

**ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА
ПО КУРСУ «ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ–4»**

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Топологические пространства, непрерывные отображения, гомеоморфизмы.
2. Связность, компактность, хаусдорфовость. Непрерывное взаимно однозначное отображение компактного пространства на хаусдорфово есть гомеоморфизм.
3. Фактор-топология, факторпространства, примеры.
4. Топология произведения, универсальное свойство.
5. Декартовы и кодекартовы квадраты. Расслоенное произведение (коамальгама), склейка (амальгама), универсальные свойства, примеры.
6. Топология на пространстве отображений (компактно-открытая топология), связь с топологией произведения. Экспоненциальный закон (без доказательства).
7. Цилиндр, конус, надстройка, джойн (соединение).
8. Пространства с отмеченной точкой, их произведение, букет и приведённое произведение (смаш-произведение).
9. Пространства путей и петель. Гомеоморфизм сопряжения (связь отображений из надстройки и отображений в пространство петель).
10. Гомотопия, два определения и их связь через экспоненциальный закон. Гомотопические эквивалентности, стягиваемость, примеры.
11. Клеточные пространства, аксиоматическое определение. Операция приклеивания клетки. Клеточное разбиение произведения клеточных пространств.
12. Примеры клеточных пространств: сферы, конечные и бесконечные проективные пространства, классические поверхности.
13. Свойство продолжения гомотопии, связь с ретракцией.
14. Свойство продолжения гомотопии для клеточных пар. Следствие для факторпространства по стягиваемому подпространству.
15. Теорема о клеточной аппроксимации. Гомотопическая тривиальность отображений $S^k \rightarrow S^n$ при $k < n$.
16. Гомотопия петель. Произведение петель, его свойства.
17. Фундаментальная группа пространства с отмеченной точкой. Её поведение при отображениях. Связь с гомотопией и гомотопической эквивалентностью.
18. Зависимость фундаментальной группы от отмеченной точки.
19. Фундаментальная группа окружности.
20. Следствия вычисления $\pi_1(S^1)$: несуществование ретракции $D^2 \rightarrow S^1$, теорема Брауэра, основная теорема алгебры.
21. Свободное произведение групп. Приведённые слова. Ассоциативность умножения приведённых слов. Свободная группа. Задание группы образующими и соотношениями. Абеленизация.

22. Теорема ван Кампена.
23. Линейно связное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с единственной нульмерной клеткой.
24. Задание фундаментальной группы клеточного пространства образующими и соотношениями.
25. Накрытия. Примеры. Свойство поднятия путей.
26. Свойство поднятия гомотопии. Существование и единственность накрывающей гомотопии для накрытий.
27. Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный отображением накрытия. Связь числа точек в прообразе точки при накрытии и индекса подгруппы.
28. Теорема о поднятии отображений для накрытий (для отображений из локально линейно связных пространств).
29. Существование односвязного накрытия над линейно связным, локально линейно связным и полулокально односвязным пространством. Понятие об универсальном накрытии.
30. Классификация накрытий подгруппами в фундаментальной группе.
31. Графы. Существование максимального дерева. Фундаментальная группа графа.
32. Накрытия над графами. Теорема Нильсена–Шрайера о подгруппах свободной группы.
33. Дифференциальные формы на гладких многообразиях, внешнее произведение.
34. Операция внешнего дифференцирования, инвариантность координатного определения, свойства, примеры.
35. Определение когомологий де Рама, размерность пространства нульмерных когомологий, когомологии \mathbb{R}^1 .
36. Дифференциальные формы и когомологии как функторы.
37. Цепные и коцепные комплексы. Гомологии и когомологии. Коцепная гомотопия.
38. Короткая точная последовательность коцепных комплексов и длинная точная последовательность когомологий.
39. Гомотопическая инвариантность когомологий, лемма Пуанкаре (когомологии \mathbb{R}^n), следствия.
40. Разбиение единицы для гладких многообразий.
41. Точная последовательность Майера–Вьеториса для когомологий де Рама.
42. Вычисление когомологий сфер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Ботт, Л. В. Ту. *Дифференциальные формы в алгебраической топологии*. Москва, «Наука», 1989.
- [2] В. А. Васильев. *Введение в топологию*. Москва, Фазис, 1997.
- [3] О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов. *Элементарная топология*. Москва, МЦНМО, 2010.
- [4] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. *Современная геометрия. Методы и приложения*. Москва, «Наука», 1986.
- [5] Ф. Уорнер. *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*. Москва, «Мир», 1987.
- [6] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. *Курс гомотопической топологии*. Москва, «Наука», 1989.
- [7] А. Хатчер. *Алгебраическая топология*. Москва, МЦНМО, 2011.