

ВВЕДЕНИЕ В ТОПОЛОГИЮ¹
ЗАДАЧИ К ЭКЗАМЕНУ

ПАНОВ Тарас Евгеньевич

Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова

1. ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

1.1. Докажите, что подмножество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

1.2. Докажите, что в хаусдорфовом пространстве точки являются замкнутыми множествами.

1.3. Приведите пример непрерывного взаимно однозначного отображения $f: X \rightarrow Y$, которое не является гомеоморфизмом, при каждом из следующих дополнительных ограничений:

- а) X компактно;
- б) Y хаусдорфово.

1.4. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *собственным*, если прообразы компактных подмножеств компактны. Докажите, что отображение $f: X \rightarrow Y$ компактного пространства X в хаусдорфово пространство Y собственным.

1.5. Пусть $i: A \rightarrow X$ — открытое инъективное отображение. Докажите, что A гомеоморфно пространству $i(A)$ с топологией, индуцированной из X . (Говорят, что открытое инъективное отображение является вложением.) Докажите то же для замкнутого инъективного отображения. (Непрерывное отображение называется *замкнутым*, если образ замкнутого множества замкнут.)

1.6. Пусть $p: X \rightarrow B$ — открытое сюръективное отображение. Докажите, что B гомеоморфно факторпространству $X/\sim$ по отношению эквивалентности, при котором $x_1 \sim x_2$ тогда и только тогда, когда $p(x_1) = p(x_2)$. (Говорят, что открытое сюръективное отображение является факторотображением.) Докажите то же для замкнутого сюръективного отображения.

1.7. Докажите, что индуцированная топология на $A \subset X$ является самой грубой из всех топологий, для которых отображение $A \hookrightarrow X$ непрерывно.

1.8. Докажите, что фактортопология на $X/\sim$ является самой тонкой из всех топологий, для которых отображение $X \rightarrow X/\sim$ непрерывно.

1.9. Докажите, что если $A \subset X$ и X/A хаусдорфово, то A замкнуто. Однако X/A может быть не хаусдорфовым, даже если X хаусдорфово, а $A \subset X$ замкнуто.

1.10. Опишите пространство орбит $\mathbb{R}^2/SO(2)$ действия группы поворотов на плоскости.

1.11. Докажите, что факторпространство $[0, 1]/\{0, 1\}$ отрезка по его границе гомеоморфно окружности.

¹Последняя редакция: 12 октября 2025 г.

1.12. Докажите, что произведение конечного числа компактных пространств компактно. (Соответствующее утверждение в случае бесконечного числа пространств известно как *теорема Тихонова*. Теорема Тихонова эквивалентна аксиоме выбора.)

1.13. Докажите, что канторово множество (т. е. множество чисел из отрезка $[0, 1]$, которые не содержат 1 в троичной записи) гомеоморфно произведению счётного числа дискретных пространств $\{0, 1\}$.

1.14. Докажите, что множество иррациональных вещественных чисел гомеоморфно произведению счётного числа множеств натуральных чисел.

1.15. Пусть $\tilde{\mathbb{R}}^\infty$ — множество бесконечных последовательностей вещественных чисел (декартово произведение счётного числа вещественных прямых) с топологией, в которой базой открытых множеств являются всевозможные бесконечные произведения интервалов. Докажите, что в этой топологии диагональное отображение $\mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}^\infty$, $x \rightarrow (x, x, \dots)$, не является непрерывным. Это означает, в частности, что топология $\tilde{\mathbb{R}}^\infty$ отличается от топологии произведения $\mathbb{R}^\infty$.

1.16. Рассмотрим подмножество $X = \bigcup_{n=1}^\infty (\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1})$ вещественной прямой с индуцированной топологией. Гомеоморфно ли пространство X несвязному объединению бесконечного числа интервалов?

1.17. Проверьте универсальные свойства расслоенного произведения $X \times_A Y$ и склейки $X \cup_A Y$.

1.18. Что является произведением, копроизведением и кодекартовым квадратом в категориях групп и абелевых групп?

1.19. Имеет ли место гомеоморфизм $Y^X \cong \prod_{x \in X} Y$, где слева — компактно-открытая топология, а справа — топология произведения, если

- а) X дискретно;
- б) X — произвольное топологическое пространство?

1.20. Докажите, что если X — компактное пространство, а (Y, ρ) — метрическое пространство, то формула

$$\rho(f, g) = \max_{x \in X} \{\rho(f(x), g(x))\}$$

задаёт метрику на множестве непрерывных отображений $\mathcal{C}(X, Y)$, и эта метрика индуцирует компактно-открытую топологию.

1.21. Докажите, что имеет место гомеоморфизм

$$\mathcal{C}(X, Y \times Z) \cong \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Z), \quad \text{или} \quad (Y \times Z)^X \cong Y^X \times Z^X.$$

1.22. Пространство Y называется *локально компактным*, если для каждой точки $y \in Y$ найдётся окрестность, замыкание которой компактно. Докажите, что если Y хаусдорфово и локально компактно, то отображение композиции

$$\varphi: \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f,$$

непрерывно. В частности, *отображение вычисления*

$$e: Y \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow Z, \quad (y, f) \mapsto f(y),$$

непрерывно.

1.23 (экспоненциальный закон). Определено каноническое отображение

$$\Phi: \mathcal{C}(X \times Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)), \quad \text{или} \quad \Phi: Z^{X \times Y} \rightarrow (Z^Y)^X,$$

при котором отображение $f: X \times Y \rightarrow Z$ переходит в отображение $\Phi(f): X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$, переводящее $x \in X$ в отображение $y \mapsto f(x, y)$. Докажите, что если X хаусдорфово, то отображение Φ непрерывно. Если в дополнение к этому Y хаусдорфово и локально компактно, то Φ — гомеоморфизм.

2. ОПЕРАЦИИ НАД ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

2.1. Докажите, что $S^k * S^l \cong S^{k+l+1}$ и $S^k \wedge S^l \cong S^{k+l}$.

2.2. Докажите, что букет является копроизведением в категории пространств с отмеченными точками, т. е. для него имеет место универсальное свойство

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \downarrow i_X & \searrow f \\ Y & \xrightarrow{i_Y} X \vee Y & \\ & \searrow g & \swarrow \exists! h \\ & & Z, \end{array}$$

где все стрелки являются отображениями пространств с отмеченными точками.

2.3. Докажите, что линейно связное пространство связно. Приведите пример связного, но не линейно связного пространства.

3. ГОМОТОПИИ И ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

3.1. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^n$ стягиваемо, а $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}$ гомотопически эквивалентно сфере S^{n-1} .

3.2. Докажите, что надстройка над тором $S^1 \times S^1$ гомотопически эквивалентна букету сфер, и опишите этот букет.

3.3. Пусть X — дополнение к трём координатным осям в $\mathbb{R}^3$. Докажите, что X гомотопически эквивалентно букету окружностей, и найдите число окружностей в букете.

3.4. Пусть X — дополнение к трём координатным осям в $\mathbb{C}^3$. Докажите, что X гомотопически эквивалентно букету сфер $S^3 \vee S^3 \vee S^3 \vee S^4 \vee S^4$.

4. КЛЕТОЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

4.1. Докажите, что любое компактное подмножество клеточного пространства принадлежит некоторому конечному подпространству.

4.2. Докажите эквивалентность следующих свойств для подмножества клеточного пространства X :

- подмножество $Y \subset X$ замкнуто в топологии, задаваемой аксиомой (W);
- пересечение $Y \cap X^n$ замкнуто для любого n ;
- прообраз $\Phi_i^{-1}(Y)$ при характеристическом отображении $\Phi_i: D^q \rightarrow X$ любой клетки e_i^q замкнут в D^q .

4.3. Докажите, что отображение клеточного пространства в топологическое пространство непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно на любом остове.

4.4. Докажите, что пространство, получаемое в результате приклеивания клетки к хаусдорфовому пространству, хаусдорфово.

4.5. Докажите, что для пространства, получаемого конечной итерацией операции приклеивания клетки из пустого множества, аксиомы (C) и (W) выполнены автоматически.

4.6. Докажите, что бесконечный букет отрезков $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$ не метризуем.

4.7. Докажите, что клеточное пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно локально конечно.

4.8. Введите разбиение на клетки факторпространства X/Y клеточного пространства X по клеточному подпространству Y и докажите, что X/Y является клеточным пространством.

4.9. Докажите, что стандартное разбиение на клетки произведения $X \times Y$ с топологией произведения не удовлетворяет аксиоме (W) в случае $X = \bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$ (букет счётного числа отрезков) и $Y = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} I_{\alpha}$ (букет континуального числа отрезков).

4.10. Докажите, что бесконечномерная сфера S^{∞} стягиваема.

4.11. Докажите, что $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ и $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$.

4.12. Определите кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$ и докажите, что $\mathbb{H}P^1 \cong S^4$.

4.13. Докажите, что свойство продолжения гомотопии не выполнено для пар (I, A) , где $A = (0, 1]$ или $A = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$.

4.14. Докажите, что если X хаусдорфово и $X \times 0 \cup A \times I$ является ретрактом пространства $X \times I$, то A замкнуто в X .

4.15. Докажите, что факторпространство S^2/S^0 гомотопически эквивалентно букету $S^1 \vee S^2$.

4.16. Докажите, что если пара (X, A) удовлетворяет свойству продолжения гомотопии и вложение $A \hookrightarrow X$ гомотопно отображению в точку, то имеется гомотопическая эквивалентность $X/A \simeq X \vee \Sigma A$.

4.17. Симметрическим квадратом пространства X называется факторпространство $(X \times X)/\sim$ по отношению эквивалентности $(x, y) \sim (y, x)$. Докажите, что симметрический квадрат окружности S^1 гомеоморфен листу Мёбиуса (односторонней поверхности, получаемой склейкой одной пары противоположных сторон квадрата с обращением ориентации, т.е. $I^2/\sim$, где $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$.)

4.18. Докажите, что симметрический квадрат двумерной сферы S^2 гомеоморфен комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$.

4.19. Рассмотрим клеточное разбиение окружности S^1 с двумя клетками. Убедитесь, что диагональное отображение $\Delta: S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$, $t \mapsto (t, t)$, не является клеточным. Постройте явно его клеточную аппроксимацию.

4.20. Докажите, что топология на проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$, определяемая как фактортопология пространства $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbf{0}$, совпадает с топологией, происходящей из угловой метрики (расстояние между прямыми равно углу между ними).

5. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА

5.1. Докажите, что если отображения $f, f': X \rightarrow Y$ гомотопны посредством гомотопии $F: X \times I \rightarrow Y$, то индуцированные гомоморфизмы $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ и $f'_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f'(x_0))$ удовлетворяют соотношению $f'_* = b_\alpha f_*$, где $\alpha(t) = F(x_0, t)$ — путь из $f(x_0)$ в $f'(x_0)$.

5.2. Докажите, что если X и Y линейно связны, то $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

5.3. Докажите, что если $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, то $\pi_1(X) = \{1\}$.

5.4. Докажите, что если X — дискретное пространство, то $\pi_1(X) = \{1\}$.

5.5. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ при $n \neq 2$.

5.6. Докажите, что любое непрерывное отображение пространства  (три отрезка с отождествлённым началом) в себя имеет неподвижную точку.

5.7. *Топологической группой* называется пространство G с заданной на нём структурой группы, для которой отображения умножения $G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto gh$, и взятия обратного $G \rightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$, являются непрерывными. Докажите, что фундаментальная группа $\pi_1(G)$ топологической группы абелева.

6. ТЕОРЕМА ВАН КАМПЕНА

6.1. Докажите, что абеленизацией группы $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ является $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, и опишите ядро гомоморфизма абеленизации $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

6.2. Покажите, что гомоморфизм $\Phi: *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$ может быть не сюръективным, если не все пересечения $A_\alpha \cap A_\beta$ линейно связны.

6.3. Пусть даны гомоморфизмы групп $f_1: H \rightarrow G_1$ и $f_2: H \rightarrow G_2$. Определим *амальгамированное произведение* $G_1 *_H G_2$ групп G_1 и G_2 над H как факторгруппу свободного произведения $G_1 * G_2$ по нормальной подгруппе, порождённой всеми элементами вида $f_1(h)f_2(h)^{-1}$, где $h \in H$.

Докажите, что $G_1 *_H G_2$ входит в коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f_1} & G_1 \\ \downarrow f_2 & & \downarrow \\ G_2 & \longrightarrow & G_1 *_H G_2, \end{array}$$

т. е. обладает соответствующим универсальным свойством.

6.4. Пусть $X = A_1 \cup A_2$, где X — клеточное пространство, A_1, A_2 — клеточные подпространства, причём пересечение $B = A_1 \cap A_2$ связно и содержит отмеченную

точку $x_0 \in X$, которая является нульмерной клеткой. Мы имеем коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i_1} & A_1 \\ \downarrow i_2 & & \downarrow j_1 \\ A_2 & \xrightarrow{j_2} & X. \end{array}$$

Вычисляя фундаментальные группы всех пространств в этой диаграмме и применяя универсальное свойство амальгамированного произведения (см. предыдущее упражнение), мы получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(B) & \xrightarrow{(i_1)_*} & \pi_1(A_1) \\ \downarrow (i_2)_* & & \downarrow \\ \pi_1(A_2) & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(A_1) *_{\pi_1(B)} \pi_1(A_2) \\ & \searrow (j_2)_* & \nearrow (j_1)_* \\ & & \pi_1(X). \end{array}$$

(дashed arrow from $\pi_1(A_1) *_{\pi_1(B)} \pi_1(A_2)$ to $\pi_1(X)$ is labeled h)

Используя теорему ван Кампена, докажите, что гомоморфизм

$$h: \pi_1(A_1) *_{\pi_1(B)} \pi_1(A_2) \rightarrow \pi_1(A_1 \cup_B A_2)$$

является изоморфизмом ($X = A_1 \cup_B A_2$). Таким образом, функтор π_1 переводит амальгамы клеточных пространств в амальгамы групп.

6.5. Найдите фундаментальную группу дополнения окружности в $\mathbb{R}^3$.

6.6. Докажите, что дополнение двух незацепленных окружностей в $\mathbb{R}^3$ не гомеоморфно дополнению двух зацепленных окружностей.

6.7. Найдите фундаментальную группу дополнения трёх координатных осей в $\mathbb{R}^3$.

6.8. Линейно связное пространство X называется *односвязным*, если $\pi_1(X) = 0$. Докажите, что всякое односвязное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с одной 0-мерной клеткой и без 1-мерных клеток.

6.9. Опишите фундаментальную группу бутылки Клейна K , используя клеточное разбиение, получаемое склейкой из квадрата. Докажите, что

$$\pi_1(K) \cong \langle c_1, c_2 \mid c_1^2 c_2^2 \rangle.$$

Опишите абелизацию группы $\pi_1(K)$ и выведите отсюда, что бутылка Клейна не гомеоморфна проективной плоскости и не гомеоморфна ни одной из поверхностей S_g .

6.10. Пусть P_g — проективная плоскость с g ручками, а K_g — бутылка Клейна с g ручками. Докажите, что фундаментальная группа поверхности P_g или K_g изоморфна факторгруппе свободной группы с образующими $c_1, \dots, c_k$ по одному соотношению $c_1^2 \cdot \dots \cdot c_k^2 = 1$, где $k = 2g + 1$ для P_g и $k = 2g + 2$ для K_g . Докажите, что поверхности S_g, P_g, K_g попарно не гомеоморфны.

6.11. Вычислите фундаментальные группы пространств $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$.

6.12. Постройте клеточное пространство с фундаментальной группой $\mathbb{Z}_3$ (циклическая группа из трёх элементов).

6.13. Докажите, что всякая группа является фундаментальной группой некоторого клеточного пространства.

7. НАКРЫТИЯ

7.1. Постройте накрытие букета двух окружностей пространством, гомотопически эквивалентным букету n окружностей при $n \geq 2$. Постройте накрытие поверхности S_2 (кренделя) поверхностью S_g (сферой с g ручками) при $g \geq 2$.

7.2. Докажите, что для накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$ и любых точек $x, x' \in X$ имеется взаимно однозначное соответствие между дискретными множествами $p^{-1}(x)$ и $p^{-1}(x')$. Мощность множества $p^{-1}(x)$ называется *числом листов накрытия* p .

7.3. Накрытие $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ называется *регулярным*, если подгруппа $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ является нормальной в $\pi_1(X, x_0)$. Докажите, что накрытие p регулярно тогда и только тогда, когда никакая петля в X не является образом одновременно замкнутого пути и незамкнутого пути в $\tilde{X}$.

7.4. Докажите, что если $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ — регулярное накрытие, то существует такое свободное действие группы $G = \pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ на пространстве $\tilde{X}$, что $X = \tilde{X}/G$ (т. е. орбиты действия совпадают с множествами $p^{-1}(x)$). (Действие группы G на X называется *свободным*, если для любого $g \neq e$ и $x \in X$ имеем $gx \neq x$.)

7.5. Действие группы G на пространстве Y называется *дискретным*, если каждая точка $y \in Y$ обладает такой окрестностью U , что множества gU , $g \in G$, попарно не пересекаются. Докажите, что если группа G действует на Y свободно и дискретно, то естественная проекция $p: Y \rightarrow X = Y/G$ является регулярным накрытием. Более того, в этом случае $\pi_1(X)/p_*\pi_1(Y) = G$.

7.6. Докажите, что двулистные накрытия регулярны. Постройте пример нерегулярного трёхлистного накрытия над букетом двух окружностей и над кренделем.

7.7. Докажите, что условие полулокальной односвязности пространства X необходимо для существования односвязного накрывающего пространства $\tilde{X}$.

7.8. Постройте пример не полулокально односвязного пространства.

7.9. Пространство X называется *локально односвязным*, если для любой точки $x \in X$ и её окрестности $V \ni x$ существует такая меньшая окрестность $U \subset V$, что $\pi_1(U, x) = 0$. Постройте пример полулокально односвязного, но не локально односвязного пространства.

7.10. Постройте универсальное накрытие над букетом $S^1 \vee S^2$.

7.11. Постройте универсальное накрытие над букетом $S^1 \vee S^1$.

7.12. Докажите следующую версию теоремы о классификации накрытий, в которой не учитываются отмеченные точки: имеется взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных накрытий $p: Y \rightarrow X$ и классами сопряжённости подгрупп в $\pi_1(X, x_0)$.

7.13. Докажите, что максимальное дерево максимально в том смысле, что оно не содержится ни в каком большем дереве.

7.14. Пусть $G \subset F_2$ — подгруппа свободной группы ранга 2 (с образующими a и b), состоящая из слов чётной длины. Найдите ранг группы G . Опишите накрытие над букетом $S^1 \vee S^1$, реализующее подгруппу G в $\pi_1(S^1 \vee S^1) = F_2$.

7.15. Пусть $G = [F_2, F_2] \subset F_2$ — коммутант свободной группы ранга 2. Докажите, что G — свободная группа бесконечного ранга. Опишите накрытие над букетом $S^1 \vee S^1$, реализующее подгруппу G в $\pi_1(S^1 \vee S^1) = F_2$.