных гомологий.
9. Следствия теоремы вырезания: сведение относительных гомологий к абсолютным, гомологии сферы, изоморфизм надстройки, гомологии букета, топологическая инвариантность размерности.
10. Точная последовательность Майера–Вьеториса для сингулярных гомологий.
11. Эквивалентность симплициальных и сингулярных гомологий.
12. Клеточный цепной комплекс и его гомологии.
13. Описание граничного гомоморфизма в клеточном цепном комплексе. Вычисление клеточных гомологий двумерных поверхностей и проективных пространств.
14. Эйлерова характеристика конечного клеточного пространства.
15. Связь фундаментальной группы и первой группы гомологий (теорема Пуанкаре).
16. Гомологии с коэффициентами и когомологии, их свойства.
17. Коэффициентные точные последовательности для гомологий и когомологий. Гомоморфизмы Бокштейна.
18. Функторы Tor и Ext для модулей над коммутативным кольцом.
19. Формулы универсальных коэффициентов для гомологий и когомологий с коэффициентами в абелевых группах.
20. Произведение Колмогорова–Александера (\smile -произведение) на сингулярных коцепях и когомологиях. Кольцо когомологий.
21. Относительные произведения и \times -произведение в когомологиях пар пространств.
22. Клеточное определение умножения в когомологиях.
23. Формула Кюннета для гомологий и когомологий произведения пространств с коэффициентами в области главных идеалов.
24. Вычисления кольца когомологий для n -мерного тора и проективных пространств.

25. Топологические и гладкие многообразия. Группы локальных гомологий. Ориентация. Фундаментальный класс.
26. Степень отображения многообразий.
27. \sim -произведение и определение изоморфизмов двойственности Пуанкаре.
28. Когомологии с компактными носителями: определение и свойства.
29. Двойственность Пуанкаре для когомологий с компактными носителями.
30. Связь двойственности Пуанкаре с умножением в когомологиях. Алгебры Пуанкаре. Сигнатура замкнутого ориентированного многообразия.
31. Двойственность для многообразий с краем (двойственность Пуанкаре–Лефшеца).
32. Локально тривиальные расслоения. Векторные расслоения. Существование вложения в тривиальное расслоение и римановой метрики для векторного расслоения над компактной хаусдорфовой базой.
33. Касательное и нормальное расслоение. Касательное расслоение проективного пространства.
34. Многообразия Грассмана, вложение Плюккера и клетки Шуберта.
35. Классификация векторных расслоений. Универсальное расслоение и классифицирующее пространство для вещественных и комплексных векторных расслоений.
36. Теорема Лере–Хирша.
37. Когомологии проективизации расслоения. Определение характеристических классов Штифеля–Уитни и Чженя.
38. Свойства характеристических классов Штифеля–Уитни и Чженя: размерность, функториальность, формула Уитни, первый класс одномерного тавтологического расслоения.
39. Принцип расщепления. Многообразия флагов. Единственность характеристических классов.
40. Когомологии многообразий Грассмана и классифицирующих пространств $BO(n)$ и $BU(n)$. Универсальные классы Штифеля–Уитни и Чженя.
41. Параллелизуемость вещественных проективных пространств. Алгебры с делением.
42. Препятствия к вложениям и погружениям многообразий.
43. Ориентируемые векторные расслоения. Класс Тома и изоморфизм Тома.
44. Класс Эйлера и его свойства.
45. Связь класса Эйлера с двойственностью Пуанкаре, эйлеровой характеристикой и особыми точками векторных полей.
46. Связь классов Штифеля–Уитни комплексного расслоения с его классами Чженя. Классы Понтрягина кватернионных расслоений.
47. Классы Понтрягина вещественных расслоений, их свойства.
48. Точная последовательность Гизина. Вычисление когомологий $BO(n)$ и $B SO(n)$ с коэффициентами в кольце, содержащем $\frac{1}{2}$. Универсальные классы Понтрягина.

Текст лекций:

<http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching/panov-gt5.pdf>