

Топология - 3 (НМУ, Весна 2019)

I. Двойственность Пуанкаре

nklemutin@yandex.ru

Опр.: топологическое мн-во M

$\forall x \in M \rightarrow U : U \cong \mathbb{R}^n$ (и фикс., каз. разм. M)

+ хаусдорфово

+ $\exists$ счётная база (илида паракomp., лок. компактно)

Если вместо $\mathbb{R}^n$ взять $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$,
получим опр. мн-во с краем

Примеры:

мн-во: $\mathbb{R}^n, S^n, T^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$, поверхности

с краем: D^n , некоторые $D^2 \times S^1$

не мн-во: $\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{C}P^\infty$, графы с вершинами степени ≥ 2 ,
буквы, болван. операции над клет. р-вами

Предложение: пусть M - мн-во, $\dim M = n$

$H_i(M, M \setminus x; \mathbb{Z}) = 0$ при $i \neq n$ и $H_n(M, M \setminus x) \cong \mathbb{Z}$

Док-во:

$$H_i(M, M \setminus x) \cong H_i(\underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{вырез}}, \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus 0}_{\text{точка несл.}}) \cong \tilde{H}_i(\mathbb{R}^n \setminus 0) \cong \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$$

$H_n(X, X \setminus x)$ каз. локальными гомологиями X в точке x

Опр.: X хаусд. со счётной базой каз. гомологическим мн-вом,
если $H_i(X, X \setminus x) = 0$ при $i \neq n$ и $H_n(X, X \setminus x) \cong \mathbb{Z}$ разм. n

Двойственность Пуанкаре для M^n , dim:

$$H_k(M^n; \mathbb{Z}) \cong H^{n-k}(M^n; \mathbb{Z}) \quad \text{если } M \text{ ориентируемо}$$

$$H_k(M^n; \mathbb{Z}_2) \cong H^{n-k}(M^n; \mathbb{Z}_2) \quad \text{всегда}$$

Более точно:

$$A^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i \quad \text{град. ассоц. коммут. алгебра с } 1 / R$$

A к-во. алгебры Пуанкаре разм. $/R$ и, если $A^i = 0$ при $i > n$, $A^n \cong R$ и $\chi: A^i \otimes A^{n-i} \rightarrow A^n \cong R$ каждому старшему

Тогда $H^*(M^n; \mathbb{Z})$ - алгебра Пуанкаре, если M ориентируема

$H^*(M^n; \mathbb{Z}_2)$ - алгебра Пуанкаре всегда

3 подхода к док-ву:

1. Классический - через триангуляции.
2. Алгебро-топологический - через лок. гомотопии и теор. Вьетна.
3. Диф-топологический через интегрирование форм (Гельфанд $\mathbb{R}$)

Мы сейчас рассм. 1 и более подробно 2.

Классический подход (через триангул.)

K_1 на $\mathbb{Z}m \cap \mathbb{Z} = \{1, \dots, V_1\}$, K_2 на V_2 - симплиц. комплексы
 $P_1 = |K_1|$, $P_2 = |K_2|$ - геом. реализации
 $\varphi: K_1 \rightarrow K_2$ симплиц. отображ., если $\varphi(I) \in K_2 \quad \forall I \in K_1$

Триангуляция топ. пр-ва X - гомеоморфизм $|K| \xrightarrow{\cong} X$
 (симпл. разб.)

Подразделение P - это геом. симп. комплекс P' :

$\forall$ симплекс из P' содержится в симплексе P

и $\forall$ симплекс P - объедин. конечного числа симплексов P'

PL-отобр. (кусочно-лин. отобр.) $\varphi: P_1 \rightarrow P_2$ -

симпл. отобр. метод нек-рых подразд. $P_1' \rightarrow P_2'$

изоморфизм (симпл., PL) - $\exists$ обратный

K - симпл. комплекс на V , $I \in K$

$$lk_K I = \{J \in K : I \cup J \in K, I \cap J = \emptyset\} \quad \text{листья}$$

$$st_K I = \{J \in K : I \cup J \in K\} \quad \text{звезда}$$

$$\partial st_K I = \{J \in K : \pm I \cup J \in K, I \not\subset J\} \quad \text{граница звезды}$$

$$lk_K I \subset \partial st_K I \subset st_K I$$

картинка

Предложение: пусть x не лежит внутри симплекса $I \in K$.

$$H_i(|K|, |K| \setminus x) \cong \tilde{H}_{i-1}(lk_K I)$$

Док-во:

$$H_i(|K|, |K| \setminus x) \cong H^i(st I, st I \setminus x) \stackrel{\text{пет}}{=} H^i(st I, \partial st I) =$$

$$\cong H^i(st I, (\partial I)^* lk_K I) \cong H_{i-1}(\partial I)^* lk_K I \cong \tilde{H}_{i-1}(lk_K I)$$

Замечание: комб. окр. симплекса: подкомплекс $L \subset K$

$$U_K(L) = \bigcup_{\pm I \in L} st_K I$$

объедин. всех симплексов (и их границ), сод. первый симплекс L .

Опр: Триангулир. сфера разд. это K : $|K| \cong S^d$

PL-сфера разм. d : это K ; которая

PL-гомеоморфна границе симплекса $\partial \Delta^{d+1}$
(т.е. $\exists$ подразд. $\partial \Delta^{d+1}$, совпад с подразд. K)

Иерархия сфер, пример

Опр: Триангул. мн-зие разм. d - это K : $|K|$ - мн-зие

PL-многообразие: K разм. d , $lk I$ для PL-сфер $\forall I \neq \emptyset$

PL-сф-ра же топ. мн-зие - триангул. сфера

PL-мн-зие

Упр: Тогда $|K|$ - топол. мн-зие!

Две PL-ср-рѳ PL-эквивал, если
они имеют общее подразделение (PL-изоморфизм)

Hauptvermutung: Два ~~те~~миним. комплекса
гомеоморфны $\Leftrightarrow$ PL-эквивал.

Верно в разм. ≤ 3 разм. 3 Moise, Brown
(сложно)

Далее известно Σ^2 гом. сферой - гом. сфера

Бывают не ТР-акт. многообр разм. 4 Гмджан
и в разм. ≥ 5 Манассасу

Упр: если M^n - PL-м-зие, то

$$H_i(M, M(x)) \cong 0, i \neq n, = \mathbb{Z}, i = n$$

Упр: ~~Вся~~ PL-м-зие M ^{разм. n} связано, ~~связно~~

Т.е. $\forall I^n \exists$ два J, J' , $I > 1$
и любые два J, J' можно соединить...

Ориентация PL-многообразия K^n

Ориентация n -симплекса - циклич. порядок вершин
индуц. ориентацией ∂_{n-1} - гипергрань

Ориентации смежных n -симплексов согласованы, если
они индуц. различные ориентации на общей грани

PL-м-зие $\mathbb{R}^n$ ориентуемо, если

$\exists$ согласованная ориентация всех его n -симплексов

Теорема: $\mathbb{K}^n \checkmark$ ^{безно} PL-мн-зие

$$H_n(K) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } K^n \text{ ориентировано и замкнуто (компактно)} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$H_n(K, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \quad \text{всегда}$$

Док-во: $\text{grad } c = \sum k_i \sigma_i \neq 0$ n -цикл. Гранич нет

$$\partial \sigma_i = \sigma_i \cap \sigma_j^2 = \tau \Rightarrow \tau \text{ входит в } \partial c \quad c$$

коэф. $\pm(k_i - k_j)$, если ор. согласованы и $\pm(k_i + k_j)$, если нет

чтобы $\partial c = 0$, надо чтобы все сократилось $\Rightarrow$

а) $\forall$ все k_i равны $\Rightarrow$ число σ_i конечно $\Rightarrow \mathbb{K}^n$ замкнуто

б) все ориентации согласованы $(\mathbb{Z}) \Rightarrow \mathbb{K}^n$ ориентировано

При выполнении а) и б) $\sum \sigma_i$ — образующая $H_n(K)$

иначе $H_n(K) = 0$ (не нулевых циклов нет) $\square$

Барицентрич. подразделение

$K \rightsquigarrow K'$ $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ — k -симплексы в K'
каждая σ_i

Пусть K — n -мерное PL-мн-зие

Рассл. K' и $\sigma^* = \text{ст}_{K'} \sigma$, $\sigma \in K$

Кортика

об-ва

"Барицентрические звезды" = множество $\sigma_0, \dots, \sigma_k$ $\sigma \in K$
"зв" $\sigma^* = \{ \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k \}$

1) $\dim \sigma = k \Rightarrow \text{ст}_{K'} \sigma^*$ есть $(n-k)$ -мерный PL-мн-зие

2) открытые бариц. звезды $\sigma^* = \text{ст}_{K'} \sigma \setminus \partial \text{ст}_{K'} \sigma$ $\sigma_1^* \cap \sigma_2^* = \emptyset$
образуют взаимное разбиение $|K| \cong |K'|$

3) ориентация K задаёт ориентацию K'
и для ориентации бариц. звезд вершина $v \in K$

Пусть

$$|K| = |K|$$

$C^*(M)$ - числ. коэф. K

$C_*(M)$ - клет. цепи звездного разб.

Гомоморфизм

двойственности

$$D: C^k(M) \rightarrow C_{n-k}(M)$$

$$c = \{\sigma_i \mapsto k_i\} \mapsto Dc = \sum k_i \sigma_i^*$$

Утв: $Ddc = \pm \partial Dc$

получаем

$$\begin{array}{ccccccc} C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{\partial} & \dots & \xrightarrow{\partial} & C_1(X) & \xrightarrow{\partial} & C_0(X) \\ \cong \uparrow D & & \cong \uparrow D & & & & \cong \uparrow D & & \cong \uparrow D \\ C^0(X) & \xrightarrow{d} & C^1(X) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & C^{n-1}(X) & \rightarrow & C^n(X) \end{array}$$

Теорема (двойств. Пуанкаре)

$$H^k(X) \cong H_{n-k}(X)$$

X замкнуто и ориентиров.

$$H^k(X; \mathbb{Z}_2) \cong H_{n-k}(X; \mathbb{Z}_2)$$

X замкнуто

Алгебра - топологический подход

M - (топол.) многообразие разм. n

$$H_n(M, M \setminus x) \cong \mathbb{Z}$$

Опр: лок. ориентация M в $\tau \ni x$ - это

выбор образующей группы $H_n(M, M \setminus x) \cong \mathbb{Z}$

Пусть x, y близки, т.е. лежат в одной карте

$\exists$ откр. шар $B \ni x, y$

Ориентации в x, y согласованы, если
они переходят друг в друга при изом.

$$H_n(\cancel{M}, \cancel{M} \setminus x) \xleftarrow{\cong} H_n(M, M \setminus B) \xrightarrow{\cong} H_n(\cancel{M}, \cancel{M} \setminus y)$$

μ_x μ_y

X ориентировано, если $\exists$ соглас. выбор ориентаций
во всех точках

Такой выбор $x \mapsto \mu_x \in H_n(\cancel{M}, \cancel{M} \setminus x)$ наз. ориентацией

Опр. $\tilde{X} = (x, \mu_x) : x \in \cancel{M}, \mu_x$ - лок. ориент в τ_x



Задача: $\tilde{M} \rightarrow M$ - двухлистное покрытие, $\tilde{M}$ ориентировано
(ориентирующее покрытие)

База топологии

$$U(\mu_B) = \{ (x, \mu_x) : x \in B, \text{ функ. } \mu_B \mapsto \mu_x \}$$

Следствие: односвязное многообразие ориентуемо.

Если в $\pi_1(M)$ нет подгрупп индекса два, то

X ориентуемо

Теорема: M замкнутое связное Р-м. и m -3-е

1. $H_n(M, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(M, M \setminus x; \mathbb{Z}_2)$ изом. $\forall x \in M$

2. если M ОР-мо, то $H_n(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(M, M \setminus x; \mathbb{Z})$ - изом $\forall x \in M$
 если M не ОР., то $H_n(M; \mathbb{Z}) = 0$

3. $H_i(M; \mathbb{Z}) = 0$ при $i > n$.

Лемма: $A \subset M$ компактно, R коммут. группа

1. ~~$H_i(M, M \setminus A; R) = 0$~~ $i > 0$

$\alpha \in H_n(M, M \setminus A; R)$ равен нулю тогда и только тогда, когда его образ в $H_n(M, M \setminus x)$ равен 0 $\forall x \in M$

2. в согласов. $\alpha_x, x \in A \quad \exists! \alpha \in H_n(M, M \setminus A; R)$

$$H_n(M, M \setminus A; R) \rightarrow H_n(M, M \setminus x; R) \quad \forall x \in A$$

$$\alpha \mapsto \alpha_x$$

3. $H_i(M, M \setminus A; R) = 0$ при $i > \dim M = n$

Док-во теоремы: локально $A = \emptyset$

Док-во леммы:

1) если лемма верна для A, B и $A \cap B \rightarrow$ верна для $A \cup B$
 $M \setminus B$.

$$H_{n+i}(X, X \setminus A \cup B) = 0 \rightarrow H_n(X, X \setminus A \cup B) \xrightarrow{\varphi} H_n(X, X \setminus A) \oplus H_n(X, X \setminus B) \xrightarrow{\psi} H_n(X, X \setminus A \cap B)$$

$i > n \quad H_n(X, X \setminus A \cup B) = 0$, т.к. занятая цепочка нулевая

$$0 \rightarrow H_n(X, X \setminus A \cup B) \xrightarrow{\varphi} H_n(X, X \setminus A) \oplus H_n(X, X \setminus B) \xrightarrow{\psi} H_n(X, X \setminus A \cap B)$$

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\varphi} & \\ \downarrow \alpha_{A \cup B} & \swarrow \varphi(\alpha) = (\alpha_A, \alpha_B) & \\ H_n(X, X \setminus x) & & \Rightarrow \varphi(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \end{array}$$

$$\exists! (\alpha_A, \alpha_B) \xrightarrow{\varphi} \alpha_{A \cap B} = \alpha_B|_{A \cap B}$$

$$H_n(X, X \setminus x) \ni \alpha_x \xrightarrow{\psi} 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\Rightarrow \exists! \alpha_{A \cup B}: \varphi(\alpha_{A \cup B}) = (\alpha_A, \alpha_B) \quad \text{единств. т.к. } \varphi \text{ универс.}$$

Элемент $[f] \in H_n(M; \mathbb{R})$, переходящий в
 одн. группы $H_n(M, M(x); \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \quad \forall x \in M$
 из функ. классом n -эле M

Если на M функ. ориентации, т.е. согласов.
 выбор образующих $\alpha x \in H_n(M, M(x); \mathbb{Z})$,
 то $\exists!$ функ. класс $[M] \in H_n(M; \mathbb{R})$ переход.
 в $\alpha x \quad \forall x \in M$.

Итак, выбрать ориентацию $\Rightarrow$ выбрать
 одн. группы $H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Лемма Пуанкаре

степень отобра.

Для отобра. $f: M \rightarrow N$ связных

замкнутых ориентиров n -мн-ств

с функ. классами $[M]$ и $[N]$

степень отобра. f из

$$d: f_*[M] = d[N]$$

Предл. $\forall$ замкнутой одн. n -мерной M

$\exists$ отобра. $M \rightarrow S^n$ степени 1

Док-во: рассм. карту $U \subset M$

$$M \rightarrow M/U \cong S^n$$

$$H_n(M) \rightarrow H_n(M, M/U) \xrightarrow{\cong} H_n(S^n) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{f_*} H_n(M, M(x))$$

$$[M] \mapsto [S^n] \xrightarrow{h_n(S^n)} \mathbb{Z} \xrightarrow{f_*} \mathbb{Z}$$

ДВОУМЕР. Пуанкаре

из φ -алгебры универс. котр

$$H^k(X; R) \rightarrow \text{Hom}_R(H_k(X; R), R) \rightarrow 0$$

Определим

$$\cap : (x(X; R) \times C^l(X; R) \rightarrow C^{k-l}(X; R), \quad k \geq l$$

$$\sigma \cap \varphi = \varphi(\sigma|_{[v_0 \dots v_l]}) \sigma|_{[v_l \dots v_k]}$$

Лемма: $\partial(\sigma \cap \varphi) = (-1)^l (\partial\sigma \cap \varphi - \sigma \cap \partial\varphi)$

Док. 60 $\partial\sigma \cap \varphi = \sum_{i=0}^l (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0 \dots \bar{v}_i \dots v_{l+1}]}) \sigma|_{[v_{l+1} \dots v_k]} + \sum_{i=l+1}^k (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0 \dots v_l]}) \sigma|_{[v_l \dots \bar{v}_i \dots v_k]}$

$$\sigma \cap \partial\varphi = \sum_{i=0}^{l+1} (-1)^i (\sigma|_{[v_0 \dots \bar{v}_i \dots v_{l+1}]}) \sigma|_{[v_{l+1} \dots v_k]}$$

$$\partial(\sigma \cap \varphi) = \sum_{i=0}^l (-1)^{i-l} \varphi(\sigma|_{[v_0 \dots v_l]}) \sigma|_{[v_l \dots \bar{v}_i \dots v_k]}. \quad \square$$

Получаем R -линейное отображение $(\cap - \text{произведение})$
 $H_k(X, R) \times H^l(X; R) \rightarrow H_{k-l}(X; R)$

Относит. версия:

$$H_k(X, A; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H_{k-l}(X; A; R)$$

$$H_k(X, A; R) \times H^l(X, A; R) \rightarrow H_{k-l}(X; R)$$

$$H_k(X, A \cup B; R) \times H^l(X, A; R) \rightarrow H_{k-l}(X, B; R)$$

Лемма (функториальность):

$$\begin{array}{ccc} H_k(X) \times H^l(X) & \xrightarrow{\cap} & H_{k-l}(X) \\ f_* \downarrow & f^* & \downarrow f_* \\ H_k(Y) \times H^l(Y) & \xrightarrow{\cap} & H_{k-l}(Y) \end{array}$$

Тогда $f_*(\alpha \cap \varphi) = f_*(\alpha \cap f^*(\varphi))$

Док. 6: $f\sigma \cap \varphi = \varphi(f\sigma|_{[v_0 \dots v_l]}) f\sigma|_{[v_l \dots v_k]}. \quad \square$

5

Теорема (двойств. Пуанкаре)

если M - замкнутое R -ориентируемое n -м-н-е с фундам. кл. $[M] \in H_n(M; R)$

то $D: H^k(M; R) \rightarrow H_{n-k}(M; R)$

явл-ся изом. для всех k .

Когомологи с комм. носителем

идея док-ва: аналог док-ва существования функц. класса

с помощью Майера - Вьеториса сводим к 1 карте но тогда нужно рассмотреть открытые U, V

т.е. мн-ва, но не обяз. замкнутые

т.е. нужна двойств. Пуанкаре для

произв. мн-жий (ор. ориентир. мн-жий (или замкн.))

Когомологи с комм. носителем

$$C_c^i(X) = \{ f: C_i(X) \rightarrow R : \exists \text{ комм. } K \subset X : f|_{C_i(X-K)} = 0 \}$$

имеем $\partial: C_c^i(X) \rightarrow C_c^{i-1}(X)$

$H_c^i(X)$ - когомологи с комм. носителем

Если X - комм, то $H_c^i(X) = H^i(X)$

зад.: $H_c^i(X) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ K \subset X \text{ комм.}}} H^i(X, X-K)$

зад.: $H_c^0(R^n)$ (не коголог. инвер.)

M — ориентированное n -мерное

$k \leq l \leq n$

$$H_n(M, M-L) \times H^k(M, M-L)$$

$$i_* \downarrow$$

$$i^* \uparrow$$

$$\begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} H_{n-k}(M)$$

$$H_n(M, M-k) \times H^k(M, M-k)$$

$\exists! \mu_k \in H_n(M, M-k), \mu_c \in H_n(M, M-L)$, дающие
 лок. ор. в $\mathbb{R}^n$ и L

$$i_*(\mu_k) \cap \varphi = \mu_c \cap i^*(\varphi) \quad \forall \varphi \in H^k(M, M-k)$$

$$\mu_k \cap \varphi = \mu_c \cap i^*(\varphi)$$

Рассм. $H^k(M, M-k) \rightarrow H_{n-k}(M)$

$$\varphi \mapsto \mu_k \cap \varphi$$

Получ. $D: H_c^k(M) \rightarrow H_{n-k}(M)$

$$\lim_{\leftarrow} H^k(M, M-k)$$

Теорема (Восст. для компак. мн-в $\mathbb{R}^n$)

Пусть M — n -мерное ориентированное (возм. компак.)

$$D_n: H_c^k(M) \rightarrow H_{n-k}(M) \quad \text{— изом}$$

Док-во из лемм

Лемма 1: $M = U \cup V$ открытое, $\exists$ коммут. диагр.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow H_c^k(U \cup V) & \rightarrow & H_c^k(U) \times H_c^k(V) & \rightarrow & H_c^k(M) & \rightarrow & H_c^{k+1}(U \cup V) \rightarrow \dots \\ & \downarrow D_{U \cup V} & \downarrow D_U \oplus D_V & & \downarrow D_M & & \downarrow D_{U \cup V} \\ \dots \rightarrow H_{n-k}(U \cup V) & \rightarrow & H_{n-k}(U) \times H_{n-k}(V) & \rightarrow & H_{n-k}(M) & \rightarrow & H_{n-k-1}(U \cup V) \rightarrow \dots \end{array}$$

А. $M = U \cup V$, D_U, D_V и $D_{U \cup V}$ — изом, тогда D_M — изом
 (из леммы)

Б. $M = \bigcup_i U_i$, где $U_1 \subset U_2 \subset \dots$

Лемма: Пусть D_{U_i} — изом. Тогда и D_M — изом

Док-во: $\exists H_c^k(U_i) \rightarrow H_c^k(U_{i+1})$ и $H_c^k(M) \cong \varinjlim H_c^k(U_i)$

$$\begin{aligned} \left(\lim_{\leftarrow} H_{n-k}(U_i) \right) &= \lim_{\leftarrow} H^k(M, M-k) \\ &= \lim_{\leftarrow} H^k(M, M-k) \end{aligned}$$

$$H_{n-k}(M) \cong \varinjlim H_{n-k}(U_i) \quad (\text{задача})$$

□
 (7)

1. Теперь рассм. $M = \mathbb{R}^n$

$$D_n: H^k(\Delta^n, \partial\Delta^n) \rightarrow H_{n-k}(\Delta^n)$$

корр.:

$$H^k(\Delta^n, \partial\Delta^n) \rightarrow H_0(\Delta^n)$$

$\phi: \Delta^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n \mapsto \Delta^n \cap \partial\mathbb{R}^n$ — нос. верш. Δ^n , т.е. одр. $H_0(\Delta^n)$

2. $M \subset \mathbb{R}^n$ — отк. мн-во

$$M = \bigcup_i U_i \text{ (счетное покрытие)} \quad U_i \text{ — отк. шар}$$

$$\text{Рассм. } U_i = \bigcup_{j < i} U_j \quad D_{U_i} \text{ и } D_{U_i \cap U_j} \text{ — изо по инд.}$$

$$D_{U_i} \text{ — изо, т.к. } U_i \cong \mathbb{R}^n \Rightarrow D_{U_i \cap U_j} \text{ — изо}$$

$$\text{Далее } M = \bigcup_i U_i, \quad U_1 \subset U_2 \subset \dots \Rightarrow D_M \text{ изо по н.Б.}$$

3. $M = \bigcup_i U_i$ (кон. или счетное), где $U_i \cong \mathbb{R}^n$
ак-но н.Б.

4. О другом случае

$$\text{Пусть } \mathcal{S} = \{ U \subset M: D_U \text{ — изо, } U \text{ — откр. шар} \}$$

то $\mathcal{S}$ ч.ч. по включению,

но н.Б. ~~Вместо~~ $U_1 \subset U_2 \subset \dots$ содержит верхнюю границу

$$\Rightarrow \text{по лемме Зорно } \exists \text{ макс. } U_{\max} \in \mathcal{S}$$

Если $U_{\max} = M$, всё доказано

Иначе $\exists x \in M, x \notin U_{\max} \quad U \ni x, \quad U \subset \mathbb{R}^n$
лжт в карте

$$\Rightarrow U \in \mathcal{S}, \quad U \cup U_{\max} \in \mathcal{S} \text{ по 2.}$$

$$\Rightarrow U \cup U_{\max} \in \mathcal{S} \text{ противор. с максим. } \quad \text{QED}$$

(без $\cup$ - произведение)

Имеем $d \cap (\varphi \cup \psi) = (d \cap \varphi) \cap \psi$
 $\alpha \in H_k(X), \varphi \in H^l(X), \psi \in H^m(X)$
 (задача)

В частности, если $k = l + m$,

$$\psi(d \cap \varphi) = \langle \psi, d \cap \varphi \rangle = d \cap \varphi$$

$$\psi(d \cap \varphi) = (\varphi \cup \psi)(\alpha)$$

$$\langle \psi, d \cap \varphi \rangle = \langle \varphi \cup \psi, d \rangle \quad (*)$$

Рассм $H^k(M; \mathbb{R}) \times H^{n-k}(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\varphi, \psi) \mapsto \langle \varphi \cup \psi, [M] \rangle$$

Для ориентированного замкнутого k -мерного многообразия

Опр: Билин. спаривание $\mathbb{R}$ -модулей $A \times B \rightarrow \mathbb{R}$

невырождено, если $A \rightarrow \text{Hom}(B, \mathbb{R})$ и $B \rightarrow \text{Hom}(A, \mathbb{R})$ изоморфизмы

Предлож: $\cup$ -спаривание невырождено, если

$$\mathbb{R}\text{-поле или } H^k(M)/\text{tors} \times H^{n-k}(M)/\text{tors} \rightarrow \mathbb{R}$$

Док-во: рассм.

$$H^{n-k}(M; \mathbb{R}) \xrightarrow{h} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{n-k}(M; \mathbb{R}), \mathbb{R}) \xrightarrow{D^*} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H^k(M; \mathbb{R}), \mathbb{R})$$

$$\psi \mapsto (d \mapsto \langle \psi, d \rangle) \mapsto \varphi \mapsto \langle \psi, D\varphi \rangle$$

$$\langle \psi, [M] \cap \varphi \rangle = \langle \varphi \cup \psi, [M] \rangle$$

h - изо / поле или $\mathbb{Z}$, если взяли /tors

D^* - изо (об. Рункаре

$$\Rightarrow \psi \mapsto \langle \varphi \cup \psi, [M] \rangle - \text{изо}$$

$\varphi \mapsto \langle \psi \mapsto \langle \varphi \cup \psi, [M] \rangle \rangle - \text{изо}$, т.к. $\cup$ кососимметрич

Следствие: $H^*(M)$ - алгебра Рункаре

Теорема (двойственность Пуанкаре - Леранжеса)

M — компактное ОР. n -мерное мн-во с краем
 $[M] \in H_n(M, \partial M)$ — ориент.-класс
 $\partial M = [M]$

$$D_M = [M] \cap : H^k(M, \partial M) \rightarrow H_{n-k}(M) \quad - \text{изом.}$$
$$H^k(M) \rightarrow H_{n-k}(M, \partial M)$$

Доказ.: $\exists$ воротник края ∂M , т.е. $\mathcal{U}(\partial M) \cong \partial M \times (0, 1)$

$$H_i(M, \partial M) \cong H_i(M - \partial M, \partial M \times (0, \varepsilon))$$

$\Rightarrow \exists [M] \in H_n(M, \partial M)$ $(M - \partial M)$ -к, ориентирующ. даёт ОР. в $\mathcal{U}(\partial M)$ $M - \partial M$

$$H^k(M, \partial M) \cong H_c^k(M - \partial M)$$

$$H_{n-k}(M) \cong H_{n-k}(M - \partial M)$$

$$\Rightarrow H_c^k(M - \partial M) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M - \partial M) \quad \text{даёт нужную изом.}$$

2-изом. — задана

Касательные и нормальные расслоения

Опр: M^n -многообразие, $M = \bigcup U_\alpha$, $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$
гладкий атлас, $\varphi_{\alpha\beta}: V_\alpha \cap V_\beta \xrightarrow{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}} V_\beta \cap V_\alpha$ — функции
сшивки

ТМ — рассл. над M со слоем $\mathbb{R}^n$,
Трив. атласом U_α и φ -функциями перехода

$$U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \underbrace{GL(n, \mathbb{R})}_{\varphi_{\alpha\beta}} \\ x \mapsto J_{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta}$$

Касательное расслоение

Опр: M -м-зие M наз. почти комплексным,
если ТМ-комплексное $\Leftrightarrow \exists J: TM \rightarrow TM \quad J^2 = -\text{id}_{TM}$
 M наз. параллелизуемым, если ТМ тривиально
 $\Leftrightarrow \exists n = \dim M$ лин. незав. ~~векторов~~ вект.-полей.

$N \subset M$ — подм-зие

$$\gamma(N \subset M) = (TM|_N) / TN \quad \text{— норм. рассл. к } N \text{ в } M$$

(позже с помощью метрики отождествим
 $\gamma_{N \subset M}$ с ортонорм. дополнением к TN в $TM|_N$).

Пример: $\exists \gamma \ni f$ f — тавтологич. рассл. над $\mathbb{CP}^n(\mathbb{R}^{2n+1})$

$$E\gamma = \{(\ell, x) : \ell \text{ — прямая в } \mathbb{C}^{n+1}, x \in \ell\} \xrightarrow{\gamma = \gamma_n^{-1}} \mathbb{CP}^n \\ (\ell, x) \mapsto \ell$$

Задача: описать трив. атлас и φ -функции
перехода для γ (качать с $\mathbb{CP}^1$)

$$E\gamma^\perp = \{(\ell, v), \ell \text{ — прямая в } \mathbb{C}^{n+1}, v \in \ell^\perp\} \\ \text{ан-но для } \mathbb{RP}^n$$



Лемма: $T\mathbb{R}P^n \cong \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$

Док-во: рассм. $S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n \quad f(x) = \{ \pm x \}$$

$$Dp: TS^n \rightarrow T\mathbb{R}P^n$$

$\pm(x, v) \mapsto$ один касат. вектор

$$\Rightarrow T\mathbb{R}P^n = \{ \pm(x, v) \mid \langle x, x \rangle = 1, \langle x, v \rangle = 0 \}$$

$$\pm(x, v) \mapsto f: \ell \rightarrow \ell^\perp, \quad f(x) = v$$

ℓ — прямая через x

$$\Rightarrow T_x \mathbb{R}P^n = \text{Hom}(\ell, \ell^\perp) \Rightarrow T\mathbb{R}P^n = \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp) \quad \square$$

Задача: $T\mathbb{C}P^n = \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$

Средство: $T\mathbb{R}P^n \oplus \mathbb{R} \cong \underbrace{\gamma \oplus \dots \oplus \gamma}_{n+1}$

$$T\mathbb{C}P^n \oplus \mathbb{R} \cong \underbrace{\gamma \oplus \dots \oplus \gamma}_{n+1}$$

Док-во: $T\mathbb{C}P^n \oplus \mathbb{C} \cong \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp) \oplus \text{Hom}(\gamma, \gamma) =$

$$= \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp \oplus \gamma) = \text{Hom}(\gamma, \mathbb{C}^{n+1}) \cong \underbrace{\gamma \oplus \dots \oplus \gamma}_{n+1} \quad \square$$

Векторные расслоения и хар.-классы

Предл. ξ - вект. рассл. над компл. хаусд. $E \rightarrow B$

$\exists$ мономорфное отображ. расслоения $j: E \rightarrow B \times \mathbb{R}^N$

Док-во: $\Gamma = \Gamma(E)$ - вект. пр-во сечений (беск-мерное)

$$B = U_1 \cup \dots \cup U_k, \quad \varphi_i: P^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{R}^N_{x_1^{(i)}, \dots, x_N^{(i)}}$$

$$f_1, \dots, f_k \text{ - расд. единицы } \sum_{N=kn} f_i = 1, \quad \text{supp } f_i \subset U_i, f_i \geq 0$$

$$s_i = f_i \varphi_i, \quad j(e) = (f_1 \varphi_1(e), \dots, f_k \varphi_k(e)) \quad \square$$

Упр.: $\exists p: B \times \mathbb{R}^N \rightarrow E, \quad p \circ j = \text{id}_E$

Следствие: вект. рассл. на компл. хаусд. пр-вом обладает линейной метрикой

Следствие: $\forall \xi \exists \eta: \xi \oplus \eta \cong B \times \mathbb{R}^N$

Далее будем рассм. компл. вект. рассл.

$$\mathcal{CP}(\xi) = \{ \text{прямые в слоях } \xi \}$$

$\mathcal{CP}(\xi)$ - тавтологич. рассл. над $\mathcal{CP}(\xi)$

$$E(\mathcal{CP}(\xi)) = \{ (l, x): l - \text{прямая в слое } \xi, x \in l \}$$

η - сопряж. к ξ $\xi \oplus \eta \cong \text{компл}(\xi, \mathbb{C})$

$$H^*(\mathcal{CP}(\eta)) = \mathbb{C}[u]/u^{n+1}=0 \quad u \in H^2(\mathcal{CP}(\eta)) \text{ двойст. к } \mathcal{CP}^{n-1}$$

Теорема Упр.: Рассм $q: \mathcal{CP}(\eta) \rightarrow \mathcal{CP}(\eta)/\mathcal{CP}^{n-1} \cong S^n$
 $\alpha \in H^{2n}(S^n)$ - станд. обр. Тогда $q^* \alpha = u^n$

Теорема: $\forall$ компл.

$$j: \mathcal{CP}(\xi) \xrightarrow{j} \mathcal{CP}(B \times \mathbb{R}^N) = B \times \mathcal{CP}^{N-1} \xrightarrow{\text{классиф. отобр. } \pi} \mathcal{CP}^{N-1}$$

$$v_\xi = j^* \pi^* u \in H^2(\mathcal{CP}(\xi))$$

$$i: \mathcal{CP}^{N-1} \hookrightarrow \mathcal{CP}(\xi) \Rightarrow i^* v_\xi = u \in H^2(\mathcal{CP}^{N-1})$$

$\square$

Теорема: $H^*(\sigma p(\xi)) \cong H^*(B) \otimes H^*(\xi)$ - n -мерная вект. рассл. над B

$H^*(\sigma p(\xi)) = H^*(B) \otimes H^*(\xi)$

где $c_i(\xi) \in H^*(B)$ $\xi^h + c_1(\xi)\xi^{h-1} + \dots + c_n(\xi) = 0$
 $i=1, \dots, n$ - некие классы коомол.

~~Доказ.~~

Теорема Лере - Хирша: $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ - лок. трив. рассл.

нужно а) $H^*(F; R)$ - конечно-порядк. свобод. R -модуль $\neq 0$;

б) $\exists u_j \in H^*(F; R): H^*(F; R) = R \langle i^*(u_j) \rangle \forall i: F \rightarrow E$
 $\text{сно } i$

Тогда $H^*(E; R)$ - свобод. $H^*(B; R)$ -модуль с базисом $\{u_j\}$,

т.е. $\Phi: H^*(B; R) \otimes_R H^*(F; R) \rightarrow H^*(E; R), \quad b \otimes i^*(u_j) \mapsto p^*(b) \otimes u_j$

- изоморфизм.

Доказ. Пусть B - ком-мерное клет. n -го р-ва.
 Индуцире по размерности $B^n \quad n = \dim B$

$B' \subset B$ получен удалением точки x_0 из каждой n -клетки $e_{n, \alpha}$
 $B' \cong B^{n-1}$ деф. ред. $E' = p^{-1}(B')$

$p^{-1}(B^{n-1}) \hookrightarrow E'$ - слабая гомотоп. эквивал.
 (по св-ву накрыт. гомотопии)

Рассм. коммут. диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} H^*(B, B') \otimes_R H^*(F) & \rightarrow & H^*(B) \otimes H^*(F) & \rightarrow & H^*(B') \otimes H^*(F) & \rightarrow & H^*(B) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ H^*(E, E') & \rightarrow & H^*(E) & \rightarrow & H^*(E') & \rightarrow & H^*(E) \end{array}$$

т.к. $\delta u_j = 0$

Чтобы применить 5-лемму, надо док-ть, что

$H^*(B, B') \otimes_R H^*(F) \xrightarrow{\Phi} H^*(E, E')$ - изом

Рассм. $B = \bigcup U_\alpha$ - трив. атлас, $U'_\alpha =$
 Рассм. $x_\alpha \in U_\alpha \subset e_{n, \alpha} \quad p^{-1}(U_\alpha)$ - трив. атлас

$U = \bigcup U_\alpha \quad U' = U \cap B'$
 $H^*(B, B') \cong H^*(U, U')$ (вырезание), $H^*(E, E') = H^*(p^{-1}(U), p^{-1}(U'))$
 получаем $\Phi: H^*(U, U') \otimes H^*(F) \rightarrow H^*(U \times F, U' \times F)$

- изом. по Φ -ле Кюккитца
 Если B - бескон-мерно. Рассм. $H^*(B) \otimes_R H^*(F) \rightarrow H^*(B^n) \otimes H^*(F)$
 изом в разн. ст. $\downarrow$
 $H^*(E) \rightarrow H^*(p^{-1}(B^n))$

$c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \dots + c_n(\xi)$ - однородный класс Чунг

Теорема: 1) $c_i(\xi) = 0$ если $i > \dim \xi$

2) $f: B' \rightarrow B \Rightarrow c(f^* \xi) = f^* c(\xi)$ (функториальность)

3) $c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) \cdot c(\eta)$ (ф-ла Чунга)

4) если η - табуль-класс над $\mathbb{C}P^n$, то $c_1(\eta) = -\sigma$, $c_2(\eta) = \sigma$

Док-во: 1) из опр.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}P(\xi) & \rightarrow & \mathbb{C}P(B \times \mathbb{R}^N) \\ \bar{f} \downarrow & & \uparrow \\ \mathbb{C}P(f^* \xi) & \rightarrow & \mathbb{C}P(B' \times \mathbb{R}^N) \end{array} \rightarrow \mathbb{C}P^{N-1}$$

$$\Rightarrow \sigma_{f^* \xi} = \bar{f}^* \sigma_{\xi} \Rightarrow$$

$$0 = \sigma_{f^* \xi}^n + c_1(f^* \xi) \sigma_{f^* \xi}^{n-1} + \dots + c_n(f^* \xi) =$$

$$0 = \bar{f}^* (\sigma_{\xi}^n + c_1(\xi) \sigma_{\xi}^{n-1} + \dots + c_n(\xi)) = \sigma_{f^* \xi}^n + \bar{f}^* c_1(\xi) \sigma_{f^* \xi}^{n-1} + \dots + \bar{f}^* c_n(\xi)$$

$$1, \sigma_{f^* \xi}^n, \dots, \sigma_{f^* \xi}^{n-1} - \text{базис} \Rightarrow c_i(f^* \xi) = \bar{f}^* c_i(\xi)$$

3) имеем $i_{\xi}: \mathbb{C}P(\xi) \xrightarrow{i_{\xi}} \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)$, $i_{\eta}: \mathbb{C}P(\eta) \rightarrow \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)$

$$\gamma(\xi \oplus \eta)|_{\mathbb{C}P(\xi)} = \gamma(\xi)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Рассм.} & V = \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta) - \mathbb{C}P(\xi) & V = \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta) - \mathbb{C}P(\eta) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \mathbb{C}P(\eta) & & \mathbb{C}P(\xi) \end{array}$$

гиперплоскости

(ан-но $\mathbb{C}P^n - \mathbb{C}P^k \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}P^{n-k-1}$)

$$\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta) = U \cup V$$

Рассм.

$$\theta = \sum_{j=0}^{m+n} \left(\sum_{r+s=j} c_r(\xi) \cdot c_s(\eta) \right) \sigma_{\xi \oplus \eta}^{m+n-j} =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^n c_j(\xi) \cdot \sigma_{\xi \oplus \eta}^{n-j} \right) \left(\sum_{k=0}^m c_k(\eta) \cdot \sigma_{\xi \oplus \eta}^{m-k} \right) \in H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta))$$

$$= \theta_1 \cdot \theta_2$$

$$H^*(\mathbb{CP}(\xi \oplus \eta), V) \rightarrow H^*(\mathbb{CP}(\xi \oplus \eta)) \xrightarrow{i_*} H^*(\mathbb{CP}(\xi)) = H^*(V)$$

$$\tilde{\theta}_1 \mapsto \theta_1 \mapsto 0$$

$$H^*(\mathbb{CP}(\xi \oplus \eta), U) \rightarrow H^*(\mathbb{CP}(\xi \oplus \eta)) \xrightarrow{j_*} H^*(\mathbb{CP}(\eta)) = H^*(U)$$

$$\tilde{\theta}_2 \mapsto \theta_2 \mapsto 0$$

$$\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2 \mapsto \theta_1, \theta_2$$

$$H^*(\mathbb{CP}(\xi \oplus \eta), U \cup V) = 0 \Rightarrow \theta_1, \theta_2 = 0$$

$$\in \mathbb{CP} \text{ (сложение)}, \quad 0 = \sum_{j=0}^{k_1+k_2} C_j (\xi \oplus \eta) \cup_{\xi \oplus \eta}^{k_1+k_2-j}$$

$$\Rightarrow C_j(\xi + \eta) = \sum_{r+s=j} C_r(\xi) \cdot C_s(\eta)$$

4) Т.к. η - одновекторно, $\gamma(\eta) = \eta$

соотв. в $H^*(\mathbb{CP}^n) : C_1(\eta)$
 код $\mathbb{CP}^n \quad \mathbb{CP}(\eta) \rightarrow \mathbb{CP}^n$ $\pi_1 \circ \sigma \circ \pi$

$$\text{соотв. в } H^*(\mathbb{CP}^n) \quad \cup_{\eta} + C_1(\eta) = 0$$

$$\Rightarrow C_1(\eta) = -\cup_{\eta} = -\sigma$$

Следствие: если ξ и η - сдв. $\exists \pi \in \pi_1$, т.е. $\xi \oplus \sigma^L = \eta \oplus \sigma^L$,
 то $C(\xi) = C(\eta)$

Когомологии многогр. пространства и классифич. гр-в

$G_{k,N}$ $G(k,N)$ - k -мерные многогр. в $\mathbb{C}^N$

$\eta_{k,N}^k$ - тавтологич. рассл. $E\eta_{k,N}^k = \{(\pi, x) : \pi \in G(k,N), x \in \pi\}$

$\eta_{k,N}^\perp$ $(N-k)$ -мерное $E\eta_{k,N}^\perp = \{(\pi, y) : y \in \pi^\perp\}$
 $\eta_{k,N} \oplus \eta_{k,N}^\perp = \mathbb{C}^N$

имеем $c_i = c_i(\eta_{k,N})$, $c_i^\perp = c_i(\eta_{k,N}^\perp)$, $c \cdot c^\perp = 1$

Теорема: $H^*(G(k,N)) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k] / c_i^\perp, i \geq N-k$

Док-во: очевидно это идеал. $\mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k] / c_i^\perp \rightarrow H^*(G(k,N))$

Докажем по индукции, что это - изо.

$k=1$ $G(1,N) = \mathbb{C}P^{N-1}$, $H^*(G(1,N)) = \mathbb{Z}[\sigma] / \sigma^N = 0$

$\sigma = c_1 = c_1(\eta) = c_1(\eta_{1,N})$ $c(\eta_{1,N}^\perp) = \frac{1}{1+\sigma} = 1 - \sigma + \sigma^2 - \dots$ $c_1^\perp = (-1)^N c_1(\eta_{1,N}^\perp)$

Пусть доказано для $G(k-1,N)$. Рассл. $G(k,N)$ и $\mathbb{C}P(\eta_{k,N})$ имеем

$$\mathbb{C}P(\eta_{k,N}) = \{l : l \subset \pi_k \subset \mathbb{C}^N\} \xrightarrow[\pi_k = l \oplus \pi_{k-1}]{} \{l \subset \pi_{k-1}^\perp \subset \mathbb{C}^N\} = \mathbb{C}P(\eta_{k-1,N}^\perp)$$

$\downarrow \pi$
 $G(k,N)$

$\downarrow \pi^\perp$
 $G(k-1,N)$

рассл. $\gamma = \gamma(\eta_{k,N}) = \gamma(\eta_{k,N}^\perp)$ - тавтологич. 1-мерное над $\mathbb{C}P(\eta_{k,N}) = \mathbb{C}P(\eta_{k-1,N}^\perp)$

Тогда $\pi^*(\eta_{k,N}) = \xi \oplus \gamma$, $(\pi^\perp)^*(\eta_{k,N}^\perp) = \gamma \oplus \xi$ для некоторых ξ, γ

где ξ - $(k-1)$ -мерное, γ - $(N-k)$ -мерное над

при этом $\pi^*(\eta_{k,N}^\perp) = \xi$, $(\pi^\perp)^*(\eta_{k-1,N}) = \gamma$

т.е. $\pi^* \xi \oplus \gamma \oplus \eta = \pi^*(\eta_{k,N} \oplus \eta_{k,N}^\perp) = \pi^*(\mathbb{C}^N) = \mathbb{C}^N$ - трив.

$H^*(\mathbb{C}P(\eta_{k,N}))$ есть своб. $H^*(G(k,N))$ - модуль с базисом $1, \sigma, \dots, \sigma^{k-1}$ $\sigma = c_1(\gamma)$

и соотношением $\sigma^k + c_1(\eta_{k,N})\sigma^{k-1} + \dots + c_k(\eta_{k,N}) = 0 \Leftrightarrow c_k(\xi) = 0$

Аналог. $H^*(\mathbb{C}P(\eta_{k-1,N}^\perp))$ есть своб. $H^*(G(k-1,N))$ - модуль с базисом $1, \gamma, \dots, \gamma^{N-k}$

$c_{N-k+1}(\xi) = 0$

и соотношением по предп. инд., $H^*(G(k-1,N))$ порожд. $c_1(\eta_{k-1,N}), \dots, c_{k-1}(\eta_{k-1,N})$ с соотнош. $c_i(\eta_{k-1,N}^\perp) = 0, i \geq N-k+1$

$\Rightarrow H^*(\mathbb{C}P(\eta_{k,N}^\perp)) = H^*(\mathbb{C}P(\eta_{k-1,N}))$ порожд. $\sigma = c_1(\gamma)$, $c_i(\xi)$, $c_j(\gamma)$ с соотнош. $c(\gamma \oplus \xi \oplus \eta) = 0$, $c_i(\xi) = 0$ из $c_j(\gamma) = 0$ при $j \geq N-k+1$

$\Rightarrow H^*(\mathbb{C}P(\eta_{k,N}))$ - своб. модуль над $\mathbb{C}P(\eta_{k,N})$ порожд. $c_1(\xi), \dots, c_k(\xi)$

базисом $1, \sigma, \dots, \sigma^{k-1}$. с ∂ р. соотнош. $\pi^*: H^*(G(k,N)) \rightarrow H^*(\mathbb{C}P(\eta_{k,N}))$
 $c_i(\eta_{k,N}) \mapsto \pi^* c_i(\eta_{k,N}) \in \mathbb{C}[\xi, \gamma]$

Классы Шварца Пуанкаре-Координаты

$G(k, N)$ - k -мерные ил-л в $\mathbb{C}^N$

Рассмотрим станд. коорд. фаз

$$\mathbb{C} \subset \mathbb{C}^1 \subset \mathbb{C}^2 \subset \dots \subset \mathbb{C}^{N-1} \subset \mathbb{C}^N$$

$\forall 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq N$ подпр-во k -мерное ил-л $\pi_{i_1, \dots, i_k} \subset \mathbb{C}^N$ задаётся $k \times N$ -матрицей P (по строкам - координаты базиса) точки. до умножение слева на матрицу из $GL(k, \mathbb{C})$

$\forall 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq N$ рассм. открытое подмк-во

$$U_{i_1, \dots, i_k} = \{ \pi \subset \mathbb{C}^N : \pi \text{ проецируется без вырождений на } \mathbb{C}_{i_1, \dots, i_k} \}$$

$$= \{ [P] : \det P_{i_1, \dots, i_k} \neq 0 \}$$

$$P_{i_1, \dots, i_k} = \det P_{i_1, \dots, i_k}$$

класс экв. минор $k \times k$

$$G(k, N) = \bigcup U_{i_1, \dots, i_k} - \text{атлас}$$

$\{ P_{i_1, \dots, i_k} \}$ - координаты Пуанкаре $\dim G(k, N) = k(N-k)$ (координаты в $U_{i_1, \dots, i_k}$ - все столбцы $i_1, \dots, i_k$)

$$G(k, N) \hookrightarrow \mathbb{C}P^{C_N^k - 1}$$

Вложение Пуанкаре

$$\pi \mapsto [\dots P_{i_1, \dots, i_k} \dots]$$

Образ задаётся соотношениями Пуанкаре:

Пример: Если считать $P_{i_1, \dots, i_k} = (-1)^{\sigma} P_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k)}$, то соотнош.

Пуанкаре имеют вид

$$\sum_{r=1}^{k+1} (-1)^r P_{i_1, \dots, i_{k-1}, j_r} P_{j_1, \dots, j_{r-1}, j_{r+1}} = 0 \quad \forall (i_1, \dots, i_{k-1}), (j_1, \dots, j_{k+1})$$

Например $G(2, 4) \hookrightarrow \mathbb{C}P^5$

$$\pi \mapsto (P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P_{34})$$

$$(i_1, i_2) (j_1, j_2, j_3) = (234)$$

$$P_{12}P_{34} - P_{13}P_{24} + P_{14}P_{23} = 0$$

Клетки Шуберта

Для $\pi \in G(k, N)$ и $\{0\} \subset \mathbb{C}^1 \subset \mathbb{C}^2 \subset \dots \subset \mathbb{C}^N$ рассм.

$$0 \leq \dim(\pi \cap \mathbb{C}^1) \leq \dim(\pi \cap \mathbb{C}^2) \leq \dots \leq \dim(\pi \cap \mathbb{C}^N) = k$$

Два соседних числа отличаются не более чем на 1.
Т.е. в посл-ти были в точности k "скачков"
Эти скачки задаются символами Шуберта

$$s = (s_1, \dots, s_k), \quad 1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq N,$$

$$\dim(\pi \cap \mathbb{C}^{s_i}) = i, \quad \dim(\pi \cap \mathbb{C}^{s_i-1}) = i-1$$

Оно : $e(s) = \{ \pi \in G(k, N) : \dim(\pi \cap \mathbb{C}^{s_i}) = i, \dim(\pi \cap \mathbb{C}^{s_i-1}) = i-1 \}$
 $\forall i = 1, 2, \dots, k.$

$e(s)$ наз. клеткой Шуберта.

Очевидно, $G(k, N) = \bigcup_{s=(s_1, \dots, s_k)} e(s), \quad e(s) \cap e(s') = \emptyset$
 $s \neq s'$

Теорема : $G(k, N) = \bigcup_s e(s)$ — клеточное разделение пространства

Док-во: рассм. $H^k = \{ z \in \mathbb{C}^N : z \in \mathbb{C}^i, |z_i| > 0 \}$ — откр.
нормир-во
 $(z_1, \dots, z_i, 0, \dots, 0)$

Тогда $\pi \in e(s) \Leftrightarrow \pi = \langle e_1, \dots, e_k \rangle : e_i \in H^{s_i}$

Т.е. π задаётся матрицей

(базис $e_1, \dots, e_k$ — по строкам)

$$\begin{pmatrix} * & \dots & * & \overset{s_1}{1} & & & & \\ x & \dots & * & x & \dots & * & 1 & \\ \vdots & & & & & & & 0 \\ x & \dots & * & x & \dots & * & x & \dots & * & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда выводится, что $e(s)$ гомеоморфно откр. шару
размерности $(s_1-1) + (s_2-2) + \dots + (s_k-k)$ (задача)
(параметры, соотв. * с точностью до умножения скала на $\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$)
Далее можно доказать, что

$$\overline{e(s)} \subset \bigcup_{t \leq s} e(t) \quad \text{где} \quad t = (t_1, \dots, t_k) \leq s = (s_1, \dots, s_k),$$

если $t_i \leq s_i \quad \forall i = 1, \dots, k.$

(задача)

гоомологии деск-мерных трансмопионов

имеем $G_k(\sigma^N) \subset G_k(\sigma^{N+1})$

$$BV(k) = G_k(\sigma^\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} G_k(\sigma^N) = \bigcup_N G_k(\sigma^N)$$

классифику. нр-во k -мерных расслоений

$G_k(\sigma^N) \subset G_k(\sigma^{N+1})$ — клет. подар-во $\Rightarrow$

получаем клет. разбиение для $G_k(\sigma^\infty) = BV(k)$

Опр: разбиением целого числа $\Gamma \geq 0$ наз.

нечпор. посл-во $\omega = (i_1, i_2, \dots, i_s)$, $\sum_{i_k > 0} i_k = \Gamma$

Число разбиений Γ обозн. $P(\Gamma)$

Предложение: число Γ -мерных клеток в $G_k(\sigma^M)$

равно числу разбиений Γ на не более чем k

положит. чисел, каждое из k -рых $\leq M-k$

Док-во: раскл. $1 \leq s_1 < \dots < s_k \leq N$

$$\Gamma = (s_1 - 1) + \dots + (s_k - k)$$

$$(s_1 - 1), (s_2 - 2), \dots, (s_j - j), (s_{j+1} - (j+1)), \dots, s_k - k$$

$i_1, \dots, i_s$ получается из $s_1, \dots, s_k$ удалением нулей

$i_1 + \dots + i_s = \Gamma \Rightarrow \omega = (i_1, \dots, i_s)$ — разбиение Γ , $s_k - k \leq M - k$

Следствие: число Γ -мерных клеток в $G_k(\sigma^M)$ равно $P(\Gamma)$

Теорема: $H^*(BV(k)) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k]$ алгебра $c_i = 2c_i$

Док-во: $G_k(\sigma^N) \hookrightarrow G_k(\sigma^\infty) = BV(k)$

$$H^*(BV(k)) \rightarrow H^*(G_k(\sigma^M)) = \frac{\mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k]}{(c_i^{\perp}, i \geq M-k)} \text{ — эоморфизм}$$

$$\Rightarrow H^*(BV(k)) \rightarrow \lim_{\leftarrow} H^*(G_k(\sigma^M)) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k] \rightarrow 0 \text{ — эоморф.}$$

$H^{2\Gamma}(BV(k))$ — своб. абелева группа (из клет. разбиения),
размерности $P(\Gamma)$, как и $\mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k]^{2\Gamma} \ni c_1^{i_1} \dots c_k^{i_k}$
 $\omega = (i_1, \dots, i_s)$ $i_1 + \dots + i_s = \Gamma$

$\Rightarrow$ изоморфизм

$c_i = c_i(\gamma_k)$, γ_k кад $BV(k)$ — табл. расслоения
универс. хар. классы

Алгебры с делением и классы Шифеля - Уитни

Канонический:

Т.е. ξ - векс. k -мерное рассл. над X

$$w_i(\xi) \in H^i(X, \mathbb{Z}_2) \quad i=1, \dots, k \quad \text{классы Ш.-У.}$$

$$T\mathbb{R}P^n \oplus \underline{\mathbb{R}} \cong \underbrace{\gamma \oplus \dots \oplus \gamma}_{n+1}$$

$$w(\mathbb{R}P^n) = (1+t)^{n+1}$$

$$\text{т.е. } t = w_1(\gamma) \in H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \text{ образующая}$$

Предположение:

$$w(\mathbb{R}P^n) = 1 \Leftrightarrow n+1 = 2^k$$

Т.е. тогда если $\mathbb{R}P^n$ параллелизуемо, то $n=1, 3, 7, 15, \dots$

Док-во пусть $n+1=2^k$. Тогда

$$w(\mathbb{R}P^n) = (1+t)^{2^k} = 1+t^{2^k} = 1, \text{ т.к. } t^{2^k} = t^{n+1} = 0$$

Если пусть $n+1=2^k \cdot m$, m - нечетно. Тогда

$$w(\mathbb{R}P^n) = (1+t)^{2^k \cdot m} = (1+t^{2^k})^m = 1 + m t^{2^k} + \dots \neq 1 \text{ т.к. } t^{2^k} \neq 0. \quad \square$$

Теорема (Шифель): предположим, что существует билинейное умножение (м.д. без единицы и неассоц.)

$$m: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

без делителей нуля. Тогда $\mathbb{R}P^{n-1}$ параллелизуемо, т.е. $n=2^k$.

Док-во: пусть $e_1, \dots, e_n$ - базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$\Gamma_i: y \mapsto m(y, e_i)$ - изоморфизм $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Рассм $\sigma_i = \Gamma_i \circ \Gamma_i^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Тогда $\sigma_1 = id$ и при $x \neq 0$ $\sigma_2(x), \dots, \sigma_n(x)$ лин. независимы

$\sigma_2, \dots, \sigma_n$ дают $(n-1)$ лин. незав. сечений $T\mathbb{R}P^{n-1} \cong \text{hom}(\gamma, \gamma^\perp)$

$$\ell \subset \mathbb{R}^n \mapsto \tilde{\sigma}_i: \ell \rightarrow \ell^\perp, x \mapsto p_{\ell^\perp} \sigma_i(x)$$

$$\tilde{\sigma}_1 = 0, \tilde{\sigma}_2, \dots, \tilde{\sigma}_n - \text{базис в } L^\perp.$$

$$\Rightarrow T\mathbb{R}P^{n-1} = \text{hom}(\gamma, \gamma^\perp) \text{ тривиально} \quad \square$$

$\mathbb{R}P^1, \mathbb{R}P^3, \mathbb{R}P^7$ параллелизуемы т.к. есть билин. умножение на $\mathbb{R}^2$ (компл. числа), $\mathbb{R}^4$ (кватернионы), $\mathbb{R}^8$ (числа Кэли)
Остальные не параллелизуемы (Адамс $\square$)

(4)

Погружения и классы Линдере - Уитни

Если $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ — погружение с норм. рассл. V ,
то $w(M) \cdot w(V) = 1$, $w_i(V) = w_i^\perp(M) = 0$ при $i > k$

Рассм. $\mathbb{R}P^9$

$$w(\mathbb{R}P^9) = (1+t)^{10} = 1 + t^2 + t^8$$

$$w^\perp(\mathbb{R}P^9) = 1 + t^2 + t^4 + t^6 \quad w_6^\perp(\mathbb{R}P^9) \neq 0$$

$\Rightarrow \mathbb{R}P^9$ нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{14}$

Теорема (Уитни): гладкое компактное M^n , $n > 1$
можно вложить в $\mathbb{R}^{2n}$ и погрузить в $\mathbb{R}^{2n-1}$.

Теорема: $\mathbb{R}P^{2^r}$ нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{2^{r+1}-2}$.

Док-во: $w(\mathbb{R}P^{2^r}) = (1+t)^{2^{r+1}} = (1+t)^{2^r}(1+t) =$
 $= (1+t^{2^r})(1+t) = 1 + t + t^{2^r}$

$$w^\perp(\mathbb{R}P^{2^r}) = 1 + t + t^2 + \dots + t^{2^r-1}$$

Если бы $\exists \mathbb{R}P^{2^r} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2^{r+1}-2}$, то было бы

$$\dim V = 2^{r+1}-2 - 2^r = 2^r - 2$$

$$\text{но } w(V) = w_{2^r-1}^\perp(\mathbb{R}P^{2^r}) = t^{2^r-1} \neq 0 \quad \square$$

т.е. в разм. 2^r оценка теоремы Уитни точна.

Замечание: получаем, что не только $\mathbb{R}P^9$
нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{14}$, но даже и $\mathbb{R}P^8$
нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{14}$

Ориентируемые расслоения, класс Тома и класс Эйлера

$\xi: E \rightarrow B$ - вект. рассл. (вещественное)

$$B = \bigcup_i U_i, \quad \varphi_i: p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{R}^n$$

$\psi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ - ф-ции склейки

Выбор ориентации в слое $F_x = p^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ выбор образующей $\alpha_x \in H^n(F_x, F_x \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Опр.: ξ наз ориентируемым, если $\exists$ тривиализующий атлас $B = \bigcup_i U_i$ с $\psi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \subset GL_n^+(\mathbb{R})$
(положит. ОПР-АТ)

Если $x, y \in U_i$, то ориентации в F_x, F_y согласованы, если они переходят друг в друга при изоморфизмах

$$\alpha_x \in H^n(F_x, F_x \setminus \{0\}) \xrightarrow{(\varphi_i^*|_{F_x})} H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \xrightarrow{(\varphi_i^*|_{F_y})} H^n(F_y, F_y \setminus \{0\})$$

Тогда ξ ориентируемо $\Leftrightarrow \exists$ выбор согласованных ориентаций $\alpha_x \in H^n(F_x, F_x \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) \cdot \forall x \in B$.

Теорема (Том): пусть $p: E \rightarrow B$ - n -мерное вещ. ориентируемое расслоение и согласованы выборы $\alpha_x \in H^n(F_x, F_x \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ (задана ориентация расслоения).

а) $\exists!$ класс $\Theta \in H^n(E, E \setminus B; \mathbb{Z})$, ограничение которого на $H^n(F_x, F_x \setminus \{0\})$ есть $\alpha_x \quad \forall x \in B$;

б) $H^k(B) \cong H^k(E) \xrightarrow{\cdot \Theta} H^{k+n}(E, E \setminus B)$ - изоморфизм.

Док. во: обозн. $E \setminus B = E_0$ (E без нулевого сечения)

1 случай ξ - тривиальное рассл. над B , $E = B \times \mathbb{R}^n$
имеем $1 \in H^0(B)$ и $e^n \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

Тогда $H^n(E, E_0) = H^n(B \times \mathbb{R}^n, B \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$

и $\Theta = 1 \otimes e^n$ - нулевой класс

II случай: $B = B' \cup B''$, при этом теорема
 верна для $\exists |_{B'}: E' \rightarrow B'$, $\exists |_{B''}: E'' \rightarrow B''$ и $\exists |_{B' \cap B''}: E' \cap E'' \rightarrow B' \cap B''$
 (где мы обозн. $E' = E' \cap E''$, $B' = B' \cap B''$).
 рассм. посылка Майера - Вейториса

$$\dots \rightarrow H^{j-1}(E') \rightarrow H^j(E) \rightarrow H^j(E') \oplus H^j(E'') \rightarrow H^j(E'') \rightarrow \dots$$

$$\cong \downarrow \cdot \theta' \quad \textcircled{\downarrow \cdot \theta} ? \quad \cong \downarrow \cdot \theta' \oplus \cdot \theta'' \quad \cong \downarrow \cdot \theta''$$

$$\dots \rightarrow H^{j-1+n}(E', E_0') \rightarrow H^{j+n}(E, E_0) \rightarrow H^{j+n}(E', E_0') \oplus H^{j+n}(E'', E_0'') \rightarrow H^{j+n}(E'', E_0'') \rightarrow \dots$$

по предпосл. $\exists! \theta' \in H^n(E', E_0')$, $\theta'' \in H^n(E'', E_0'')$, $\theta \in H^n(E, E_0)$

θ', θ'' переходят в один класс $\theta' \in H^n(E', E_0')$ (из единственности)

$\Rightarrow$ они явл. образами нек-го $\theta \in H^n(E, E_0)$

Он определен однозначно, т.к. $H^{n-1}(E', E_0') = 0$ (по предпосл.)

Далее, $\cdot \theta: H^j(E) \rightarrow H^{j+n}(E, E_0)$ - изом. из диаграммы
 выше, по лемме о 5 гомоморфизмах

III случай $B = U_1 \cup \dots \cup U_k$ - конечно, $p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ тривиально
 индукция по k . $k=1$ - случай I

Шаг индукции - применить случай II к $\exists |_{U_1 \cup \dots \cup U_{k-1}}$ и $\exists |_{U_k}$

$$\text{и } \exists |_{(U_1 \cup \dots \cup U_{k-1}) \cap U_k}.$$

IV случай: общий

Рассм. комп. подм-ва $C \subset B$
 Тогда $\varinjlim H_i(C) \subset H_i(B)$ всегда, но $\varinjlim H_i(C) \neq H_i(B)$ в общем случае

$$\text{Рассм. } H^n(E, E_0) \rightarrow \varinjlim H^n(p^{-1}(C), p^{-1}(C)_0)$$

Если это - изом., то $\exists! \theta \in H^n(E, E_0)$, который
 получается из $\exists! \theta_C \in H^n(p^{-1}(C), p^{-1}(C)_0)$, а это
 было доказано ранее

это даст док-во а) в общем случае.

(?)

Осталось доказать, что $H^n(E, E_0) \cong \varprojlim H^n(p^{-1}(c), p^{-1}(c)_0)$
и, что $\delta)$ в обобщенном случае

Имеем $H^n(E, E_0) \cong H_n(E, E_0) \otimes \text{Hom}(H_n(E, E_0), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_{n-1}(E, E_0), \mathbb{Z})$

можно док-ть, что $H_{n-1}(E, E_0) = 0$ (см. [Милнор-Сташера])

$$\begin{aligned} \text{Тогда } H^n(E, E_0) &\cong \text{Hom}(H_n(E, E_0), \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\varprojlim H_n(p^{-1}(c), p^{-1}(c)_0), \mathbb{Z}) \cong \\ &\cong \varprojlim H^n(p^{-1}(c), p^{-1}(c)_0). \end{aligned}$$

Наконец, что $\delta)$ следует из а) как частный случай теоремы Лере-Хирша!

Теорема: рассм. пару лок. трив. расслоений $(F, F') \xrightarrow{i} (E, E') \xrightarrow{p} B$.

Предположим, что $H^*(F, F'; \mathbb{R})$ - свод. $\mathbb{R}$ -модуль, конечно порожд. в каждой размерности.

Предположим, что $\exists$ ~~линейно независимые~~ $\sigma_j \in H^*(E, E'; \mathbb{R})$

такие, что $\{i^*(\sigma_j)\}$ - базис в каждом $H^*(F, F'; \mathbb{R})$

Тогда $H^*(E, E'; \mathbb{R})$ - свод. $H^*(B; \mathbb{R})$ -модуль с базисом $\{\sigma_j\}$.

Чтобы вывести что $\delta)$ из что $a)$ в теореме Тома, можно применить т-му Лере-Хирша к паре $(R^n, R^n \setminus \{0\}) \rightarrow (E, E') \xrightarrow{p} B$. □

Опр: класс $\theta \in H^n(E, E \setminus B; \mathbb{Z})$ наз. классом Тома ориентированного расслоения ξ , а его образ $\theta \otimes \mathbb{R}$ при гом-ме $H^n(E, E \setminus B) \rightarrow H^n(E) \xrightarrow{\cong} H^n(B)$ - классом Эйлера, обозн. $e(\xi) \in H^n(B; \mathbb{Z})$

Введём на ξ евкл. метрику и рассм $D\xi \supset S\xi$ - расслоение ед. шаров и сфер

$\text{Th } \xi := D\xi / S\xi$ - кр-во Тома расслоения ξ

По-другому, $\text{Th } \xi$ - одноточечная компактификация кр-ва расслоения $E\xi$. 3

Тогда $H^{k+n}(E, E \setminus B) \cong H^{k+n}(D\mathbb{B}, D\mathbb{B} \setminus B) \cong H^{k+n}(D\mathbb{B}, S\mathbb{B}) \cong \tilde{H}^{k+n}(Th\mathbb{B})$

и изом-м. Тогда $H^k(B) \xrightarrow{\cdot \theta} \tilde{H}^{k+n}(Th\mathbb{B}), \theta \in H^n(Th\mathbb{B})$

Примеры: 1. $\xi = (\mathbb{R}^k \rightarrow pt)$ $Th\mathbb{B} = S^k$

2. $\xi: (X \rightarrow X)$ 0-мерное расслоение $Th\mathbb{B} = X_+ = X \sqcup pt$

3. $Th(\xi \oplus \mathbb{R}^k) \cong \Sigma^k Th\mathbb{B}$ (k -кратная подстройка)

4. $Th(\mathbb{R}^k) \cong (\Sigma^k X) \vee S^k$

5. (задача). нр-в. η - таавтономич. кад $\mathbb{R}P^n$ ($\mathbb{C}P^n$)

Тогда $Th\eta \cong \mathbb{R}P^{n+1}$ ($\mathbb{C}P^{n+1}$)

В частности $\eta \subset \mathbb{R}P^1$ - лист Мебиуса, $Th\eta = \mathbb{R}P^2$

Теорема (св-ва класса Эйлера) и инду-отобр $f: B \rightarrow B'$

а) если $\xi \xrightarrow{f} \xi'$ - о-отобр. расслоений, то $e(\xi) = f^*(e(\xi'))$

б) если $\tilde{\xi}$ - расслоение ξ с обратн. ориентацией, то

$$e(\tilde{\xi}) = -e(\xi)$$

в) если $\dim \xi$ нечетна, то $2e(\xi) = 0$

г) $e(\xi \oplus \xi') = e(\xi) \cup e(\xi')$, $e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi')$

д) если ξ допускает всюду ненулевое сечение, то $e(\xi) = 0$

Док-во: а) следует из функториальности класса Тома

б) по определению

в) т.к. f обратн. ориентируемо из $E\xi \rightarrow E\xi', (b, v) \mapsto (b, -v)$,
 $e(\tilde{\xi}) = e(\xi)$, но $e(\tilde{\xi}) = -e(\xi)$ в (случ. б)

г) из эквив-ции класса Тома $\theta(\xi \times \xi') = \theta(\xi) \times \theta(\xi')$ в $H^*(E \times E', E \times E \setminus B \times B')$

отсюда $e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi')$ Рассм $\Delta: B \rightarrow B \times B$

тогда $e(\xi \oplus \xi') \quad \xi \oplus \xi' = \Delta^*(\xi \times \xi') \Rightarrow e(\xi \oplus \xi') = \Delta^*(e(\xi) \times e(\xi')) = e(\xi) \cup e(\xi')$

д) имеем $B \xrightarrow{\xi} E_0 \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B \quad E_0 = E \setminus B$

$H^*(B) \xrightarrow{p^*} H^*(E) \rightarrow H^*(E_0) \xrightarrow{s^*} H^*(B)$ — Тонфа. гомом.

$$e(\xi) \mapsto \theta(\xi)|_E \mapsto 0 \mapsto 0$$

т.к. это композиция

$$H^*(E, E_0) \rightarrow H^*(E) \rightarrow H^*(E_0)$$

По-другому, если ξ допускает метрику, то получаем

$$\xi = \xi' \oplus \mathbb{R} \Rightarrow e(\xi) = e(\xi') \cdot e(\mathbb{R}) = 0$$

□ (4)

Класс Эйлера, двойственной Пуанкаре и Эйлера X-ка

$i: M = M^m \hookrightarrow N^n = N^{m+k}$ гладкое подмногообразие вложения многообразий.

$\nu(M \subset N) = (TN|_M) / TM$ - нормальное расслоение

Если N - риманово мн-во, то

$Ev(M \subset N)$ отождествляется с мн-вом нормальных векторов $TN^\perp \subset TM$

Теорема (о трубчатой окрестности):

$\exists$ открытая окрестность M_ε мн-ва M в N , диффеоморфная по ν расслоению Ev , причём M отображается в нулевое сечение Ev .

Док.во: при помощи экпон. отображ. $Exp: (Ev)_\varepsilon \rightarrow M$ (см. Ленг или Милнор-Стасефф)

Предложение: если $M \subset N$ замкнуто, то

$$H^*(Ev, (Ev)_0) \cong H^*(N, N \setminus M)$$

Док.во: $M \in U(N \setminus M) = N$ - открытое покрытие $\Rightarrow$

$$H^*(N, N \setminus M) \cong H^*(M, M \in M) \cong H^*(\text{вырезание}, (Ev)_0)$$

$$\text{Рассмотрим } H^k(N, N \setminus M) \xrightarrow{j^*} H^k(N) \xrightarrow{i^*} H^k(M)$$

класс Тома $\theta(V)$ $\longmapsto$ $e(V)$ класс Эйлера (если V ориент.)

Задача: $e(V) \in H^k(M)$ двойствен по Пуанкаре к $[N]$

Пусть M и N ориентированы. Тогда изом.

$TM \oplus \nu(M \subset N) \cong TN|_M$ задаёт ориентацию $\nu(M \subset N)$

Задача: $\theta(V) \in H^k(N)$ двойствен по Пуанкаре к $i_*[M] \subset H_m(N)$

Указание: над проверить, что $[N] \cap j^* \theta(V) = i_*[M]$,

где $j: (M, \partial) \rightarrow (N, N \setminus M)$. Эквивалентно, $j_*[N] \cap \theta(V) = i_*[M]$

далее воспользоваться опр. функц. класса и класса Эйлера (при отпр. на $(M, M \setminus X)$ и т.д.)

Следствие: если $M = M^m$ гладко вложено в $\mathbb{R}^{m+k}$, то $w_k(V) = 0$. Если M - ориентируемо, то $e(V) = 0$

Задача: $\mathbb{R}P^2$ нельзя гладко вложить в $\mathbb{R}^{2^{p+1}-1}$

Рассм. диагональ $\Delta: M \rightarrow M \times M$, $\Delta(x) = (x, x)$

Лемма: $\nu(\Delta: M \rightarrow M \times M) \cong TM$

Док-во: берём $(u, v) \in TM_x \times TM_x = T(M \times M)_{(x, x)}$

касательн к $\Delta(M) \Leftrightarrow u = v$ и нормальн к $\Delta(M) \Leftrightarrow u = -v$

Тогда $TM_x \rightarrow \nu_x(\Delta)$ даёт изоморф. расщеплени $\mathbb{R}$
 $u \mapsto (u, u)$

Следствие: имеет класс Тома $\theta_\Delta \in H^n(M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))$,
 если M - ориентировано, причём для

$$j_x: (M, M \setminus x) \rightarrow (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)), \quad j_x(y) = (x, y)$$

имеем $j_x(\theta_\Delta) \in H^n(M, M \setminus x)$ - образующая, задаваемая ориентацией

Док-во: надо док-ть, что j_x гомотопна в локальном слое в норм. расслоении к $\Delta(M)$ в $M \times M$ (задача) $\square$

Опр: при отображении на $(M \times M, \emptyset) \hookrightarrow (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))$
 класс Тома θ_Δ переходит в класс $\Delta(M)^* \in H^n(M \times M)$,
 наз. диагональным кохомолог классом
 (двойствен по Пуанкаре к $\Delta_*[M] \in H_n(M \times M)$)

Имеет X -многообразие $x: H^p(M) \times H^q(M) \rightarrow H^{p+q}(M \times M)$

Лемма: $\forall d \in H^*(M)$ имеем $(d \times 1) \cup \Delta(M)^* = (1 \times d) \cup \Delta(M)^*$

Док-во: U_ε - окрестность $\Delta(M)$ в $M \times M$, $p_1, p_2: M \times M \rightarrow M$
 $U_\varepsilon \xrightarrow{\cong} \Delta(M)$ - деф. репр., - проекции

$p_1|_{U_\varepsilon} \simeq p_2|_{U_\varepsilon} \Rightarrow p_1^*(\alpha) = \alpha \times 1 \sim p_2^*(\alpha) = 1 \times \alpha$
 переходит в один класс при озр. $H^i(M \times M) \rightarrow H^i(U_\varepsilon)$

Рассм.

$$p_1^*(\alpha), p_2^*(\alpha)$$

$$H^i(M \times M) \longrightarrow H^i(U_\varepsilon)$$

$$\downarrow \cup \theta_\Delta$$

$$\downarrow \cup \theta_\Delta$$

$$H^{i+q}(M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)) \xrightarrow{\cong} H^{i+q}(U_\varepsilon, U_\varepsilon \setminus \Delta(M))$$

$\square$

Определяется действие / умножения (slant product)
 $H^{p+q}(X \times Y) \otimes H^p(Y) \rightarrow H^p(X)$ $\alpha, \sigma \mapsto \alpha / \sigma$
 на уравнение коэф. (ко)сечений

$$C^{p+q}(X \times Y) \otimes C_p(Y) \rightarrow C^p(X) \quad (\text{бilinear map от } \mathbb{R})$$

$$(\alpha \times \beta) \otimes e_i \mapsto \alpha \cdot \langle \beta, e_i \rangle$$

Удобно. $(\alpha \times \beta) / \sigma = \alpha \langle \beta, \sigma \rangle$ $\forall \alpha \in H^*(X), \beta \in H^*(X \times Y)$
 $((\alpha \times 1) \cup \beta) / \sigma = \alpha \cup \beta / \sigma$

Лемма: Для $\Delta(M)^* \in H^*(M \times M)$ и $[M] \in H_n(M)$
 и имеем $\Delta(M)^* / [M] = 1$.
 M - компактно!

Док-во: рассм. $x \in M$ и вычислим ограничение
 $\Delta(M)^* / [M] \in H^0(M)$ на $H^0(X) \cong \mathbb{R}$ (кольцо коэф. ф-в)

$$\begin{array}{ccc} i_x: M \rightarrow M \times M, y \mapsto (x, y) & \xrightarrow{[M]} & H^0(M) \\ \Delta(M)^* \downarrow & & \downarrow \\ (1 \times i_x^* \Delta(M)^*) & \xrightarrow{[M]} & H^0(X) \end{array} \Rightarrow \Delta(M)^* / [M] |_x = 1 \cdot \langle i_x^* \Delta(M)^*, [M] \rangle_{H^0(X)}$$

Рассм.

$$\begin{array}{ccc} M & \hookrightarrow & (M, M \setminus x) \\ i_x \downarrow & & \downarrow j_x \\ (M \times M) & \hookrightarrow & (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)) \end{array} \quad \begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ (x, y) \end{array}$$

имеем $\langle i_x^* \Delta(M)^*, [M] \rangle = \langle j_x^* \theta_\Delta |_M, [M] \rangle = \langle j_x^* \theta_\Delta, \alpha_x \rangle = 1$
 где $\alpha_x \in H_n(M, M \setminus x)$ - образующая, задаваемая ориентацией.

$\Rightarrow \Delta(M)^* / [M] |_x = 1 \in H^0(X) \quad \forall x \Rightarrow \Delta(M)^* / [M] = 1 \quad \square$

Теорема (двойств. Пуанкаре и двойст. класс)
 Пусть M - ~~ориентированная~~ n -замкнуто, коэф-ты в поле!

Пусть M ориентировано (или коэф в $\mathbb{Z}_2$)

$\beta_1, \dots, \beta_r$ - базис в $H^*(M)$ $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_r$ - двойств. базис,
 $\langle \beta_i \cup \tilde{\beta}_j, [M] \rangle = \delta_{ij}$

Тогда $\Delta(M)^* = \sum_{i=1}^r (-1)^{\dim \beta_i} \beta_i \times \tilde{\beta}_i$
 $e(TM) = \sum_{i=1}^r (-1)^{\dim \beta_i} \beta_i \cup \tilde{\beta}_i$

Лемма 60: Т.т. биф-ф-т, α поле, $H^*(M \times M) = H^*(M) \otimes H^*(M)$

$$\Rightarrow \Delta(M)^* = \beta_1 \times \gamma_1 + \dots + \beta_r \times \gamma_r, \quad \gamma_i \in H^*(M) \text{ — некоторые классы}$$

$$\dim \beta_i + \dim \gamma_i = n$$

из леммы $(\alpha \times 1) \cup \Delta(M)^* = (1 \times \alpha) \cup \Delta(M)^*$

Примерно $[M]$ к $\uparrow$

Слева $((\alpha \times 1) \cup \Delta(M)^*)/[M] = \alpha \cup (\Delta(M)^*/[M]) = \alpha$

Справа $(\alpha \times 1) \cup (\beta_1 \times \gamma_1 + \dots + \beta_r \times \gamma_r)$

$$(1 \times \alpha) \cup (\beta_1 \times \gamma_1 + \dots + \beta_r \times \gamma_r)^* = \sum (-1)^{\dim \alpha \dim \beta_j} (\beta_j \times (\alpha \cup \gamma_j))$$

Т.е. $(1 \times \alpha) \cup \Delta(M)^*/[M] = \sum_{j=1}^r (-1)^{\dim \alpha \dim \beta_j} \beta_j \langle \alpha \cup \gamma_j, [M] \rangle$

Взяв в качестве $\alpha = \beta_i$, получим, что

$$(-1)^{\dim \beta_i \dim \beta_i} \langle \beta_i \cup \gamma_i, [M] \rangle = \delta_{ij}$$

Отсюда $\gamma_j = (-1)^{\dim \beta_j} \beta_j \Rightarrow \Delta(M)^* = \sum (-1)^{\dim \beta_j} \beta_j \times \tilde{\beta}_j$ $\square$

Напомним, что Эйлерова характеристика χ есть

$$\chi(M) = \sum (-1)^k \dim H^k(M) = \sum (-1)^k \cdot (\text{число } k\text{-мерных клеток})$$

Теорема: M — гладкое компактное ориентированное n -м-е

Тогда $\langle e(TM), [M] \rangle = \chi(M)$

Если M — неориентировано, то $\langle e(TM), [M] \rangle = \chi(M) \bmod 2$.

Док-во: имеем $e(TM) = \sum (-1)^{\dim \beta_i} \beta_i \cup \tilde{\beta}_i$

Применяя $[M] \cap = \langle -, [M] \rangle$, получаем

$$\langle e(TM), [M] \rangle = \sum (-1)^{\dim \beta_i} = \chi(M) \quad \square$$

Следствие: $\chi(M) = \langle \Delta(M)^* \cup \Delta(M)^*, [M \times M] \rangle$

Док-во: $\chi(M) = \langle e(TM), [M] \rangle = \langle \Delta^*(\Delta(M)^*), [M] \rangle = \langle \Delta(M)^*, \Delta(M) \rangle =$

$$= \Delta(M) \cap \Delta(M)^* = ([M \times M] \cap \Delta(M)^*) \cap \Delta(M)^* = [M \times M] \cap (\Delta(M)^* \cup \Delta(M)^*) \quad \square$$

Следствие: пусть $\tilde{\Delta} \subset M \times M$ — подм-е, представляющее класс $[\Delta] \in H_n(M \times M)$ и трансверальное к Δ ("поперёк")

Тогда $\chi(M)$ равно сумме знаков

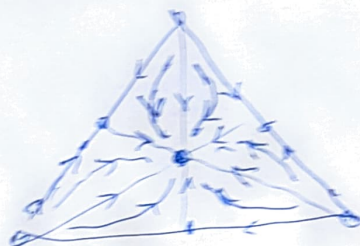
точек пересечения $\Delta \cap \tilde{\Delta}$ в $M \times M$

Вместо того, чтобы "шевелить" Δ в $M \times M$
 можно увидеть M в TM (т.к. $\gamma(\Delta \times M \times M) \in TM$)

(сечение TM - вект. поле

Средство: $\gamma(M)$ равно сумме индексов вект. поля
 трансверсальной к нулевому сечению (т.е. с изв.
 особыми точками).

Если многообразие M триангулировано, то
 это можно увидеть явно, построив вект. поле
 как на рисунке



на $(\text{индекс } \Delta^j)$
 индекс $(-1)^j$

Классы Понтрикина

Пусть $\mathcal{C}$ — семейство векторных ^{n-мерных} расслоений над клет. базами, замкнутое относительно перехода к индуц. расслоению.

Опр: характ. классом расслоений из $\mathcal{C}$ наз. сопоставление $\xi = (p: E \rightarrow B) \in \mathcal{C} \mapsto \alpha(\xi) \in H^k(B; R)$
с коэф. в коммут. кольце R с 1

удовлетворяющее $f^* \alpha(\xi) = \alpha(f^* \xi)$ для $f: B' \rightarrow B$.

Примеры: классы Шиффа — чётки для $\mathcal{C} = \{\text{вещ. рассл.}\}$,
с коэф. в $\mathbb{Z}_2$;
классы Чженя для $\mathcal{C} = \{\text{компл. рассл.}\}$ с коэф. в $\mathbb{Z}$;
классы Эйлера для $\mathcal{C} = \{\text{ориент. рассл.}\}$ с коэф. в $\mathbb{Z}$.

Предложение: а) кольцо хар. классов вещ. ^{н-мерных} расслоений
с коэф. в R изоморфно $H^*(BO(n); R)$, $BO(n) = \mathcal{B}(n, \mathbb{R}^\infty)$
б) кольцо хар. классов компл. ^{н-мерных} расслоений
с коэф. в R изоморфно $H^*(BU(n); R)$, $BU(n) = \mathcal{B}(n, \mathbb{C}^\infty)$

Знаем: $H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots, w_n]$, $H^*(BU(n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots, c_n]$

Следствие: любой хар. класс вещ. (компл.) ^{н-мерных} вект. расслоений с коэф. в $\mathbb{Z}_2$ (в $\mathbb{Z}$) есть некоторый от классов Ш-Ч (классов Чженя), причём разным многочленам соответствуют разные хар. классы

Хотелось бы аккуратно описать все хар. классы вещ. и ориентированных рассл. с коэф. в $\mathbb{Z}$.

Но! $H^*(BO(n); \mathbb{Z})$ и $H^*(BSO(n); \mathbb{Z})$ устроены сложно.

Классы Понтрикина — некое разумное приближение.

Рассл. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и соответствующие методы помпы.

Если ξ — вещ. рассл., то $\xi_{\mathbb{C}} = \xi \otimes \mathbb{C}$ — комплексификация

Если η — компл. вект. рассл., то $\eta_{\mathbb{R}}$ — обесцелствление

$(\xi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong \xi \oplus \xi$ как вещ. рассл.

$(\eta_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong \eta \oplus \bar{\eta}$ как компл. расслоение

(1)

Пусть ξ - комплексное 1-мерное рассл. код B

Рассм. $RP(\xi|_B) = RP(\gamma_c(\sigma P(\xi))) \xrightarrow{\pi} \sigma P(\xi) \rightarrow B$

$\gamma_c = \gamma_c(\sigma P(\xi))$ - топологич. 1-мерное компл. рассл. код $\sigma P(\xi)$

При переходе к слою получаем рассл.

$$RP^{2n-1} \xrightarrow{pr^1} CP^{n-1} \rightarrow pt.$$

π переводит 1-мерную вещ. прямую в слое $\xi|_B$ в содержимую
 в 1-мерную компл. прямую в слое ξ .

И имеем $\pi^*(\gamma_c) = \gamma_B \oplus \gamma_R$, где γ_R - кривая код $RP(\xi|_B)$

По теореме о короткозамкнутой проективизации,

$$H^*(\sigma P(\xi); \mathbb{Z}) \cong H^*(B)[\sigma] / (\sigma^n + c_1(\xi)\sigma^{n-1} + \dots + c_n(\xi)) = 0$$

$c_i(\xi)$ - это приведённые код 2 классы ~~в~~ рассл. ξ . $v = c_2(\gamma_c)$
 $w_2(\gamma_c)$
 $u = w_1(\gamma_R)$

$$H^*(RP(\xi); \mathbb{Z}) \cong H^*(B)[u] / (u^{2n} + w_1(\xi)u^{2n-1} + \dots + w_n(\xi|_B)) = 0$$

$$H^*(RP(\gamma_c); \mathbb{Z}) \cong H^*(\sigma P(\xi))[t] / (t^2 + \pi^*w_1(\gamma_c)t + \pi^*w_2(\gamma_c)) = 0, \quad t = w_1(\gamma_c) = u$$

$$\pi^*\gamma_c = \gamma_B \oplus \gamma_R \Rightarrow \pi^*w_1(\gamma_c) = 0, \quad \pi^*w_2(\gamma_c) = w_1^2(\gamma_R) = u^2$$

отсюда

$$H^*(RP(\xi); \mathbb{Z}) \cong H^*(\sigma P(\xi))[t] / (t^2 - \pi^*\sigma) = H^*(B)[u, t] / (\pi^*\sigma^n + c_1(\xi)(\pi^*\sigma)^{n-1} + \dots + c_n(\xi) = 0, \quad t^2 = \pi^*\sigma \quad (=u^2))$$

Сравнивая с другим выражением для $H^*(RP(\xi); \mathbb{Z}) = H^*(B)[u] / \dots$,

получаем $c_k(\xi) = w_{2k}(\xi)$, а $w_{2k+1}(\xi) = 0$

Следствие: гомоморфизм

$$H^*(BO(2n); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots, w_{2n}] \rightarrow \mathbb{Z}_2[c_1, \dots, c_n] = H^*(BU(n); \mathbb{Z}_2)$$

индуцированный "забыванием компл. структуры" $BU(n) \rightarrow BO(2n)$
 переводит w_{2k} в c_k и w_{2k+1} в 0.

Теперь рассм. $\mathbb{C}$ и $\mathbb{H}$. $\xi_{\mathbb{C}}$ - квадратичное 1-мерное рассл.

Задача (кваaternionизация): V - компл. л.н. нр-во

Тогда на $(V_{\mathbb{R}})_\mathbb{C} = V \oplus \bar{V}$ имеем вещ. quaternionic структуру

$$i(x, y) = (-y, x), \quad j(x, y) = (ix, -iy)$$

ξ - кватернионное n -мерное расслоение

$$\mathbb{C}P(\xi) \Rightarrow \mathbb{C}P(\gamma_H(\mathbb{H}P(\xi))) \xrightarrow{j_1} \mathbb{H}P(\xi) \rightarrow B$$

$\gamma_H = \gamma_H(\mathbb{H}P(\xi))$ - таавтологич. кватернионное 1-мерное код $\mathbb{H}P(\xi)$

ка слух $\mathbb{C}P^{2n-1} \xrightarrow{\sigma'} \mathbb{H}P^{n-1} \rightarrow pt$

$$\pi^*(\gamma_H) = \gamma_{\mathbb{C}} \oplus \bar{\gamma}_{\mathbb{C}} \quad \gamma_{\mathbb{C}} - \text{тавтолог. код } \mathbb{C}P(\xi_{\mathbb{C}})$$

$$H^*(\mathbb{H}P(\xi)) \cong H^*(B)[u] / (u^n - p_1(\xi)u^{n-1} + \dots + (-1)^n p_n(\xi) = 0)$$

$p_i(\xi) \in H^{4i}(B; \mathbb{Z})$ - кватернионные классы Поккретрика

$$H^*(\mathbb{C}P(\xi_{\mathbb{C}})) = H^*(\mathbb{H}P(\xi) \times H^*(B)[u]) / (u^{2n} - c_1(\xi_{\mathbb{C}})u^{2n-1} + \dots + (-1)^{2n} c_{2n}(\xi_{\mathbb{C}}) = 0)$$

$$H^*(\mathbb{C}P(\gamma_H)) = H^*(\mathbb{H}P(\xi))[t] / (t^2 - \pi^*c_2(\gamma_H)t + \pi^*c_2(\gamma_H) = 0)$$

$$\pi^*(\gamma_H) = \gamma_{\mathbb{C}} \oplus \bar{\gamma}_{\mathbb{C}} \Rightarrow \pi^*c_1(\gamma_H) = 0, \pi^*c_2(\gamma_H) = -c_1^2(\gamma_{\mathbb{C}}) = -u^2 = \pi^*u$$

Откуда

$$H^*(\mathbb{C}P(\xi_{\mathbb{C}})) = H^*(\mathbb{H}P(\xi))[t] / t^2 = H^*(B)[u, t] / (\pi^*u^n - p_1(\xi)(\pi^*u)^{n-1} + \dots + (-1)^n p_n(\xi) = 0, t^2 = -\pi^*u (= -u^2))$$

$$= H^*(B)[u] / (u^{2n} - p_1(\xi)u^{2n-2} + \dots + (-1)^n p_n(\xi) = 0)$$

Сравнивая, получаем $p_k(\xi) = (-1)^k c_{2k}(\xi_{\mathbb{C}}), c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}}) = 0$

Естественно возникающих кватернионных расслоений мало

Замечание: $\mathbb{H}P^n$ не явл. кватернионным многообразием

$T\mathbb{H}P^n$ не явл. кватернионным рассл. и даже не явл. комплексным!
т.е. на $\mathbb{H}P^n$ нет почти комплексной стр-ры ($\mathbb{H}P^1 = S^4$)

Опр: ξ - вещ. расслоение код B

$$p_k(\xi) = (-1)^k c_{2k}(\xi_{\mathbb{C}}) \in H^{4k}(B; \mathbb{R}) \text{ классы Поккретрика (с коэф. в } \mathbb{R}).$$

$p(\xi) = 1 + p_1(\xi) + p_2(\xi) + \dots$ - полный класс

Предложение а) $\xi_{\mathbb{C}} \cong \bar{\xi}_{\mathbb{C}}$ как компл. рассл.

$$\delta) 2c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}}) = 0 \quad (2 - \text{кручение})$$

Факт-во: а) $f: x+iy \mapsto x-iy$ $\mathbb{R}$ -линейн и удовлет. $f(i(x+iy)) = -if(x+iy)$

$$\delta) c(\xi_{\mathbb{C}}) = 1 + c_1(\xi) + c_2(\xi) + \dots \quad c(\bar{\xi}_{\mathbb{C}}) = 1 - c_1(\xi) + c_2(\xi) - \dots$$

Если $\xi_{\mathbb{C}} = \eta_{\mathbb{C}}$ для кватернионного расслоения η ,
то $c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}}) = 0$

□

(3)

Теорема: $\gamma(p(\xi \oplus \eta) - p(\xi)p(\eta)) = 0$

Док. во: из соотв. p -лы для $c(\xi \oplus \eta)_\sigma$

Если $c(\xi) = \prod_{i=1}^n (1+x_i)$ (принимая расширение), то

$$c(\bar{\xi}) = \prod_{i=1}^n (1-x_i), \quad c(\xi_\sigma) = c(\xi \oplus \bar{\xi}) = \prod_{i=1}^n (1-x_i^2)$$

$$\text{и} \quad p(\xi_\sigma) = \prod_{i=1}^n (1+x_i^2)$$

Задача: а) вычислить классы кобординтов $\mathbb{C}P^n$

б) вычислить классы кобординтов $\mathbb{H}P^n$
 Далее рассматриваем копр-в в кольце $R \ni \frac{1}{2}$. Канонич. $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$
Предложение: $H^*(BO(n))$ содержит подкольцо $R[p_1, \dots, p_{n/2}]$

Док. во: Рассм. $f: BU(\mathbb{Z}/2) \rightarrow BO(n)$, соотв. классифицирующ.

компл. вект. расс. как Bott periodicity .

$$\text{Если } n=2k+1, \text{ имеем } BU(k) \rightarrow BO(2k) \rightarrow BO(2k+1) = BO(n),$$

$$h=2k, \quad f: BU(k) \rightarrow BO(2k)$$

Так что можно считать

Тогда имеем $f^* \eta^R = \eta^R_{IR}$, где η^R - табулогич. $2k$ -мерное / $BO(2k)$,

η^R_{IR} - обобщение табулогич. k -мерного / $BU(k)$

$$p_i = p_i(\eta^R), \quad i=1, \dots, k$$

$$1 - p_1(\eta^R) + p_2(\eta^R) - \dots + (-1)^k p_k(\eta^R) = 1 + c_2(\eta^R_\sigma) + c_4(\eta^R_\sigma) + \dots + c_{2k}(\eta^R_\sigma)$$

$$f^*(1 - p_1 + p_2 - \dots + (-1)^k p_k) = 1 + c_2(f^* \eta^R_\sigma) + \dots + c_{2k}(f^* \eta^R_\sigma) =$$

$$= 1 + c_2\left(\eta^R_\sigma\right) + \dots + c_{2k}\left(\eta^R_\sigma\right) = 1 + c_2(\eta^R \oplus \bar{\eta}^R) + \dots + c_{2k}(\eta^R \oplus \bar{\eta}^R) =$$

$$= (1 + c_2 + \dots + c_{2k})(1 - c_2 + \dots + (-1)^k c_{2k}) \quad \text{Итак,}$$

$$f^* p_i = c_{2i} - 2c_{2i-1}c_1 + 2c_{2i-2}c_2 - \dots + (-1)^{i-1} 2c_{i+1}c_{i-1} + (-1)^i c_i^2$$

Т.е. $f^* p_1, f^* p_2, \dots, f^* p_k$ алгебр. независ. в $H^*(BU(k)) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k]$

Далее мы докажем, что $H^*(BO(n); \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}[p_1, \dots, p_{n/2}]$

Теперь P

Теперь рассм. ориентированное расслоение
Предложение: если ξ - ориентированное, $\uparrow$ n -многообразие, то $e(\xi)^2 = P_n(\xi)$

Док-во: $(\xi \oplus \xi)_\mu \cong \xi \oplus \xi$

базис $(e_1, \dots, e_n, (e_1, \dots, e_n))$ $(e_1, 0), (e_2, 0), \dots, (0, e_n)$

$\Rightarrow$ как ориентиров. рассл. $(\xi \oplus \xi)_\mu \cong (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (\xi \oplus \xi) = (-1)^n (\xi \oplus \xi)$

$$P_n(\xi) = (-1)^n \chi_n(\xi_\mu) = (-1)^n e((\xi \oplus \xi)_\mu) = e(\xi \oplus \xi) = e(\xi)^2$$

Теорема (точная послед-ва Гизина): $\xi = (p: E \rightarrow B)$ - ориентиров. $\uparrow$ n -многообразие;
 $S\xi$ - расслоение сфер $\uparrow$ имеет место точная послед-ва

$$\dots \rightarrow H^i(B) \xrightarrow{\cdot e(\xi)} H^{i+n}(B) \xrightarrow{\pi^*} H^{i+n}(S\xi) \rightarrow H^{i+1}(B) \xrightarrow{\cdot e(\xi)} \dots$$

Док-во: рассм. точную послед-ву пар (E, E_0) , где $E_0 = S\xi$:

$$\dots \rightarrow H^j(E, E_0) \rightarrow H^j(E) \rightarrow H^j(E_0) \xrightarrow{d} H^{j+1}(E, E_0) \rightarrow \dots$$

$$\xrightarrow[\text{изом.}]{\int \theta(\xi)} H^{j-n}(B) \xrightarrow{\cdot e(\xi)} H^j(B) \xrightarrow[\text{гомот.}]{\cong} H^j(S\xi) \xrightarrow[\text{гомот.}]{\cong} H^{j-n+1}(B) \rightarrow \dots$$

$BSO(n) = \tilde{G}(n, \mathbb{R}^\infty)$ - грасмман ориентиров. n -мерных плоскостей
 $f: BSO(n) \rightarrow BSO(n)$ - двулистное накрытие $\uparrow$ $BSO(n)$

Ориентация расслоения $f^*\eta$ - подынте классиф. о-б-р. $B \rightarrow BSO(n)$

$f^*\eta = \tilde{\eta}$ - таавтологическое n -мерное ориентиров. расслоение над $BSO(n)$.

$$\text{Задача: } H^*(BSO(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, \dots, w_n],$$

где $w_i = w_i(\tilde{\eta})$ - унив. классы Умфре-Уитни

Указание: использовать точную послед-ву Гизина

с коэф. в $\mathbb{Z}_2$ (двулистное накрытие - расслоение сфер

для одномерного расслоения)

и известен ранее доказанный изв $H^*(BSO(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_n]$

Теорема: R -коммут. кольцо, содержит $\frac{1}{2}$. Тогда

$$H^*(BSO(n); R) \cong \begin{cases} R[p_1, \dots, p_k] & \text{если } n = 2k+1 \\ R[p_1, \dots, p_{k-1}, e] & \text{если } n = 2k, \end{cases}$$

где $p_i = p_i(\tilde{\eta})$, $e = e(\tilde{\eta})$ - унив. хар. классы, $p_k = e^2$ при $n = 2k$

Док-во: как и выше доказываем, что $H^*(BSO(n); R)$ содержит $R[p_1, \dots, p_k]$ или $R[p_1, \dots, p_{k-1}, e]$, рассматривая $BU(\mathbb{Z}) \rightarrow BSO(n)$

Далее индукция по n

$n=1$ $BSO(1) = \mathbb{S}^\infty$ (свернутое), $\mathbb{S}^\infty$ - универсальное накрытие над $BO(1) = \mathbb{R}P^\infty$

$n=2$ $BSO(2) = BU(1)$ (т.к. 2-мерное ориентир-расч. = 1-мерное компл.)

$$H^*(BSO(2)) = R[e] = R[p_1] = H^*(BU(1))$$

Для индукции: рассм. посл-во Гизика для $\tilde{\eta} = (p: E(\tilde{\eta}) \rightarrow BSO(n))$

$S(\tilde{\eta}) = \{ \text{векторы зад. длины в ориентиров. } n\text{-мерной пл-ли в } \mathbb{R}^\infty \}$

$S(\tilde{\eta}) \xrightarrow{\cong} BSO(n-1)$, $\sigma \mapsto \sigma^\perp$, - расслоение со сечем S^∞

Рассм. $n=2k$

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{2i+2k-1}(S\tilde{\eta}) &\rightarrow H^{2i}(BSO(2k)) \xrightarrow{e} H^{2i+2k}(BSO(2k)) \rightarrow H^{2i+2k}(\mathbb{S}^\infty) \rightarrow H^{2i+1}(BSO(2k)) \rightarrow \dots \\ \text{но } H^{2i+2k-1}(S\tilde{\eta}) &\cong H^{2i}(BSO(2k)) \xrightarrow{e} H^{2i+2k}(BSO(2k)) \rightarrow H^{2i+2k}(BSO(2k-1)) \rightarrow 0 \\ &\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \parallel \text{ по предм. снд.} \\ 0 &\rightarrow H^{2i}(BSO(2k)) \xrightarrow{e} H^{2i+2k}(BSO(2k)) \rightarrow H^{2i+2k}(BSO(2k-1)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow R[p_1, \dots, p_k, e]^{2i} \xrightarrow{e} R[p_1, \dots, p_{k-1}, e]^{2i+2k} \xrightarrow{p_k} R[p_1, \dots, p_{k-1}]^{2i+2k} \rightarrow 0 \\ &\Rightarrow H^{2i}(BSO(2k)) \cong R[p_1, \dots, p_{k-1}, e] \end{aligned}$$

Рассм. $n=2k+1$ тогда $e(\tilde{\eta})=0$, т.к. $\tilde{\eta}$ - нечётномерно и $R \ni \frac{1}{2}$
получаем короткую точную посл-во

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{2i}(BSO(2k+1)) &\rightarrow H^{2i}(BSO(2k)) \rightarrow H^{2i-2k}(BSO(2k+1)) \rightarrow 0 \\ &\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \parallel \text{ предм. снд.} \qquad \qquad \uparrow \\ 0 &\rightarrow R[p_1, \dots, p_k]^{2i} \rightarrow R[p_1, \dots, p_k, e]^{2i} \rightarrow R[p_1, \dots, p_k]^{2i-2k} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

из сравнения рангов получаем $H^*(BSO(2k+1)) \cong R[p_1, \dots, p_k]$,
т.к. $p_k = e^2$ и $R[p_1, \dots, p_{k-1}, e]$ - свобод. $R[p_1, \dots, p_k]$ - модуль
с образующими 1 и e . □

Задача: $R \ni \frac{1}{2} \Rightarrow H^*(BO(n); R) \cong R[p_1, \dots, p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}]$

Док-во: Рассм. 2-листное покр. $BSO_n \rightarrow BO_n$

Котомология. спектр. нос-ть (срра) расслоение

$\xi = (E, B, F, p)$ лок. трив. рассл., B - х.ос. (срра), гомотопически прост ф-связно

Функторы $\varphi = p^{-1}B^{-1} \subset p^{-1}B^0 \subset p^{-1}B^1 \subset \dots \subset p^{-1}B^k = F, k = \dim B$

$$F^p C^q(E) = \ker(C^q(E) \rightarrow C^q(p^{-1}(B^p))) \quad , \quad F^p H^q(E) = \ker(H^q(E) \rightarrow H^q(p^{-1}(B^p)))$$

$$0 = F^k H^q(E) \subset F^{k-1} H^q(E) \subset \dots \subset F^0 H^q(E) \subset \dots \subset F^{-1} H^q(E) = H^q(E)$$

Теорема (Лек-срр):

$$\exists (E_r^{p,q}, d_r^{p,q}: E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r}) \quad , \quad d^2 = 0$$

$$E_{r+1}^{p,q} = H^{p,q}(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$$

$$E_1^{p,q} = H^{p,q}(p^{-1}(B^p), p^{-1}(B^{p+1}))$$

$$d_1^{p,q} = d: H^{p,q}(p^{-1}(B^p), p^{-1}(B^{p+1})) \rightarrow H^{p+q+1}(p^{-1}(B^{p+1}), p^{-1}(B^{p+2})) \quad \text{из} \quad \text{трив.} \quad \text{срра}$$

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; H^q(F)) \cong H^p(B) \otimes H^q(F)$$

$$E_\infty^{p,q} = F^{p,q} H^{p+q}(E) / F^{p+1, q} H^{p+q}(E) \quad , \quad \text{т.е.} \quad \bigoplus_{p+q=m} E_\infty^{p,q} \text{ вкладывается в } H^m(X) \text{ с помощью функтора}$$

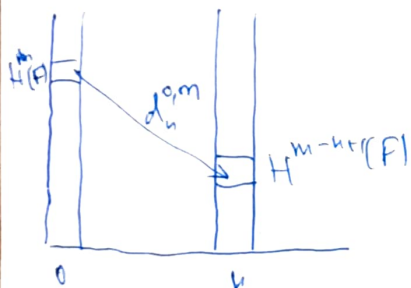
Коевые гомотопизмы с H

$$H^p(B) \cong E_2^{p,0} \rightarrow E_\infty^{p,0} = F^{p,0} H^p(E) / F^{p+1,0} H^p(E) \hookrightarrow H^p(E) \quad \text{из} \quad p: E \rightarrow B$$

$$H^q(E) \cong E_2^{0,q} \rightarrow E_\infty^{0,q} = F^{0,q} H^q(E) / F^{1,q} H^q(E) \hookrightarrow E_2^{0,q} \cong H^q(F)$$

Пример (котомология. нос-ть бане) $B = S^1$

Функторы $(k = \dim E)$



$$0 = F^k H^m(E) \subset \dots \subset F^{k+1} H^m(E) \subset F^m H^m(E) = \dots = F^1 H^m(E) \subset F^0 H^m(E) = H^m(E)$$

$$0 \rightarrow E_\infty^{k, m-k} \rightarrow H^m(E) \rightarrow E_\infty^{0, m} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H^{m-k}(F) / \text{Im } d_n^{0, m-k} \rightarrow H^m(E) \rightarrow \ker d_n^{0, m}$$

$$\dots \rightarrow H^{m-1}(F) \xrightarrow{d_n^{0, m-1}} H^{m-k}(F) \rightarrow H^m(E) \rightarrow H^m(F) \xrightarrow{d_n^{0, m}} H^{m-k+1}(F) \rightarrow \dots$$

Задача: вывести точную нос-ть Гизика $(F = S^1)$

$$\dots \rightarrow H^{m-k-1}(B) \rightarrow H^m(B) \rightarrow H^m(E) \rightarrow H^{m-k}(B) \rightarrow \dots$$

Мультиплик. СР-ра в спектр. нос-ти Лере-Серра

Рассм. $E \xrightarrow{\Delta_E} E \times E$
 $\begin{matrix} \uparrow \Delta_B \\ B \end{matrix} \xrightarrow{\Delta_B} B \times B$

$\Delta_B \sim \tilde{\Delta}_B: B \rightarrow B \times B$ - канонич. Поднимаем:

$E \xrightarrow{\tilde{\Delta}_E} E \times E$
 $\downarrow \Delta_B \quad \downarrow L$
 $B \xrightarrow{\tilde{\Delta}_B} B \times B$

$\tilde{\Delta}_E^*$ задаёт умножение в коцепях E :

$$c_1 \cdot c_2 = \tilde{\Delta}_E^*(c_1 \times c_2)$$

которое согласовано с функцией $\Gamma^P(E) = \ker(C^0(E) \rightarrow C^0(P^{(B^{(1)})}))$

т.е. $\Gamma^P \cdot \Gamma^Q \subset \Gamma^{P+Q}$ и $d\Gamma^P \subset \Gamma^P$. Откуда выводится

Теорема: в спектр. нос-ти Лере-Серра $\exists$ умножение

$$E_{\Gamma}^{p,q} \times E_{\Gamma}^{p',q'} \rightarrow E_{\Gamma}^{p+p',q+q'}, (\alpha \times \beta) \rightarrow d \cdot \beta$$

$$d_{\Gamma}^{p+p',q+q'}(\alpha \beta) = (d_{\Gamma}^{p,q} \alpha) \beta + (-1)^{p+q} \alpha d_{\Gamma}^{p',q'} \beta$$

умножение в $E_{\Gamma+1} = H(E_{\Gamma}, d_{\Gamma})$ индуцируется умножением в E_{Γ}

умножение в E_2 есть умножение в $H^*(B; H^*(F))$

(для гомологич. простых рассечений)

умножение в E_{∞} присоединено к умножению в $H^*(E)$,

т.е. если $\alpha \in F_{H^*}^{k,n}$, $\beta \in F_{H^*}^{l,m}$, $\gamma \in F_{H^*}^{k+l,n+m}$ представлены эл-тами

$d \in E_{\infty}^{k,m-k}$, $\beta \in E_{\infty}^{l,n-l}$, $\gamma \in E_{\infty}^{k+l,n}$, то $\gamma = \alpha \beta$

Пример: вычислить $H^*(\mathbb{C}P^{\infty})$, $H^*(\mathbb{C}P^n)$

$$S^{\infty} \xrightarrow{S'} \mathbb{C}P^{\infty}$$



$$d(u\sigma) = du\sigma = \sigma^2$$

$$d(u\sigma^k) = du\sigma^k = \sigma^{k+1}$$

Для $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ образующие $H^+(S^{2n+1})$ представляются классом $[u\sigma^n]$

$$d(u\sigma^n) = \sigma^{n+1} \Rightarrow \sigma^{n+1} = 0 \text{ в } H^+(\mathbb{C}P^n)$$

Других эл-тов в $H^+(\mathbb{C}P^n)$, $H^+(\mathbb{C}P)$, кроме σ^k , нет,

т.к. для данч нетрив. эл-ты в $H^+(S^{2n+1})$, $H^+(\mathbb{C}P^{\infty})$

Примерные спектр. нос-ти к вычислению гомолог. группы

Теорема (Лемма Постникова): X - связное клеточное (существует

$$\pi_i = \pi_i(X)$$

$$1) \pi_i(P_n X) \cong \begin{cases} \pi_i(X) & i \leq n \\ 0, & i > n \end{cases}$$

$$2) (f_{ij})_* : \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(P_n X) - \text{изом. при } i \leq n$$

$$3) P_n X \rightarrow P_{n-1} X - \text{рассл. со слоем } K(\pi_n, n)$$

$$X \xrightarrow{f_1} P_1 X \cong K(\pi_1, 1)$$

Док-во: $P_n X$ получается из X приклеиванием клеток размерности $\geq n+2$ (скачки закрываем образующие группы $\pi_{n+1}(X)$)
Вложение $X \rightarrow P_n X$ пропускается через $P_{n+1} X$ $\square$

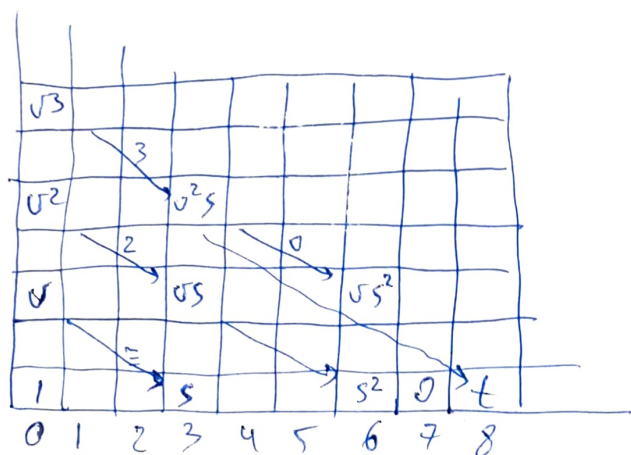
Применим лемму Постникова к вычислению $\pi_4(S^3)$
имеем рассл. $K(\pi_4, 4) \rightarrow P_4 S^3 \rightarrow P_3 S^3 = K(\mathbb{Z}, 3)$

Для применения спектр. нос-ти вычислим (ко)гомологии $K(\mathbb{Z}, 3)$

Лемма:

	9	6	1	2	3	4	5	6	7	8
$H^q(K(\mathbb{Z}, 3))$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_3$	
образ	1			s			s^2		t	

Док-во: рассл. $K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{C}P^\infty = \Omega K(\mathbb{Z}, 3) \rightarrow PK(\mathbb{Z}, 3) \rightarrow K(\mathbb{Z}, 3)$



$$d_3 u = s$$

$$d_3 u^2 = 2us$$

$$d_3 u^3 = 3u^2s$$

$$d_3(us) = s^2$$

$$2s^2 = d_3(2us) = d_3(d_3 u^2) = 0$$

$$d_3(u^2s) = 2us^2 = 0$$

$$H^q(K(\mathbb{Z}, 3)) = 0, \text{ т.к. } d_3(u^3) \neq 0$$

$$d_5(u^2s) = t \in H^8(K(\mathbb{Z}, 3)), \text{ } 3t = 0.$$

Задача: $H^*(K(\mathbb{Z}, 2n); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[u], \text{ deg } u = 2n$

$$H^*(K(\mathbb{Z}, 2n+1); \mathbb{Q}) \cong \Lambda_{\mathbb{Q}}[u], \text{ deg } u = 2n+1$$

Задача: если π_i - конечная аб- группа, то

$$H^*(K(\pi, n); \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & x=0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

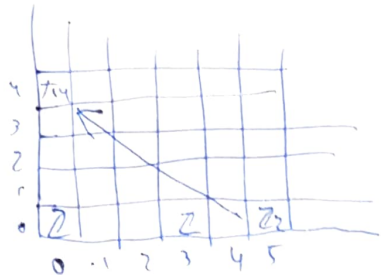
(1)

Теорема: $\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}_2$

Док. 60: Равенство $P_4 S^3 = S^3 v e^6 v$.
(удобнее $\pi_5(S^3)$ и т.д.)

$$\Rightarrow H_4(P_4 S^3) = H_5(P_4 S^3) = 0 \quad \text{Рассм.}$$

$$k(T_{4,4}) \rightarrow P_4 S^3 \rightarrow k(\mathbb{Z}, 3) = P_3 S^3$$



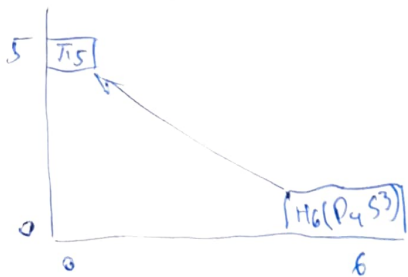
$$\Rightarrow T_{14} = \mathbb{Z}_2$$

U

Попытаемся вычислить $T_{15}(S^3)$

Рассм. $K(T_5, S) \rightarrow P_5 S^3 \rightarrow P_4 S^3$

$$P_5 S^3 = S^3 \cup e^7 \cup \dots \Rightarrow H_4(P_5 S^3) = H_5(P_5 S^3) = H_6(P_5 S^3) = 0$$



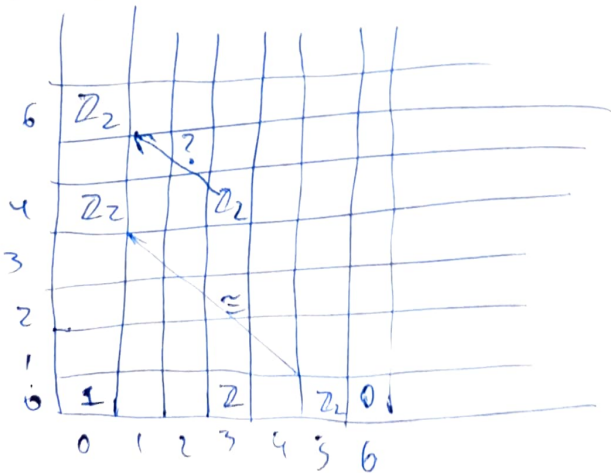
$$\Rightarrow \pi_5(S^3) = H_6(P_4 S^3)$$

Данес расм. $K(\mathbb{Z}_2, 4) = K(T_4, 4) \rightarrow P_4 S^3 \rightarrow K(\mathbb{Z}_3)$

Задача: вычислить $H^*(K(\mathbb{Z}_2, 2); \mathbb{Z})$ и $H^*(K(\mathbb{Z}_2, 3); \mathbb{Z})$
включ до разм. 6.

Задача: вычислить $K(\mathbb{Z}_2, 4; 2)$ вплоть до р.зн. 6.

Получаем



Неско

Теорема

(Лемма Уайтхеда)

X - клеточное. (учитывает

$$T_n = \pi_n(X)$$

- 1) $W_n X$ нивельно, т.е. $T_q(W_n X) = 0$ для $q \leq n$
- 2) $(g_{ik}) : T_i(W_n X) \rightarrow T_i(X)$ - изоморфизм для $i > n$
- 3) $W_n X \rightarrow W_{n-1} X$ - рассл. со слоем $K(T_{n-1}, n-1)$

Док-во: $W_0 X \hookrightarrow X$ - вложение св. компоненты отмыч. точки

Пусть $W_k X$ построено

$$H_{k+1}(W_k X) = T_{k+1}(W_k X) = T_{k+1}$$

$$\Rightarrow \exists W_k X \rightarrow K(T_{k+1}, k+1)$$

Гомотопич. слой этого отображ. есть $W_{k+1} X$ □
 Задача: вычислить $\pi_4(S^3)$ с помощью леммы Уайтхеда

Теорема: $\pi_5(S^3) = \mathbb{Z}_2$

Док-во: рассм. башню Уайтхеда для S^3 :

$$W_4(S^3)$$

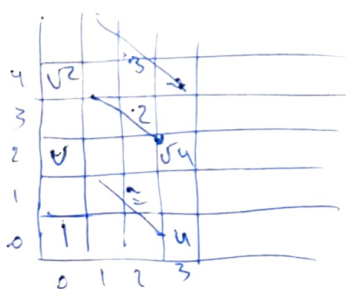
имеем

$$\pi_5(S^3) = \pi_5(W_4 S^3) = H_5(W_4 S^3)$$

$$W_4(S^3) \xrightarrow{K(T_{4,3})=K(\mathbb{Z}_2,3)} W_3 S^3 \xrightarrow{K(\mathbb{Z}_2,2)} W_2 S^3$$

Сначала вычислим (ко)гомологии $W_3 S^3$

$$d_3(v^n) = n v^{n-1} u$$

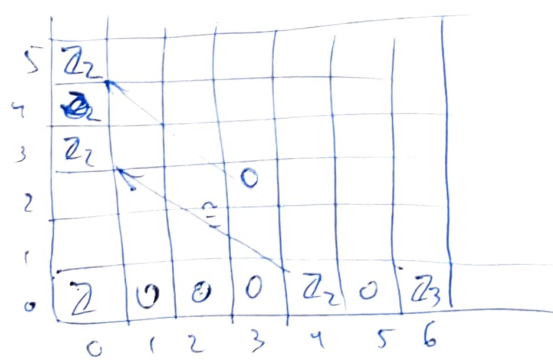


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$H^*(W_3 S^3)$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_3$	0	$\mathbb{Z}_4$
$H_*(W_3 S^3)$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_3$	0	$\mathbb{Z}_4$	0

Теперь рассм.

$$W_4 K(\mathbb{Z}_2, 3) \rightarrow W_4(S^3) \rightarrow W_3 S^3$$

$$\Rightarrow \pi_5(S^3) = H_5(W_4 S^3) = \mathbb{Z}_2$$



Задача: вычислить

$$\pi_6(S^4) = \pi_2^S$$

Задача: X -одноб. $K_p(X)$ кон. короче $\mathbb{Q}$. $\Rightarrow T_p(X)$ кон. короче $\mathbb{Q}$. (покажи)
 Теорема (ранги 20-моторы. 2-руки (фер))

$$T_k(S^n) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{если } k=n \\ \mathbb{Q}, & \text{если } n \text{ чётно и } k=2n-1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Зок-60: нуль и нечётно

Рассмотрим $K(Z, n-1) \rightarrow W_n S^n \rightarrow S^n$

$$H^*(K(Z, n-1); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[U_{n-1}]$$

$$\begin{array}{ccc} 2n-1 & \mathbb{Q} & \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q} \\ n-1 & \mathbb{Q} & \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} & \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q} \end{array}$$

$$\Rightarrow H^k(W_n S^n; \mathbb{Q}) = 0 \text{ при } k > 0$$

$$\Rightarrow H^k_k(W_n S^n; \mathbb{Q}) = 0 \text{ при } k > 0$$

$$\Rightarrow H_{n+1}(W_n S^n; \mathbb{Q}) = T_{n+1}(W_n S^n) \otimes \mathbb{Q} = 0$$

Теперь рассм. $K(T_{n+1}, n) \rightarrow W_{n+1} S^n \rightarrow W_n S^n$

$$H_k(K(T_{n+1}, n); \mathbb{Q}) = H_k(W_n S^n; \mathbb{Q}) = 0 \text{ при } k > 0 \Rightarrow$$

$$H_k(W_{n+1} S^n; \mathbb{Q}) = 0 \text{ при } k > 0 \Rightarrow H_{n+2}(W_{n+1}; \mathbb{Q}) = T_{n+2}(W_{n+1}) \otimes \mathbb{Q} = 0$$

Далее по индукции

Нуль и чётно

$$\text{Тогда } H^*(K(Z, n)) = \mathbb{Q}[U_n]$$

$$K(Z, n) \rightarrow W_n S^n \rightarrow S^n$$

$$H_k(W_n; \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & k=0, 2n+1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$T_{n+1} \otimes \mathbb{Q} = H_{n+1}(W_n) = 0 \text{ при } n > 2 \text{ и } = \mathbb{Q} \text{ при } n=2$$

$$\Rightarrow \text{при } n \geq 2 \quad H_k(K(T_{n+1}, n); \mathbb{Q}) = 0 \text{ при } k > 0$$

$$\text{Из } K(T_{n+1}, n) \rightarrow W_{n+1} \rightarrow W_n \text{ получаем } H_+(W_{n+1}; \mathbb{Q}) = H_+(W_n; \mathbb{Q})$$

$$\Rightarrow T_{n+2} \otimes \mathbb{Q} = H_{n+2}(W_{n+1}; \mathbb{Q}) = 0 \text{ и т.д.}$$

$$\text{Вывод: } T_{2n-1} \otimes \mathbb{Q} = H_{2n-1}(W_{2n-2}; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}, \text{ а не } 0$$

$$\text{Рассм. } K(T_{2n-1}, 2n-2) \rightarrow W_{2n-1} \rightarrow W_{2n-2}$$

$$\text{т.к. } H_{2n-1}(W_{2n-1}) = 0, \text{ все}$$

диф-лы - изоморфизмы

$$\Rightarrow H_q(W_q; \mathbb{Q}) = 0 \text{ при } q > 2n-1$$

$$\text{и } T_q(S^n) \otimes \mathbb{Q} = 0 \text{ при } q > 2n-1$$

□

Пример Рассм. Расщепление $E \xrightarrow{S^2} S^1$



$$x \in E^{0,1}, y \in E^{2,0}, z \in E^{2,2}$$

$$\Rightarrow H^2(E) = \mathbb{Z} \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad H^1(E) = \mathbb{Z} \langle \tilde{z} \rangle \cong \mathbb{Z}$$

$x \in E^{0,2} = H^2(E)/E^{2,0} \Rightarrow \tilde{x}$ определен с точностью до $k\tilde{y} \in E^{2,0}$

линейн $\tilde{y}^2 = 0, \tilde{x}\tilde{y} = \tilde{z}, x^2 = 0 \in E^{0,4} \Rightarrow \tilde{x}^2$ ~~не~~ проективный

$\tilde{x}^2$ ~~проект~~ переходит в 0 или проекции $H^4(E) \rightarrow E^{0,4} = 0$

и линейн $\tilde{x}^2 = \lambda \tilde{z}, \lambda \in \mathbb{Z}$

Замеча $(\tilde{x} + k\tilde{y})^2 = \tilde{x}^2 + 2k\tilde{x}\tilde{y} + k^2\tilde{y}^2 = (\lambda + 2k)\tilde{z}$

т.е. 2 случая: k чётно и k нечётно оба реализуема

Задача: а) Вычислить $H^*(CP(C \oplus \eta^{\otimes k}))$, где η - расщ. $S^2 \rightarrow S^1$ над $CP^1 \cong S^2$

б) доказать, что $CP(C \oplus \eta^{\otimes k}) \cong S^2 \times S^2$ при чётном k
и диффеоморфно $CP^2 \# \overline{CP}^2$ при нечётном k

Вычисляем $H^*(U(n))$ и $H^*(SU(n))$
 $1 \rightarrow SU(n) \rightarrow U(n) \xrightarrow{\det} S^1 \rightarrow 1, \quad U(n) \cong SU(n) \times S^1$ (как группы Ли)

Теорема: $H^*(SU(n)) \cong \Lambda[u_3, u_5, \dots, u_{2n-1}]$

Док-во: рассм. $p: SU(n) \xrightarrow{SU(n-1)} S^{2n-1}$

по индукции и по $H^*(SU(n-1)) = \Lambda[u_3, \dots, u_{2n-3}]$

$$E_2 = \Lambda[u_{2n-1}] \otimes \Lambda[u_3, u_5, \dots, u_{2n-1}]$$

на сдв. - все диф-лы тривиальны

$$\Rightarrow E_2 = E_\infty = \Lambda[u_3, \dots, u_{2n-1}, u_{2n-1}]$$

$$\Rightarrow H^*(SU(n)) \cong \Lambda[u_3, \dots, u_{2n-1}] \text{ аддитивно}$$

$\exists u_3, \dots, u_{2n-3} \in H^*(SU(n))$, которые переходят в образ $H^*(SU(n-1))$

и $\exists u_{2n-1} \in H^*(SU(n)), u_{2n-1} = \tilde{p}^* u_{2n-1} \Rightarrow$

$\exists$ гомоморфизм алгебр $\varphi: \Lambda[u_3, \dots, u_{2n-1}] \rightarrow H^*(SU(n))$

по теор. 7.1-7 $H^*(SU(n))$ представляется как мин. конф. модуль

внешних произведений от $u_1, \dots, u_{2n-1}$ с точностью

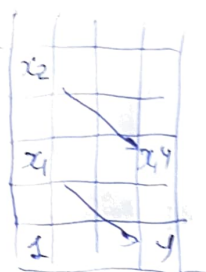
до 7.1-го предложения, к-ры тоже представл.

в виде л.т. с точк. до 7.1-го предложения и 7.2-го

$\Rightarrow \varphi$ - изоморфизм $\Rightarrow$ изоморфизм

□ 3

Вычислим $H^*(\mathbb{R}S^3)$. Рассм. $\mathbb{R}S^3 \xrightarrow{\mathbb{R}S^3} S^3$, $\mathbb{R}S^3 = pt$



$$H^{2k}(\mathbb{R}S^3) \cong \mathbb{Z}\langle x_k \rangle, \quad d = d_3 \quad H^3(S^3) = \mathbb{Z}\langle y \rangle$$

$$dx_1 = y$$

$$dx_k = x_{k-1}y$$

$$dx_1^2 = 2x_1y \Rightarrow x_1^2 = 2x_2$$

$$x_k x_l = d_{k,l} \cdot x_{k+l}$$

$$d(x_k x_l) = x_{k-1}x_l y + x_{l-1}x_k y = \cancel{x_{k-1,l}y} + \cancel{x_{l-1,k}y} + (d_{k-1,l} + d_{l-1,k})x_{k+l}y$$

$$\Rightarrow d_{k,l} = d_{k-1,l} + d_{l-1,k} \Rightarrow d_{k,l} = C_{k+l}^k$$

Предположение: $H^*(\mathbb{R}S^3) = \frac{\mathbb{Z}\langle x_1, x_2, x_3, \dots \rangle}{x_k x_l = C_{k+l}^k x_{k+l}}, \deg x_i = 2i$

$\Gamma(x)$ - алгебра раздельных степеней

Задача: описать $H^*(\mathbb{R}S^n)$, $n \geq 4$