

Топология-3

ПАНОВ Тарас Евгеньевич

Независимый московский университет

Последняя редакция: 2 декабря 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	2
Список литературы	2
1. Двойственность Пуанкаре	3
1.1. Гладкие и топологические многообразия	3
1.2. Группы локальных гомологий. Ориентация. Фундаментальный класс	3
1.3. Степень отображения многообразий	7
1.4. $\sim$ -произведение и изоморфизмы двойственности	7
1.5. Когомологии с компактными носителями	8
1.6. Связь с умножением. Сигнатура	11
1.7. Двойственность для многообразий с краем	13
Задачи и упражнения	14
2. Векторные расслоения	16
2.1. Локально тривиальные расслоения. Векторные расслоения	16
2.2. Касательное и нормальное расслоение	19
2.3. Многообразия Грассмана, вложение Плюккера и клетки Шуберта	20
2.4. Классификация векторных расслоений	23
Задачи и упражнения	24
3. Характеристические классы Штифеля–Уитни и Чженя	25
3.1. Теорема Лере–Хирша	26
3.2. Определение и свойства характеристических классов	27
3.3. Принцип расщепления. Многообразия флагов. Единственность характеристических классов	31
3.4. Когомологии многообразий Грассмана	33
3.5. Параллелизуемость вещественных проективных пространств. Алгебры с делением	35
3.6. Препятствия к вложениям и погружениям многообразий	36
Задачи и упражнения	37
4. Класс Эйлера и класс Тома	39
4.1. Ориентируемые векторные расслоения	39
4.2. Класс Тома и изоморфизм Тома	40
4.3. Определение класса Эйлера, его свойства	43
4.4. Связь с двойственностью Пуанкаре и эйлеровой характеристикой	45
Задачи и упражнения	51
5. Классы Понтрягина	51
5.1. Общее понятие характеристического класса	51
5.2. Связь классов Штифеля–Уитни комплексного расслоения с его классами Чженя	52
5.3. Кватернионные классы Понтрягина	53
5.4. Классы Понтрягина вещественных расслоений	55
5.5. Классы Понтрягина ориентированных расслоений	57
Задачи и упражнения	59

ПРЕДИСЛОВИЕ

Третья часть курса алгебраической топологии. Включает двойственность Пуанкаре и теорию характеристических классов.

Данный текст доступен на странице Т.Е. Панова на сайте кафедры высшей геометрии и топологии: <http://higeom.math.msu.ru/people/taras/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [БТ] Р. Ботт, Л. В. Ту. *Дифференциальные формы в алгебраической топологии*. Москва, Наука, 1989.
- [ДНФ] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. *Современная геометрия. Методы и приложения*. Москва, Наука, 1986.
- [Ле] С. Ленг. *Введение в теорию дифференцируемых многообразий*. Москва, «Мир», 1967.
- [МС] Дж. Милнор, Дж. Стасефф. *Характеристические классы*, с приложением работы Дж. Манкрса «Элементарная дифференциальная топология». Москва, Мир, 1979.
- [Ми] А. С. Мищенко. *Векторные расслоения и их применения*. Москва, Наука, 1984.
- [Топ1] Т. Е. Панов. *Топология-1. Курс лекций*.
<http://higeom.math.msu.ru/people/taras/#teaching>
- [Топ2] Т. Е. Панов. *Топология-2. Курс лекций*.
<http://higeom.math.msu.ru/people/taras/#teaching>
- [Ст] Р. Стонг. *Заметки по теории кобордизмов*. Москва, Мир, 1973.
- [ФФ] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. *Курс гомотопической топологии*. Москва, Наука, 1989.
- [Ха] А. Хатчер. *Алгебраическая топология*. Москва, МЦНМО, 2011.
- [На] A. Hatcher. *Vector bundles and K-theory*. <http://math.cornell.edu/~hatcher/>

1. ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПУАНКАРЕ

Для ориентируемого замкнутого n -мерного многообразия M имеют место изоморфизмы двойственности Пуанкаре $H^k(M) \cong H_{n-k}(M)$. Для коэффициентов в $\mathbb{Z}_2$ изоморфизмы $H^k(M; \mathbb{Z}_2) \cong H_{n-k}(M; \mathbb{Z}_2)$ имеют место без предположения об ориентируемости. Мы также докажем изоморфизмы двойственности в более общей ситуации: для когомологий с компактными носителями некомпактных многообразий и для многообразий с краем.

1.1. Гладкие и топологические многообразия. Топологическим *многообразием* размерности n называется такое хаусдорфово топологическое пространство M со счётной базой, что для каждой точки $x \in M$ существует окрестность U , гомеоморфная открытому подмножеству V в $\mathbb{R}^n$. Компактные многообразия традиционно называют *замкнутыми*.

Гладким атласом на n -мерном многообразии M называется открытое покрытие $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ многообразия M , в котором для каждого множества U_α фиксирован гомеоморфизм $\varphi_\alpha: U_\alpha \xrightarrow{\cong} V_\alpha$, называемый *картой*, где $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, и на пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta$ отображения замены координат

$$\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

являются гладкими (бесконечно дифференцируемыми) отображениями на открытых подмножествах в $\mathbb{R}^n$.

Выбор гладкого атласа на многообразии называется *гладкой структурой*, а многообразие с гладким атласом — *гладким* (или *дифференцируемым*) *многообразием*.

Примерами гладких многообразий являются $\mathbb{R}^n$, сферы S^n , проективные пространства $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$, классические двумерные поверхности. Произведение гладких многообразий снова является гладким многообразием.

Не являются многообразиями графы с вершинами степени ≥ 2 и бесконечномерные клеточные пространства типа S^∞ , $\mathbb{R}P^\infty$ и $\mathbb{C}P^\infty$. Конус, надстройка, смэш-произведение и джойн многообразий, как правило, не являются многообразиями.

1.2. Группы локальных гомологий. Ориентация. Фундаментальный класс. Пусть X — топологическое пространство. Группа $H_n(X, X \setminus \{x\})$ называется n -й *группой локальных гомологий* пространства X в точке x .

Предложение 1.1. Пусть M — топологическое n -мерное многообразие. Тогда $H_n(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ и $H_i(M, M \setminus \{x\}) = 0$ при $i \neq n$ для любой точки $x \in M$.

Доказательство. Имеем

$$H_i(M, M \setminus \{x\}) \cong H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}),$$

где первый изоморфизм следует из теоремы вырезания, а второй — из точной последовательности пары. Теперь утверждение следует из вычисления гомологий сфер. $\square$

Локальная ориентация n -мерного многообразия M в точке x — это выбор одной из двух образующих группы локальных гомологий $H_n(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$.

Выберем локальную ориентацию $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})$ в каждой точке $x \in M$. Такой выбор называется *согласованным*, если для каждой точки $x \in M$ существует

такая окрестность B , гомеоморфная открытому шару в $\mathbb{R}^n$, что для каждой точки $y \in B$ образующие μ_x и μ_y переходят друг в друга при изоморфизмах

$$H_n(M, M \setminus \{x\}) \xleftarrow{\cong} H_n(M, M \setminus B) \xrightarrow{\cong} H_n(M, M \setminus \{y\}),$$

индуцированных вложениями $M \setminus B \rightarrow M \setminus \{x\}$ и $M \setminus B \rightarrow M \setminus \{y\}$. Многообразие M называется *ориентируемым*, если существует согласованный выбор локальных ориентаций всех его точек. Такой выбор называется *ориентацией* многообразия M . Если многообразие M связно и ориентируемо, то у него есть в точности две ориентации.

Рассмотрим множество, состоящее из пар (x, μ_x) :

$$\widetilde{M} = \{(x, \mu_x) : x \in M, \mu_x \text{ — локальная ориентация в точке } x \in M\}.$$

Для каждого подмножества $B \subset M$, гомеоморфного открытому шару в $\mathbb{R}^n$, и образующей $\mu_B \in H_n(M, M \setminus B) \cong \mathbb{Z}$ определим подмножество $U(\mu_B) \subset \widetilde{M}$ как

$$U(\mu_B) = \{(x, \mu_x) : x \in B, \mu_B \text{ переходит в } \mu_x$$

$$\text{при изоморфизме } H_n(M, M \setminus B) \xrightarrow{\cong} H_n(M, M \setminus \{x\})\}.$$

Введём на $\widetilde{M}$ топологию, базу которой образуют подмножества $U(\mu_B)$. Тогда из этой конструкции и определения ориентируемости вытекает следующее.

Предложение 1.2. Пусть M связно. Тогда

- а) M ориентируемо в том и только том случае, когда $\widetilde{M}$ имеет две компоненты связности, т. е. $\widetilde{M} = M \sqcup M$;
- б) если M не ориентируемо, то $\widetilde{M}$ — связное ориентируемое многообразие, а проекция $\widetilde{M} \rightarrow M$, $(x, \mu_x) \mapsto x$, является двулистным накрытием.

Двулистное накрытие $\widetilde{M} \rightarrow M$ неориентируемого многообразия M называется *ориентирующим накрытием*.

Следствие 1.3. Односвязное многообразие ориентируемо.

Также M ориентируемо, если в $\pi_1(M)$ нет подгрупп индекса 2.

Рассматривая группы гомологий с коэффициентами в коммутативном кольце R с единицей, получим определение *R -ориентируемого* многообразия. (Образующей в $H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \cong R$ называется любой обратимый элемент кольца R .) Любое многообразие $\mathbb{Z}_2$ -ориентируемо, так как образующая в $\mathbb{Z}_2$ единственна. Более того, легко видеть, что ориентируемое многообразие R -ориентируемо для любого R , а неориентируемое многообразие R -ориентируемо, если $2 = 0$ в кольце R (задача). Поэтому интерес представляют случаи $R = \mathbb{Z}$ и $R = \mathbb{Z}_2$.

Лемма 1.4. Пусть M — многообразие размерности n и $A \subset M$ — компактное подмножество. Тогда для коммутативного кольца R с единицей

- а) элемент $\alpha \in H_n(M, M \setminus A; R)$ равен нулю в том и только том случае, когда его образ α_x в $H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ равен нулю для любой точки $x \in A$;
- б) если выбраны согласованные локальные ориентации $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ для всех $x \in A$, то существует единственный элемент $\mu_A \in H_n(M, M \setminus A; R)$, который отображается в μ_x при гомоморфизме $r_A : H_n(M, M \setminus A; R) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ для любой точки $x \in A$;
- в) $H_i(M, M \setminus A; R) = 0$ при $i > n$.

Доказательство. Доказательство леммы разобьём на несколько шагов. Будем опускать коэффициенты R в обозначениях групп гомологий.

Шаг 1. Если лемма верна для A , B и $A \cap B$, то она верна и для $A \cup B$. Рассмотрим точную последовательность Майера–Виеториса для пар:

$$0 \rightarrow H_n(M, M \setminus (A \cup B)) \xrightarrow{\varphi} H_n(M, M \setminus A) \oplus H_n(M, M \setminus B) \xrightarrow{\psi} H_n(M, M \setminus (A \cap B)).$$

Слева стоит 0 так как $H_{n+1}(M, M \setminus (A \cap B)) = 0$ по предположению. Кроме того, группы $H_i(M, M \setminus (A \cup B))$ при $i > n$ стоят между двумя нулевыми группами в последовательности, поэтому они равны нулю, что доказывает утверждение в). Утверждение а) для $A \cup B$ следует из утверждения а) для A и B в силу инъективности φ .

Для доказательства утверждения б) для $A \cup B$ рассмотрим элементы $\mu_A \in H_n(M, M \setminus A)$ и $\mu_B \in H_n(M, M \setminus B; R)$, которые существуют по предположению. При отображении $H_n(M, M \setminus A) \rightarrow H_n(M, M \setminus (A \cap B))$ элемент μ_A переходит в элемент, удовлетворяющий условию из утверждения б) для $A \cap B$, т.е. в $\mu_{A \cap B}$, в силу единственности такого элемента. Аналогично μ_B переходит в $\mu_{A \cap B}$ при отображении $H_n(M, M \setminus B) \rightarrow H_n(M, M \setminus (A \cap B))$. Следовательно, отображение ψ из точной последовательности Майера–Виеториса переводит элемент $(\mu_A, -\mu_B)$ в нуль. Поэтому $(\mu_A, -\mu_B) = \varphi(\mu_{A \cup B})$ для некоторого $\mu_{A \cup B} \in H_n(M, M \setminus (A \cup B))$. Этот элемент $\mu_{A \cup B}$ удовлетворяет условию из утверждения б) для $A \cup B$, а его единственность следует из инъективности φ .

Шаг 2. Сводим лемму к случаю, когда A содержится в одной карте атласа M , т.е. $A \subset \mathbb{R}^n$. Компактное подмножество $A \subset M$ можно представить в виде конечного объединения $A_1 \cup \dots \cup A_k$, где каждое A_i компактно и содержится в одной карте U_i некоторого атласа M . Будем вести индукцию по k . Применим утверждение предыдущего шага к $A = A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}$ и $B = A_k$. В результате утверждение сводится к случаю $k = 1$, т.е. к случаю одной карты.

Шаг 3. $A = K$ — конечный симплициальный комплекс. Если $A = \Delta^k$ — симплекс, то $\mathbb{R}^n \setminus A \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ — деформационная ретракция и $r_A: H_i(M, M \setminus A) \rightarrow H_i(M, M \setminus \{x\})$ — изоморфизм для $x \in A$. Далее лемма для K сводится к случаю одного симплекса по индукции при помощи утверждения из шага 1.

Шаг 4. $A \subset \mathbb{R}^n$ — произвольный компакт. Пусть элемент $\alpha = [a] \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$ представлен относительным циклом a . Тогда $\partial a \subset C$ для некоторого компакта $C \subset \mathbb{R}^n \setminus A$. Построим симплициальный комплекс K , для которого $A \subset K$ и $K \cap C = \emptyset$. (Покроем A симплексом, перейдём к кратному барицентрическому подразделению с диаметром симплексов меньше расстояния между A и C и оставим только n -симплексы, пересекающие A .) Тогда a задаёт класс $\alpha_K = [a] \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$, который отображается в данный элемент α при гомоморфизме $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \rightarrow H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$. Согласно предыдущему шагу $\alpha_K = 0$ при $i > n$. Следовательно, $\alpha = 0$ и $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A) = 0$ при $i > n$, что доказывает третье утверждение леммы.

Пусть теперь $i = n$. Предположим, что $\alpha_x = 0$ для любой точки $x \in A$. Тогда и $\alpha_x = 0$ для любой точки $x \in K$, так как K — объединение n -симплексов, пересекающих A , а $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \Delta^n) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$ — изоморфизм для $x \in \Delta^n$. Согласно предыдущему шагу $\alpha_K = 0$, а значит и $\alpha = 0$. Это доказывает первое утверждение леммы и единственность во втором утверждении.

Для доказательства существования продолжим согласованные ориентации μ_x , $x \in A$, на симплекс $\Delta^n \supset A$. Для Δ^n существование элемента $\mu_{\Delta^n} \in H_n(M, M \setminus \Delta^n)$

очевидно. Тогда искомый элемент μ_A есть образ элемента μ_{Δ^n} при гомоморфизме $H_n(M, M \setminus \Delta^n) \rightarrow H_n(M, M \setminus A)$. $\square$

Если многообразие M замкнуто (компактно), то мы можем положить $A = M$ в лемме 1.4. Тогда из утверждения б) получаем, что если M замкнуто и ориентировано, т.е. согласованно выбраны образующие $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$, то существует единственный класс $\mu_M \in H_n(M; \mathbb{Z})$, переходящий в локальную ориентацию $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$ для любой точки $x \in M$. Этот класс называется *фундаментальным классом* ориентированного многообразия M и обозначается $[M]$.

Теперь можно сформулировать теорему о связи ориентируемости и старшей группы гомологий для замкнутых связных многообразий M .

Теорема 1.5. *Пусть M — замкнутое связное многообразие размерности n . Тогда*

- а) *отображение $H_n(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ является изоморфизмом для любой точки $x \in M$;*
- б) *если M ориентируемо, то $H_n(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ — изоморфизм для любой точки $x \in M$; если M неориентируемо, то $H_n(M; \mathbb{Z}) = 0$;*
- в) *$H_i(M; \mathbb{Z}) = 0$ при $i > n$.*

Доказательство. Положим $A = M$ и $R = \mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_2$ в лемме 1.4. Утверждение в) вытекает из утверждения в) леммы.

Пусть $x \in M$. Покажем, что для связного многообразия M гомоморфизм $H_n(M; R) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$, $\alpha \mapsto \alpha_x$, инъективен. Пусть $\alpha_x = 0$ для некоторого $\alpha \in H_n(M; R)$. Тогда если $y \in M$ — другая точка, содержащаяся вместе с x в окрестности B , гомеоморфной открытому шару, то гомоморфизмы для x и y раскладываются в композицию следующим образом:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(M; R) & \longrightarrow & H_n(M, M \setminus B; R) & \xrightarrow{\cong} & H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \\ & & \downarrow \cong & & \\ & & H_n(M, M \setminus \{y\}; R) & & \end{array}$$

Так как M связно, отсюда следует, что $\alpha_y = 0$ для любой точки $y \in M$. Следовательно, $\alpha = 0$ в силу утверждения а) леммы 1.4.

Если многообразие M является R -ориентируемым, то гомоморфизм $H_n(M; R) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ сюръективен в силу утверждения б) леммы 1.4 (для $A = M$). Это доказывает утверждение а) теоремы (так как M всегда $\mathbb{Z}_2$ -ориентируемо) и первую часть утверждения б).

Пусть M неориентируемо. Так как гомоморфизм $H_n(M) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ инъективен, получаем $H_n(M) \cong 0$ или $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$. Предположим последнее, и пусть α — образующая. Тогда $\alpha_x = k\mu_x$, где $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ — образующая, а k — положительное целое число. Из приведённой выше диаграммы следует, что k не зависит от x и μ_x можно выбрать согласованно для всех $x \in M$. Это противоречит предположению о неориентируемости многообразия M . Итак, $H_n(M) \cong 0$. $\square$

Таким образом, для замкнутого связного M имеем $H_n(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ всегда, а $H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ или 0 в зависимости от того, является M ориентируемым или нет, а выбор ориентации на M — это выбор образующей группы $H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (фундаментального класса).

Предположим, что замкнутое многообразие M триангулировано или на нём задана структура конечного полусимплициального комплекса с n -мерными симплексами σ_i , $i = 1, \dots, k$. Тогда каждый $(n-1)$ -мерный симплекс τ является гранью в точности двух n -мерных симплексов σ_i и σ_j . Если M ориентируемо, то ориентации симплексов σ_i можно выбрать согласованно. Это означает, что можно выбрать отображения $\sigma_i: \Delta^n = [v_0, \dots, v_n] \rightarrow M$ так, что каждый τ входит в $\partial\sigma_i$ и $\partial\sigma_j$ с разными знаками. Тогда $\partial(\sum_{i=1}^k \sigma_i) = 0$ и цикл $\sum_{i=1}^k \sigma_i$ представляет образующую группы $H_n(M)$ — фундаментальный класс $[M]$. Для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ цепь $\sum_{i=1}^k \sigma_i$ — всегда цикл, представляющий образующую группы $H_n(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$.

1.3. Степень отображения многообразий. Пусть $f: M \rightarrow N$ — отображение связных замкнутых ориентированных n -мерных многообразий с фундаментальными классами $[M]$ и $[N]$. Тогда для $f_*: H_n(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(N; \mathbb{Z})$ имеем $f_*[M] = d[N]$. Целое число d называется *степенью* отображения $f: M \rightarrow N$.

Предложение 1.6. Для любого связного замкнутого ориентированного n -мерного многообразия M и любого $d \in \mathbb{Z}$ существует отображение $M \rightarrow S^n$ степени d .

Доказательство. Сначала построим отображение степени 1. Пусть $U \subset M$ — карта, причём $U \cong \mathbb{R}^n$. Рассмотрим отображение $M \rightarrow M/(M \setminus U) \cong S^n$. Для любой точки $x \in U$ имеем композицию гомоморфизмов $H_n(M) \rightarrow H_n(M, M \setminus U) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\})$, при которой $[M]$ переходит в μ_x . Отсюда следует, что образ класса $[M]$ при первом гомоморфизме есть фундаментальный класс $[S^n] \in H_n(S^n) \cong H_n(M, M \setminus \{x\})$, а значит отображение $M \rightarrow M/(M \setminus U)$ имеет степень 1. Композиция этого отображения с любым отображением $S^n \rightarrow S^n$ степени d даёт отображение $M \rightarrow S^n$ степени d . $\square$

1.4. $\frown$ -произведение и изоморфизмы двойственности. Определим *произведение высечения*, или *$\frown$ -произведение*

$$\frown: C_p(X; R) \times C^q(X; R) \rightarrow C_{p-q}(X; R)$$

для $p \geq q$ по формуле

$$\sigma \frown \varphi = \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_q]})\sigma|_{[v_q, \dots, v_p]},$$

где $\sigma: [v_0, \dots, v_p] \rightarrow X$ — сингулярный симплекс и $\varphi \in C^q(X; R)$ — коцепь.

Лемма 1.7. $\partial(\sigma \frown \varphi) = (-1)^q(\partial\sigma \frown \varphi - \sigma \frown d\varphi)$.

Доказательство. Непосредственная проверка:

$$\begin{aligned} \partial\sigma \frown \varphi &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_{q+1}]})\sigma|_{[v_{q+1}, \dots, v_p]} + \sum_{i=q+1}^p (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_q]})\sigma|_{[v_q, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_p]}, \\ \sigma \frown d\varphi &= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_{q+1}]})\sigma|_{[v_{q+1}, \dots, v_p]}, \\ \partial(\sigma \frown \varphi) &= \sum_{i=q}^p (-1)^{i-q} \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_q]})\sigma|_{[v_q, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_p]}. \quad \square \end{aligned}$$

Отсюда получаем R -билинейное отображение (*гомологическое $\smile$ -произведение*)

$$H_p(X; R) \times H^q(X; R) \xrightarrow{\smile} H_{p-q}(X; R).$$

Имеются также относительные версии:

$$H_p(X, A; R) \times H^q(X; R) \xrightarrow{\smile} H_{p-q}(X, A; R),$$

$$H_p(X, A; R) \times H^q(X, A; R) \xrightarrow{\smile} H_{p-q}(X; R),$$

$$H_p(X, A \cup B; R) \times H^q(X, A; R) \xrightarrow{\smile} H_{p-q}(X, B; R).$$

Лемма 1.8 (функториальность). *Для $f: X \rightarrow Y$ отображения в диаграмме*

$$\begin{array}{ccccc} H_p(X) \times H^q(X) & \xrightarrow{\smile} & H_{p-q}(X) \\ f_* \downarrow & & \uparrow f^* & & f_* \downarrow \\ H_p(Y) \times H^q(Y) & \xrightarrow{\smile} & H_{p-q}(Y) \end{array}$$

удовлетворяют соотношению $f_(\alpha) \smile \varphi = f_*(\alpha \smile f^*(\varphi))$.*

Доказательство. $f_* \sigma \smile \varphi = \varphi(f_* \sigma|_{[v_0, \dots, v_q]}) f_* \sigma|_{[v_q, \dots, v_p]}$. □

Теперь мы можем сформулировать теорему об изоморфизмах *двойственности Пуанкаре*.

Теорема 1.9. *Пусть M — замкнутое R -ориентируемое n -мерное многообразие с фундаментальным классом $[M] \in H_n(M; R)$. Тогда отображение*

$$D: H^k(M; R) \rightarrow H_{n-k}(M; R), \quad \varphi \mapsto [M] \smile \varphi,$$

является изоморфизмом для любого k .

Доказательство этой теоремы будет аналогично доказательству существования фундаментального класса: с помощью последовательности Майера–Виеториса мы сведём утверждение к случаю $M = \mathbb{R}^n$. Но для этого нам понадобится версия двойственности Пуанкаре для некомпактных многообразий. Она использует понятие когомологий с компактными носителями.

1.5. Когомологии с компактными носителями. Для пространства X определим группу i -мерных *сингулярных коцепей с компактными носителями* с коэффициентами в G как подгруппу $C_c^i(X; G)$ в $C^i(X; G)$, состоящую из коцепей, обращающихся в нуль вне некоторого компактного подмножества (зависящего от коцепи):

$$C_c^i(X; G) = \{f: C_i(X) \rightarrow G: f|_{C_*(X \setminus K_f)} = 0 \text{ для некоторого компактного } K_f \subset X\}.$$

Коцепное кограничное отображение ограничивается на группы коцепей с компактными носителями: $d: C_c^i(X; G) \rightarrow C_c^{i+1}(X; G)$. Группы когомологий получаемого коцепного комплекса называются *когомологиями с компактными носителями* и обозначаются $H_c^i(X; G)$. Если само пространство X компактно, то $C_c^i(X; G) = C^i(X; G)$ и $H_c^i(X; G) = H^i(X; G)$.

Если $K \subset L$ — вложение компактных подмножеств, то мы имеем мономорфизм $C^i(X, X \setminus K; G) \hookrightarrow C^i(X, X \setminus L; G)$ и $C_c^i(X; G) = \bigcup_{K \subset X} C^i(X, X \setminus K; G)$. Индуцированный гомоморфизм гомологий $H^i(X, X \setminus K; G) \rightarrow H^i(X, X \setminus L; G)$ может не

быть инъективным. Однако группу $H_c^i(X; G)$ также можно описать через группы $H^i(X, X \setminus K; G)$ при помощи следующей алгебраической конструкции.

Конструкция 1.10 (прямой предел (копредел) групп). Пусть $(P, \leq)$ — частично упорядоченное множество. *Диаграммой* абелевых групп, индексированной множеством P , называется такой набор $D = \{G_\alpha : \alpha \in P\}$ абелевых групп G_α и гомоморфизмов $f_{\alpha\beta} : G_\alpha \rightarrow G_\beta$, что $f_{\alpha\alpha} = \text{id}$ и $f_{\alpha\gamma}$ есть композиция $f_{\alpha\beta}$ и $f_{\beta\gamma}$, если $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Пусть $\mathcal{P}$ — категория, объектами которой являются элементы $\alpha \in P$, и между α и β имеется единственный морфизм, если $\alpha \leq \beta$. Тогда диаграмма — это (ковариантный) функтор $D : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{AB}$, $\alpha \mapsto G_\alpha$, из $\mathcal{P}$ в категорию абелевых групп.

Прямой предел или *копредел* диаграммы D абелевых групп называется факторгруппа прямой суммы $\bigoplus_{\alpha \in P} G_\alpha$ по подгруппе, порождённой всеми элементами вида $g_\alpha - f_{\alpha\beta}(g_\alpha)$ для $g_\alpha \in G_\alpha$. Обозначение: $\text{colim } D$ или $\varinjlim G_\alpha$.

Определены канонические гомоморфизмы $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow \varinjlim G_\alpha$, удовлетворяющие соотношениям $i_\beta f_{\alpha\beta} = i_\alpha$ при $\alpha \leq \beta$.

Если в P существует наибольший элемент μ , то $\varinjlim G_\alpha = G_\mu$. Если никакие два различных элемента в P не находятся в отношении порядка, то $\varinjlim G_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in P} G_\alpha$.

Предложение 1.11. Пусть в P для любых двух элементов $\alpha, \beta \in P$ существует такой элемент $\gamma \in P$, что $\alpha \leq \gamma$ и $\beta \leq \gamma$. Тогда прямой предел $\varinjlim G_\alpha$ можно отождествить с фактормножеством $(\bigsqcup_{\alpha \in P} G_\alpha) / \sim$ по отношению эквивалентности, порождённому эквивалентностями $g_\alpha \sim f_{\alpha\beta}(g_\alpha)$ для $g_\alpha \in G_\alpha$.

Доказательство. Введём на фактормножестве $(\bigsqcup_{\alpha \in P} G_\alpha) / \sim$ структуру абелевой группы следующим образом. Для классов эквивалентности $[g_\alpha]$ и $[g_\beta]$ элементов $g_\alpha \in G_\alpha$ и $g_\beta \in G_\beta$ найдём такой элемент $\gamma \in P$, что $\alpha \leq \gamma$ и $\beta \leq \gamma$, и положим $[g_\alpha] + [g_\beta] = [f_{\alpha\gamma}(g_\alpha) + f_{\beta\gamma}(g_\beta)]$, где в правой части элементы складываются в группе G_γ . Тогда отображение

$$\varinjlim G_\alpha = \left(\bigoplus_{\alpha \in P} G_\alpha \right) / \sim \rightarrow \left(\bigsqcup_{\alpha \in P} G_\alpha \right) / \sim, \quad [g_\alpha] \mapsto [g_\alpha],$$

является изоморфизмом. $\square$

Предложение 1.12 (универсальное свойство прямого предела). Пусть $D = \{G_\alpha : \alpha \in P\}$ — диаграмма абелевых групп, индексированная частично упорядоченным множеством P . Предположим, что заданы гомоморфизмы $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$, удовлетворяющие соотношениям $h_\beta f_{\alpha\beta} = h_\alpha$ при $\alpha \leq \beta$. Тогда существует единственный такой гомоморфизм $h : \varinjlim G_\alpha \rightarrow H$, что $hi_\alpha = h_\alpha$:

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha & \xrightarrow{h_\alpha} & H \\ & \searrow i_\alpha & \\ & \varinjlim G_\alpha & \xrightarrow{h} H \\ & \nearrow i_\beta & \\ G_\beta & \xrightarrow{h_\beta} & H \end{array}$$

$f_{\alpha\beta} : G_\alpha \rightarrow G_\beta$ (вертикальный стрелок влево)

Доказательство. Гомоморфизм h однозначно задаётся условием $h([g_\alpha]) = h_\alpha(g_\alpha)$ для $g_\alpha \in G_\alpha$, $[g_\alpha] \in \varinjlim G_\alpha = (\bigoplus_{\alpha \in P} G_\alpha) / \sim$. $\square$

Это универсальное свойство определяет копредел диаграммы $D : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$ для произвольной категории $\mathcal{C}$. Конструкция 1.10 показывает, что копределы существуют

в категории абелевых групп. Копредели диаграмм также существуют в категории топологических пространств: прямую сумму необходимо заменить на несвязное объединение (копроизведение пространств), а факторгруппу — на факторпространство.

Пусть теперь $\mathcal{P}$ — частично упорядоченное по включению множество компактных подмножеств $K \subset X$. Мы имеем диаграмму групп $H^i(X, X \setminus K; G)$ и гомоморфизмов $H^i(X, X \setminus K; G) \rightarrow H^i(X, X \setminus L; G)$ для $K \subset L$.

Предложение 1.13. $H_c^i(X; G) = \varinjlim H^i(X, X \setminus K; G)$.

Доказательство. Так как каждый элемент из $H_c^i(X; G)$ представлен коциклом в $C^i(X, X \setminus K; G)$ для некоторого компактного $K \subset X$, получаем гомоморфизм $H_c^i(X; G) \rightarrow (\bigoplus_{K \subset X} H^i(X, X \setminus K; G)) / \sim = \varinjlim H^i(X, X \setminus K; G)$. Сюръективность и инъективность этого гомоморфизма следует из определений (задача). $\square$

Пример 1.14. Вычислим когомологии с компактными носителями пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть B_k — шар радиуса $k > 0$ с центром в нуле. Так как каждое компактное подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ содержится в некотором B_k , мы имеем

$$H_c^i(\mathbb{R}^n; G) = \varinjlim H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K; G) = \varinjlim H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_k; G),$$

где последний предел берётся по упорядоченному множеству шаров B_k . Так как $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_k; G) \rightarrow H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_l; G)$ — изоморфизм при $k < l$, получаем

$$H_c^i(\mathbb{R}^n; G) = H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_k; G) = \begin{cases} G & \text{при } i = n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим теперь R -ориентируемое n -мерное многообразие M , возможно некомпактное. Далее гомотопии и когомологии будем рассматривать с коэффициентами в коммутативном кольце R с единицей.

Согласно лемме 1.4 существует единственный элемент $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K)$, который отображается в локальную ориентацию $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})$ для любой точки $x \in K$. Рассмотрим гомоморфизм $H^k(M, M \setminus K) \rightarrow H_{n-k}(M)$, $\varphi \mapsto \mu_K \frown \varphi$. Если $K \subset L$ — вложение компактных подмножеств и $i: (M, M \setminus L) \rightarrow (M, M \setminus K)$ — соответствующее отображение пар, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^k(M, M \setminus K) & \longrightarrow & H_{n-k}(M) & \varphi \longmapsto \mu_K \frown \varphi \\ i^* \downarrow & & \parallel & \\ H^k(M, M \setminus L) & \longrightarrow & H_{n-k}(M) & \varphi \longmapsto \mu_L \frown \varphi \end{array}$$

коммутативна. Действительно, $\mu_L \frown i^*(\varphi) = i_*(\mu_L) \frown \varphi = \mu_K \frown \varphi$, где первое соотношение следует из леммы 1.8, а $i_*(\mu_L) = \mu_K$ в силу единственности μ_K . Тогда из предложения 1.12 получаем, что определён гомоморфизм двойственности

$$D_M: H_c^k(M) = \varinjlim H^k(M, M \setminus K) \rightarrow H_{n-k}(M).$$

Теорема 1.15. Для R -ориентируемого n -мерного многообразия M гомоморфизм двойственности

$$D_M: H_c^k(M; R) \rightarrow H_{n-k}(M; R)$$

является изоморфизмом.

Так как $H_c^k(M; R) = H^k(M; R)$ для компактного M , теорема 1.9 вытекает из теоремы 1.15.

Доказательство теоремы 1.15. Будем опускать обозначения коэффициентов R .

Шаг 1. $M = \mathbb{R}^n$. Из примера 1.14 получаем, что единственная нетривиальная группа когомологий с компактными носителями есть $H_c^n(\mathbb{R}^n) = H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \cong R$, где $B \subset \mathbb{R}^n$ — шар. Гомоморфизм двойственности есть

$$D_{\mathbb{R}^n}: H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \rightarrow H_0(\mathbb{R}^n) \cong R, \quad \varphi \mapsto \mu_B \frown \varphi.$$

Здесь класс $\mu_B \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \cong R$ представлен любым симплексом $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$, содержащим B в своей внутренности. Группа $H_c^n(\mathbb{R}^n) = H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \cong R$ порождена коцепью, принимающей значение 1 на Δ^n и 0 на остальных симплексах. При этом $\mu_B \frown \varphi = \varphi(\mu_B)$ — спаривание n -коцепи с n -цепью μ_B . Поэтому $D_{\mathbb{R}^n}$ — изоморфизм.

Следующие шаги основаны на применении последовательности Майера–Виеториса. Пусть $M = U \cup V$, где U и V открыты. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H_c^k(U \cap V) & \longrightarrow & H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) & \longrightarrow & H_c^k(M) & \longrightarrow & H_c^{k+1}(U \cap V) & \longrightarrow \\ & \downarrow D_{U \cap V} & & \downarrow D_U \oplus D_V & & \downarrow D_M & & \downarrow D_{U \cap V} & \\ \longrightarrow & H_{n-k}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{n-k}(U) \oplus H_{n-k}(V) & \longrightarrow & H_{n-k}(M) & \longrightarrow & H_{n-k-1}(U \cap V) & \longrightarrow \end{array}$$

коммутативна с точностью до знака. Мы оставим это без доказательства, см. [Ха, лемма 3.36].

Шаг 2. M — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Представим M в виде счётного объединения открытых шаров, $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Положим $V_k = U_1 \cup \dots \cup U_k$. Докажем по индукции, что D_{V_k} — изоморфизм для любого k . Случай $k = 1$ — это шаг 1, так как $U_1 \cong \mathbb{R}^n$. Далее, $V_k = U_k \cup V_{k-1}$, причём V_{k-1} и $U_k \cap V_{k-1}$ гомеоморфны объединению $k-1$ открытых шаров. Рассмотрим коммутативную диаграмму выше с $U = U_k$ и $V = V_{k-1}$. Из предположения индукции и 5-леммы получаем, что D_{V_k} — изоморфизм.

Теперь мы получаем, что M — объединение последовательности вложенных открытых множеств $V_1 \subset V_2 \subset \dots$. Если $K \subset V_i$ — компактное подмножество, то $H^k(V_i, V_i \setminus K) = H^k(M, M \setminus K)$ согласно вырезанию. Так как каждое компактное подмножество в M содержится в некотором V_i , получаем $H_c^k(M) = \varinjlim H_c^k(V_i)$. Кроме того, $H_{n-k}(M) = \varinjlim H_{n-k}(V_i)$ (задача). Поэтому гомоморфизм $D_M: H_c^k(M) \rightarrow H_{n-k}(M)$ является пределом гомоморфизмов $D_{V_i}: H_c^k(V_i) \rightarrow H_{n-k}(V_i)$. Так как каждый D_{V_i} — изоморфизм, D_M тоже изоморфизм.

Шаг 3. Произвольное M . Так как M имеет счётную базу, его можно представить в виде объединения $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, где каждое U_i гомеоморфно открытому множеству в $\mathbb{R}^n$. Далее рассуждение в точности повторяет рассуждение из предыдущего шага с заменой открытых шаров на открытые множества в $\mathbb{R}^n$. $\square$

1.6. Связь с умножением. Сигнатура. Градуированно-коммутативная алгебра A над полем $\mathbf{k}$ называется *алгеброй Пуанкаре*, если она связна (т. е. $A^0 \cong \mathbf{k}$), конечномерна (т. е. $A = \bigoplus_{i=0}^d A^i$, где все A^i конечномерны) и $\mathbf{k}$ -линейные отображения

$$\begin{aligned} A^i &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{k}}(A^{d-i}, A^d), \\ a &\mapsto m_a, \quad \text{где } m_a(b) = ab, \end{aligned}$$

являются изоморфизмами при $0 \leq i \leq d$. Для алгебры Пуанкаре имеем $A^0 \cong \text{Hom}_{\mathbf{k}}(A^d, A^d)$, так что $A^d \cong A^0 \cong F$ и $A^i \cong A^{d-i}$.

Мы докажем, что для замкнутого связного многообразия M алгебра коомологий $H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ является алгеброй Пуанкаре всегда, а алгебра коомологий $H^*(M; \mathbf{k})$ с коэффициентами в произвольном поле $\mathbf{k}$ является алгеброй Пуанкаре, если M ориентируемо.

Нам понадобится формула, связывающая $\frown$ - и $\smile$ -произведения.

Лемма 1.16. Для $\alpha \in C_p(X)$, $\varphi \in C^q(X)$ и $\psi \in C^{p-q}(X)$ имеет место формула

$$\psi(\alpha \frown \varphi) = (\varphi \smile \psi)(\alpha).$$

Доказательство. Для сингулярного симплекса $\sigma: \Delta^p \rightarrow X$ имеем

$$\psi(\sigma \frown \varphi) = \psi(\varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_q]})\sigma|_{[v_q, \dots, v_p]}) = \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_q]})\psi(\sigma|_{[v_q, \dots, v_p]}) = (\varphi \smile \psi)(\sigma). \quad \square$$

Рассмотрим ориентированное замкнутое многообразие M с фундаментальным классом $[M] \in H_n(M)$. Тогда $\smile$ -произведение определяет билинейную функцию (спаривание)

$$(1) \quad H^i(M; \mathbf{k}) \times H^{n-i}(M; \mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{k}, \quad (\varphi, \psi) \mapsto (\varphi \smile \psi)[M],$$

для любого поля $\mathbf{k}$ и $0 \leq i \leq n$.

Напомним, что билинейное спаривание $f: V \times W \rightarrow \mathbf{k}$, $(v, w) \mapsto f(v, w)$, векторных пространств над $\mathbf{k}$ называется невырожденным, если линейные отображения $W \rightarrow \text{Hom}(V, \mathbf{k})$, $w \mapsto f(-, w)$, и $V \rightarrow \text{Hom}(W, \mathbf{k})$, $v \mapsto f(v, -)$, являются изоморфизмами.

Теорема 1.17. Для замкнутого многообразия M спаривание (1) невырождено, если M ориентируемо или если поле $\mathbf{k}$ имеет характеристику 2.

Доказательство. Рассмотрим композицию

$$H^{n-i}(M; \mathbf{k}) \xrightarrow{h} \text{Hom}_{\mathbf{k}}(H_{n-i}(M; \mathbf{k}), \mathbf{k}) \xrightarrow{D^*} \text{Hom}_{\mathbf{k}}(H^i(M; \mathbf{k}), \mathbf{k}),$$

где h — гомоморфизм, задаваемый вычислением коцепей на цепях, а D^* — гомоморфизм, двойственный к изоморфизму двойственности Пуанкаре $D: H^i(M; \mathbf{k}) \rightarrow H_{n-i}(M; \mathbf{k})$. Композиция D^*h является изоморфизмом, так как h — изоморфизм для коэффициентов в поле $\mathbf{k}$ в силу формул универсальных коэффициентов. С другой стороны, композиция D^*h переводит $\psi \in H^{n-i}(M; \mathbf{k})$ в гомоморфизм $\varphi \mapsto \psi([M] \frown \varphi) = (\varphi \smile \psi)[M]$, где последнее равенство следует из леммы 1.16. Отсюда следует, что D^*h — первый из изоморфизмов в определении невырожденного спаривания. Второй изоморфизм вытекает из коммутативности $\smile$ -произведения. $\square$

Следствие 1.18. Алгебра коомологий $H^*(M; \mathbf{k}) = \bigoplus_{i=0}^n H^i(M; \mathbf{k})$ связного замкнутого многообразия M является алгеброй Пуанкаре, если M ориентируемо или если поле $\mathbf{k}$ имеет характеристику 2.

Доказательство. Условие $H^0(M; \mathbf{k}) \cong \mathbf{k}$ вытекает из связности M . Конечномерность групп коомологий компактного многообразия оставим без доказательства (для гладких многообразий есть явная конструкция конечного клеточного разбиения, происходящая из теории Морса; для топологических многообразий см. [Xa, следствие П.9]).

Чтобы проверить, что гомоморфизм $H^{n-i}(M; \mathbf{k}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{k}}(H^i(M; \mathbf{k}), H^n(M; \mathbf{k}))$, $\psi \mapsto (\varphi \mapsto \varphi \smile \psi)$, является изоморфизмом, рассмотрим композицию

$$H^{n-i}(M; \mathbf{k}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{k}}(H^i(M; \mathbf{k}), H^n(M; \mathbf{k})) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbf{k}}(H^i(M; \mathbf{k}), \mathbf{k}),$$

где последний изоморфизм задаётся композицией с изоморфизмом $H^n(M; \mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{k}$ вычисления n -коцепи на фундаментальном классе. Приведённая выше композиция есть изоморфизм D^*h из доказательства теоремы 1.17. Поэтому первый гомоморфизм в композиции также является изоморфизмом. $\square$

Билинейное спаривание (1) при $n = 2\ell$ и $i = \ell$ задаёт невырожденную билинейную функцию на средней группе когомологий $H^\ell(M; \mathbf{k})$ замкнутого ориентированного многообразия. Эта билинейная функция кососимметрическая, если ℓ нечётно, и симметрическая, если ℓ чётно (т.е. $n = 4k$).

Сигнатура (разность между числом положительных и числом отрицательных квадратов в диагональном виде) невырожденной симметрической билинейной функции

$$H^{2k}(M; \mathbb{R}) \times H^{2k}(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\varphi, \psi) \mapsto (\varphi \smile \psi)[M],$$

является гомотопическим инвариантом замкнутого ориентированного $4k$ -мерного многообразия M и называется его *сигнатурой*.

1.7. Двойственность для многообразий с краем. Топологическим *многообразием с краем* размерности n называется хаусдорфово топологическое пространство M со счётной базой, для каждой точки $x \in M$ которого существует окрестность U , гомеоморфная открытому подмножеству V в полупространстве

$$\mathbb{R}_{\geq}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}.$$

Если такой гомеоморфизм переводит точку $x \in M$ в точку $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ с $x_n = 0$, то согласно вырезанию мы имеем $H_n(M, M \setminus \{x\}) = H_n(\mathbb{R}_{\geq}^n, \mathbb{R}_{\geq}^n \setminus \{0\}) = 0$. Если же $x \in M$ переходит при гомеоморфизме в точку $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ с $x_n > 0$, то $H_n(M, M \setminus \{x\}) = H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$. Подмножество

$$\partial M = \{x \in M : H_n(M, M \setminus \{x\}) = 0\}$$

называется *краем* многообразия M . При любом гомеоморфизме между открытым множеством $U \subset M$ и открытым множеством $V \subset \mathbb{R}_{\geq}^n$ точки края переходят в точки с $x_n = 0$. Край ∂M является $(n-1)$ -мерным многообразием без края.

Гладкое многообразие с краем определяется аналогично гладкому многообразию без края, при помощи гладкого атласа, в котором отображения перехода являются гладкими отображениями на открытых подмножествах в $\mathbb{R}_{\geq}^n$. (Отображение между открытыми подмножествами в $\mathbb{R}_{\geq}^n$ называется *гладким*, если оно является ограничением гладкого отображения между открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^n$.)

Многообразие M с краем называется *ориентируемым*, если многообразие $M \setminus \partial M$ ориентируемо.

Для компактного многообразия M с краем существуют открытая окрестность $U(\partial M)$ края и гомеоморфизм $U(\partial M) \xrightarrow{\cong} \partial M \times [0, 1)$, при котором ∂M переходит в $\partial M \times \{0\}$ (задача). Такая окрестность называется *воротником* края ∂M .

Используя воротник, мы получаем гомотопическую эквивалентность (деформационную ретракцию) $M \setminus \partial M \xrightarrow{\sim} M$. Отсюда получаем изоморфизм

$$H_i(M, \partial M) \cong H_i(M \setminus \partial M, \partial M \times (0, \varepsilon)) = H_i(M \setminus \partial M, (M \setminus \partial M) \setminus K_\varepsilon)$$

для $0 < \varepsilon < 1$, где $K_\varepsilon \subset M \setminus \partial M$ — компактное подмножество. Применяя лемму 1.4 к многообразию $M \setminus \partial M$ и компактному подмножеству K_ε , получаем, что если $M \setminus \partial M$ ориентировано, то существует единственный элемент $[M] \in H_n(M, \partial M)$, ограничение

которого даёт локальные ориентации во всех точках $x \in M \setminus \partial M$. Класс $[M] \in H_n(M, \partial M)$ называется *фундаментальным классом* компактного ориентированного многообразия M с краем.

Теорема 1.19 (двойственность Пуанкаре–Лефшеца). *Пусть M — компактное ориентированное n -мерное многообразие с краем и $[M] \in H_n(M, \partial M)$ — фундаментальный класс. Тогда гомоморфизмы двойственности*

$$\begin{aligned} H^k(M, \partial M) &\rightarrow H_{n-k}(M), & \varphi &\mapsto [M] \frown \varphi, \\ H^k(M) &\rightarrow H_{n-k}(M, \partial M), & \varphi &\mapsto [M] \frown \varphi, \end{aligned}$$

являются изоморфизмами.

Доказательство. Теорема 1.15 даёт изоморфизм

$$D: H_c^k(M \setminus \partial M) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M \setminus \partial M).$$

Из гомотопической эквивалентности $M \setminus \partial M \xrightarrow{\simeq} M$ получаем изоморфизмы

$$\begin{aligned} H_{n-k}(M \setminus \partial M) &\cong H_{n-k}(M), \\ H^k(M, \partial M) &\cong H^k(M \setminus \partial M, \partial M \times (0, \varepsilon)) = H^k(M \setminus \partial M, (M \setminus \partial M) \setminus K_\varepsilon). \end{aligned}$$

Так как любое компактное подмножество $K \subset M \setminus \partial M$ содержится в некотором K_ε , получаем

$$H_c^k(M \setminus \partial M) = \varinjlim H^k(M \setminus \partial M, (M \setminus \partial M) \setminus K) \cong H^k(M, \partial M).$$

Тогда изоморфизм D превращается в первый из доказываемых изоморфизмов. Доказательство второго изоморфизма остаётся в качестве задачи. $\square$

Задачи и упражнения.

1.20. Докажите, что S^n , T^n , $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ являются замкнутыми многообразиями, а шар D^n и полноторие $D^2 \times S^1$ являются многообразиями с краем.

1.21. Вычислите группы локальных гомологий $H_i(X, X \setminus x)$ для графа X и его произвольной точки x .

1.22. Докажите, что ориентируемое многообразие R -ориентируемо для любого коммутативного кольца R с единицей, а неориентируемое многообразие R -ориентируемо, если $2 = 0$ в кольце R .

1.23. Докажите, что многообразия S^n , T^n , $\mathbb{C}P^n$ ориентируемы. При каких n ориентируемо $\mathbb{R}P^n$?

1.24. Докажите, что $H_c^i(X) = \varinjlim H^i(X, X \setminus K)$, где прямой предел берётся по компактным подмножествам $K \subset X$.

1.25. Пусть пространство X представлено в виде объединения последовательности вложенных открытых множеств $V_1 \subset V_2 \subset \dots$, причём любое компактное подмножество $K \subset X$ содержится в некотором V_i . Докажите, что $H_k(M) = \varinjlim H_k(V_i)$.

1.26. Пусть M^m — замкнутое ориентированное многообразие, а $i: N^n \hookrightarrow M^m$ — вложение замкнутого ориентированного подмногообразия. Пусть $x \in H^{m-n}(M)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к $i_*[N] \in H_n(M)$. Докажите, что для любого класса когомологий $y \in H^n(M)$ имеет место формула

$$\langle i^*y, [N] \rangle = \langle x \smile y, [M] \rangle.$$

1.27. Определим действие группы $\mathbb{Z}_7$ на S^5 формулой

$$\tau \cdot (z_0, z_1, z_2) = (e^{\frac{2\pi i}{7}} z_0, e^{\frac{2\pi i \cdot 2}{7}} z_1, e^{\frac{2\pi i \cdot 5}{7}} z_2),$$

где $\tau \in \mathbb{Z}_7$ — образующая группы. Вычислите группы гомологий $S^5/\mathbb{Z}_7$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и с коэффициентами в $\mathbb{Z}_7$.

1.28. Связной суммой $M \# N$ топологических многообразий M и N одной размерности n называется многообразие, получаемое вырезанием малых открытых шаров из M и N с последующим отождествлением их граничных сфер путём некоторого гомеоморфизма $S^{n-1} \xrightarrow{\cong} S^{n-1}$. Насколько выбор этого гомеоморфизма влияет на топологический тип результата — связной суммы? Гомеоморфны ли многообразия

а) $S^2 \times S^2$ и $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$;

б) $S^2 \times S^2$ и $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$, где $\overline{\mathbb{C}P^2}$ обозначает $\mathbb{C}P^2$ с обращённой ориентацией?

1.29. Докажите, что если n -мерные многообразия M и N замкнуты и ориентируемы, то $H_i(M \# N) = H_i(M) \oplus H_i(N)$ при $0 < i < n$. Как выглядит соответствующая формула в неориентируемом случае?

1.30. Докажите, что для замкнутых n -мерных многообразий M и N имеет место формула для эйлеровой характеристики $\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(S^n)$.

1.31. Пусть S_g — замкнутая ориентируемая поверхность рода g . Докажите, что отображение $S_g \rightarrow S_h$ степени 1 существует тогда и только тогда, когда $g \geq h$.

1.32. Вычислите кольцо когомологий

а) дополнения до объединения координатных плоскостей $x_1 = x_3 = 0$ и $x_2 = x_4 = 0$ в $\mathbb{R}^4$;

б) дополнения до объединения координатных плоскостей $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$, $x_3 = x_5 = 0$, $x_4 = x_1 = 0$ и $x_5 = x_2 = 0$ в $\mathbb{R}^5$;

в) дополнения до объединения координатных плоскостей $z_1 = z_3 = 0$ и $z_2 = z_4 = 0$ в $\mathbb{C}^4$;

г) дополнения до объединения координатных плоскостей $z_1 = z_3 = 0$, $z_2 = z_4 = 0$, $z_3 = z_5 = 0$, $z_4 = z_1 = 0$ и $z_5 = z_2 = 0$ в $\mathbb{C}^5$.

1.33. Докажите, что для замкнутого ориентируемого $(4n+2)$ -мерного многообразия M ранг группы $H^{2n+1}(M)$ чётный.

1.34. Вычислите сигнатуру многообразий $\mathbb{C}P^2$ и $S^2 \times S^2$. Для данного целого k постройте связное замкнутое ориентированное многообразие сигнатуры k .

1.35. Докажите, что для компактного многообразия M с краем существуют открытая окрестность $U(\partial M)$ края и гомеоморфизм $U(\partial M) \xrightarrow{\cong} \partial M \times [0, 1)$, при котором ∂M переходит в $\partial M \times \{0\}$.

1.36. Докажите второй изоморфизм в теореме 1.19.

1.37. Докажите, что компактное многообразие не ретрагируется на свой край.

1.38. Пусть K — компактное подмножество в сфере S^n , причём вложение $K \subset S^n$ является корасслоением, т.е. удовлетворяет свойству продолжения гомотопии. Докажите изоморфизмы двойственности Александера–Понтрягина:

$$\tilde{H}_i(S^n - K) \cong \tilde{H}^{n-i-1}(K).$$

(Эти изоморфизмы имеют место и без ограничения на вложение, если K — локально стягиваемое компактное подмножество.)

1.39. Пусть K — симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, \dots, m\}$, отличный от полного симплекса Δ^{m-1} . Определим *двойственный комплекс*

$$\widehat{K} = \{I \subset [m] : [m] \setminus I \notin K\},$$

т.е. наборами вершин симплексов из $\widehat{K}$ являются дополнения до наборов вершин, не порождающих симплексы в K . Докажите изоморфизмы групп симплициальных (ко)гомологий:

$$\widetilde{H}_j(K) \cong \widetilde{H}^{m-3-j}(\widehat{K}).$$

Это комбинаторная версия двойственности Александера–Понтрягина.

2. ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

2.1. Локально тривиальные расслоения. Векторные расслоения. *Локально тривиальным расслоением* (или просто *расслоением*) называется четвёрка (E, B, F, p) , где E, B, F — пространства, а p — такое отображение $E \rightarrow B$, что любая точка $x \in B$ имеет окрестность $U \subset B$, для которой существует гомеоморфизм $\varphi_U: p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow[\cong]{\varphi_U} & U \times F \\ & \searrow p & \swarrow \\ & U & \end{array}$$

Гомеоморфизм φ_U называется *тривиализацией* расслоения над U . Пространство E называется *тотальным пространством*, B *базой*, а F *слоем* локально тривиального расслоения. Локально тривиальным расслоением также называют отображение $p: E \rightarrow B$. Прообраз $p^{-1}(x)$ точки $x \in B$ называется *слоем расслоения над точкой x* и обозначается E_x ; каждый слой гомеоморфен F . Как множество, тотальное пространство E предстает собой объединение слоёв $\bigcup_{x \in B} E_x$, параметризованных точками базы.

Локально тривиальное расслоение называется *тривиальным*, если в диаграмме выше можно положить $U = B$; это означает, что $E \cong B \times F$.

Отображением или *морфизмом* расслоений $p': E' \rightarrow B'$ и $p: E \rightarrow B$ называется пара отображений $\tilde{f}: E' \rightarrow E$ и $f: B' \rightarrow B$, входящих в коммутативную диаграмму

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Важным случаем морфизма является *индуцированное расслоение*. Говорят, что расслоение $p': E' \rightarrow B'$ индуцировано расслоением $p: E \rightarrow B$ при помощи отображения $f: B' \rightarrow B$, если

$$E' = \{(e, b') \in E \times B' : p(e) = f(b')\}$$

— расслоенное произведение, т.е. диаграмма (2) является декартовым квадратом. Пространство индуцированного расслоения обозначается f^*E . В этом случае отображение $\tilde{f}$ отождествляет слой индуцированного расслоения $p': f^*E \rightarrow B'$ над $b' \in B'$ со слоем расслоения $p: E \rightarrow B$ над $f(b) \in B$. Если $f: B' \hookrightarrow B$ — вложение, то индуцированное расслоение $p': f^*E \rightarrow B'$ есть *ограничение* $p: E \rightarrow B$ на B' . Если $B = pt$, то индуцированное расслоение тривиально.

Локально тривиальное расслоение (E, B, F, p) называется *гладким*, если E, B, F — гладкие многообразия, $p: E \rightarrow B$ — гладкое отображение и тривиализации φ_U являются диффеоморфизмами.

Пример 2.1.

1. Накрытие является локально тривиальным расслоением с дискретным слоем F .

2. Проекция ленты Мёбиуса на её среднюю линию представляет собой нетривиальное расслоение над окружностью со слоем отрезок.

3. Пусть $E = S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2: |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$, $B = \mathbb{C}P^1 = S^2$, $p(z_0, z_1) = [z_0 : z_1]$. Получаем локально тривиальное расслоение $p: S^3 \rightarrow S^2$ со слоем $F = S^1$, которое называется *расслоением Хопфа*. В качестве множеств U из определения расслоения можно взять $U_0 = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{C}P^1: z_0 \neq 0\}$ и $U_1 = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{C}P^1: z_1 \neq 0\}$.

Локально тривиальное расслоение $p: E \rightarrow B$ со слоем $F = \mathbb{R}^n$ называется *вещественным n -мерным векторным расслоением*, если ограничение каждой тривиализации $\varphi_U: p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^n$ на каждый слой является линейным изоморфизмом $E_x \cong x \times \mathbb{R}^n$. Аналогично определяется *комплексное n -мерное векторное расслоение* (со слоем $\mathbb{C}^n$). Векторные расслоения обычно обозначаются греческими буквами ξ, η, γ и т.д.

Если $\varphi_{U_\alpha}: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ и $\varphi_{U_\beta}: p^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times \mathbb{R}^n$ — две тривиализации векторного расслоения ξ над U_α и U_β , соответственно, то определены *отображения перехода*

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), \quad g_{\alpha\beta}(x) = (\varphi_{U_\alpha} \circ \varphi_{U_\beta}^{-1})|_{x \times \mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$(3) \quad g_{\alpha\alpha}(x) = \text{id}, \quad g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x)g_{\gamma\alpha}(x) = \text{id}$$

для любого $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Если задано открытое покрытие $B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ и отображения перехода $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, удовлетворяющие соотношениям (3), то можно определить векторное расслоение $p: E \rightarrow B$, положив

$$(4) \quad E = \left(\bigcup_{\alpha} (U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \right) / \sim,$$

где $(x, v) \sim (x, g_{\alpha\beta}(x)(v))$ для $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $v \in \mathbb{R}^n$.

Пример 2.2. *Тавтологическое расслоение* над вещественным проективным пространством $\mathbb{R}P^n$ — это одномерное векторное расслоение $\gamma = \gamma_{n, \mathbb{R}}^1$, слоем которого над точкой $\mathbb{R}P^n$, задаваемой прямой $\ell \in \mathbb{R}^{n+1}$, является сама эта прямая. Таким образом, пространство расслоения γ есть

$$E\gamma = \{(\ell, x): \ell \text{ — одномерное подпространство в } \mathbb{R}^{n+1}, x \in \ell\}.$$

Аналогично определяется тавтологическое одномерное комплексное расслоение $\gamma = \gamma_{n,\mathbb{C}}^1$ над $\mathbb{C}P^n$.

Сечением локально тривиального расслоения $p: E \rightarrow B$ называется отображение $s: B \rightarrow E$ такое, что $p \circ s = \text{id}: B \rightarrow B$. Векторное n -мерное расслоение над B тривиально тогда и только тогда, когда оно имеет n сечений $s_1, \dots, s_n$, таких что векторы $s_1(x), \dots, s_n(x)$ линейно независимы для каждой точки $x \in B$.

Морфизмом векторных расслоений $p': E' \rightarrow B'$ и $p: E \rightarrow B$ называется морфизм (2), в котором ограничение отображения $\tilde{f}: E' \rightarrow E$ на каждый слой E_x линейно. Если при этом $B = B'$ и $f = \text{id}$, то такой морфизм называется *морфизмом векторных расслоений над B* . Морфизм векторных расслоений, ограничение которого на каждый слой инъективно (соответственно, сюръективно, биективно), называется *мономорфизмом* (соответственно, *эпиморфизмом*, *изоморфизмом*).

Мы будем обозначать тривиальное вещественное и комплексное n -мерное расслоение над данной базой B через $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$, соответственно. Для векторных расслоений над одной и той же базой B определены те же операции, что и над векторными пространствами. В частности, определены *прямая сумма* $\xi \oplus \eta$, *тензорное произведение* $\xi \otimes \eta$, *Hom-расслоение* $\text{Hom}(\xi, \eta)$, *двойственное расслоение* $\xi^* = \text{Hom}(\xi, \mathbb{R})$, *внешняя степень* $\Lambda^k \xi$, *симметрическая степень* $S^k \xi$ и т. д.

Для вещественного векторного расслоения ξ его *комплексификация* $\xi_{\mathbb{C}} = \xi \otimes \mathbb{C}$ является комплексным расслоением той же размерности. Для комплексного n -мерного расслоения η его *овеществление* $\eta_{\mathbb{R}}$ является вещественным $2n$ -мерным расслоением. Имеют место изоморфизмы $(\xi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong \xi \oplus \xi$ и $(\eta_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong \eta \oplus \bar{\eta}$, где $\bar{\eta}$ — комплексно сопряжённое расслоение.

Предложение 2.3. *Векторное расслоение ξ над компактной хаусдорфовой базой вкладывается в тривиальное расслоение $\mathbb{R}^N$ над той же базой для некоторого N , т. е. существует мономорфизм расслоений $j: \xi \hookrightarrow \mathbb{R}^N$.*

Доказательство. Пусть $p: E \rightarrow B$ — данное расслоение. Так как B компактно, существует конечное покрытие $B = U_1 \cup \dots \cup U_k$ открытыми множествами, над которыми расслоение тривиально. Пусть $f_1, \dots, f_k$ — разбиение единицы, подчинённое этому открытому покрытию, т. е. функция $f_i: B \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, неотрицательна, её носитель содержится в U_i и $\sum_{i=1}^k f_i = 1$. Рассмотрим тривиализации $\varphi_i: p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{R}^n$. Для $i = 1, \dots, k$ определим непрерывное отображение

$$f_i \cdot \varphi_i: E \rightarrow B \times \mathbb{R}^n, \quad e \mapsto \begin{cases} f_i(p(e)) \cdot \varphi_i(e) & \text{при } e \in p^{-1}(U_i), \\ ((p(e), 0)) & \text{при } e \notin p^{-1}(U_i). \end{cases}$$

Положим $N = nk$ и отождествим $\mathbb{R}^N$ с $\bigoplus_{i=1}^k \mathbb{R}^n$. Тогда требуемый мономорфизм $j: \xi \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ задаётся формулой

$$j(e) = (f_1 \cdot \varphi_1(e), \dots, f_k \cdot \varphi_k(e))$$

для $e \in E$. □

Римановой метрикой на вещественном векторном расслоении ξ называется положительно определённая симметрическая билинейная функция (скалярное произведение), заданная в каждом слое E_x , такая что компоненты её матрицы в координатах

локальных тривиализаций являются непрерывными функциями от $x \in B$ (гладкими функциями в случае гладкого расслоения). Аналогично определяется эрмитова метрика на комплексном расслоении.

Предложение 2.4. *Риманова (эрмитова) метрика существует на вещественном (комплексном) расслоении над компактной хаусдорфовой базой.*

Доказательство. Вложим расслоение в тривиальное расслоение $\mathbb{R}^N$ согласно предложению 2.3, введём метрику на $\mathbb{R}^N$ и ограничим её на слою расслоения. $\square$

Предложение 2.5. *Для любого векторного расслоения ξ над компактной хаусдорфовой базой B существует расслоение η над той же базой, такое что $\xi \oplus \eta \cong \mathbb{R}^N$ (тривиальное расслоение).*

Доказательство. Вложим пространство расслоения в тривиальное расслоение $\mathbb{R}^N$, введём метрику на $\mathbb{R}^N$ и возьмём в качестве η расслоение, слоем которого над $x \in B$ является ортогональное дополнение в $\mathbb{R}^N$ к слою E_x расслоения ξ . $\square$

2.2. Касательное и нормальное расслоение. Пусть M — n -мерное гладкое многообразие с гладким атласом $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, $\varphi_\alpha: U_\alpha \xrightarrow{\cong} V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ и гладкими отображениями замены координат $\psi_{\alpha\beta}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Касательное пространство $\mathcal{T}_x M$ состоит из всех касательных векторов к M в точке x . Объединение $\mathcal{T}M = \bigcup_{x \in M} \mathcal{T}_x M$ касательных пространств во всех точках является тотальным пространством n -мерного гладкого вещественного векторного расслоения над M , называемого *касательным расслоением*. Его можно определить как расслоение (4) над M с тривиализующим атласом $\{U_\alpha\}$ и функциями перехода

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), \quad x \mapsto \text{Jac}_x \psi_{\alpha\beta},$$

где $\text{Jac}_x \psi_{\alpha\beta}$ обозначает матрицу Якоби из частных производных отображения замены координат в точке $x \in M$.

По определению, сечениями касательного расслоения $\mathcal{T}M$ являются векторные поля на M . Гладкое многообразие M называется *параллелизуемым*, если касательное расслоение $\mathcal{T}M$ тривиально, т.е. на M существует $n = \dim M$ векторных полей, которые линейно независимы в каждой точке $x \in M$.

Гладкое многообразие M называется *почти комплексным*, если в касательном расслоении $\mathcal{T}M$ можно ввести структуру комплексного векторного расслоения. Как и в случае векторных пространств, комплексная структура на вещественном расслоении $\mathcal{T}M$ задаётся выбором морфизма расслоений $I: \mathcal{T}M \rightarrow \mathcal{T}M$, такого что $I^2 = -\text{id}_{\mathcal{T}M}$. Почти комплексное многообразие имеет чётную размерность. Если само M является комплексно-аналитическим многообразием с голоморфным атласом $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, $\varphi_\alpha: U_\alpha \xrightarrow{\cong} V_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ (и голоморфными отображениями замены координат), то касательное расслоение $\mathcal{T}M$ имеет естественную комплексную структуру. Однако не любая почти комплексная структура происходит из комплексной структуры на M .

Пусть M — гладкое подмногообразие в гладком многообразии N . *Нормальным расслоением* M в N называется фактор-расслоение $(\mathcal{T}N|_M)/\mathcal{T}M$, где $\mathcal{T}N|_M$ обозначает ограничение касательного расслоения к N на M . Нормальное расслоение обозначается $\nu(M \subset N)$. Введя риманову метрику на $\mathcal{T}N$, слой расслоения $\nu(M \subset N)$ в точке $x \in M$ можно отождествить с ортогональным дополнением к $\mathcal{T}_x M$ в $\mathcal{T}_x N$.

Опишем касательное расслоение к вещественному и комплексному проективному пространству. Наряду с одномерным тавтологическим расслоением γ (пример 2.2) рассмотрим его ортогональное дополнение $\gamma^\perp$, слоем которого над прямой $\ell \in \mathbb{C}P^n$ является ортогональное дополнение к этой прямой в $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$E\gamma^\perp = \{(\ell, v) : \ell \text{ — одномерное подпространство в } \mathbb{C}^{n+1}, v \in \ell^\perp\}.$$

Тогда мы имеем $\gamma \oplus \gamma^\perp = \underline{\mathbb{C}}^{n+1}$.

Предложение 2.6. $\mathcal{TR}P^n \cong \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$, $\mathcal{TC}P^n \cong \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$.

Доказательство. Рассмотрим единичную сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и проекцию $p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $p(x) = \pm x$. Касательное расслоение сферы есть

$$\mathcal{T}S^n = \{(x, v) : x, v \in \mathbb{R}^{n+1}, |x| = 1, (x, v) = 0\}.$$

Дифференциал проекции $Dp: \mathcal{T}S^n \rightarrow \mathcal{TR}P^n$ переводит касательный вектор (x, v) в касательный вектор $\pm(x, v)$ к $\mathbb{R}P^n$, где

$$\mathcal{TR}P^n = \{\pm(x, v) : x, v \in \mathbb{R}^{n+1}, |x| = 1, (x, v) = 0\}.$$

Тогда требуемый изоморфизм $\mathcal{TR}P^n \cong \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$ отображает $\pm(x, v) \in \mathcal{TR}P^n$ в морфизм $\gamma \rightarrow \gamma^\perp$, переводящий (ℓ, x) в (ℓ, v) , где $x \in \ell$, $v \in \ell^\perp$.

Изоморфизм $\mathcal{TC}P^n \cong \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$ доказывается аналогично (задача). $\square$

Теорема 2.7. *Имеют место изоморфизмы*

$$\mathcal{TR}P^n \oplus \underline{\mathbb{R}} \cong \underbrace{\gamma \oplus \dots \oplus \gamma}_{n+1}, \quad \mathcal{TC}P^n \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong \underbrace{\bar{\gamma} \oplus \dots \oplus \bar{\gamma}}_{n+1}.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{TC}P^n \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp) \oplus \text{Hom}(\gamma, \gamma) = \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp \oplus \gamma) = \text{Hom}(\gamma, \underline{\mathbb{C}}^{n+1}) \cong \underbrace{\bar{\gamma} \oplus \dots \oplus \bar{\gamma}}_{n+1},$$

где во втором равенстве мы воспользовались тем, что одномерное расслоение $\text{Hom}(\gamma, \gamma)$, имеет всюду ненулевое сечение, задаваемое тождественным морфизмом, и потому тривиально. $\square$

2.3. Многообразие Грассмана, вложение Плюккера и клетки Шуберта. Множество всех k -мерных линейных подпространств (плоскостей) в $\mathbb{R}^N$ называется вещественным *многообразием Грассмана* (или *грассманианом*) и обозначается $G_k(\mathbb{R}^N)$. Аналогично определяется комплексное многообразие Грассмана $G_k(\mathbb{C}^N)$.

Подпространство $\pi \subset \mathbb{R}^N$ размерности k задаётся k -поливектором $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \Lambda^k \mathbb{R}^N$ или, в координатной записи, классом эквивалентности $[P]$ матриц P размера $k \times N$ с точностью до умножения слева на матрицу из $GL(k, \mathbb{R})$ (в строках матрицы стоят координаты базисных векторов $v_1, \dots, v_k$ подпространства π). Для набора индексов $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N$ будем обозначать через $\mathbb{R}_{i_1 \dots i_k}$ соответствующее k -мерное координатное подпространство в $\mathbb{R}^N$ и через $p_{i_1 \dots i_k}$ определитель подматрицы в P , образованной столбцами с номерами $i_1, \dots, i_k$. Рассмотрим подмножество

$$\begin{aligned} U_{i_1 \dots i_k} &= \{\pi \in G_k(\mathbb{R}^N) : \pi \text{ проектируется без вырождений на } \mathbb{R}_{i_1 \dots i_k}\} = \\ &= \{[P] : p_{i_1 \dots i_k} \neq 0\}. \end{aligned}$$

Тогда $U_{i_1 \dots i_k}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{k(N-k)}$ (с координатами — элементами матрицы P вне столбцов с номерами $i_1, \dots, i_k$) и атлас $\{U_{i_1 \dots i_k}\}$ задаёт на $G_k(\mathbb{R}^N)$ структуру гладкого многообразия размерности $k(N-k)$.

В случае комплексного грассманиана атлас $\{U_{i_1 \dots i_k}\}$ задаёт на $G_k(\mathbb{C}^N)$ структуру комплексно-аналитического многообразия комплексной размерности $k(N-k)$. Построения в вещественном и комплексном случае абсолютно аналогичны, далее в этом разделе будем рассматривать комплексный случай.

Набор из $C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$ чисел $\{p_{i_1 \dots i_k}\}$ является координатами поливектора $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ в стандартном базисе $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}\}$ внешней степени $\Lambda^k \mathbb{C}^N$ и называется *координатами Плюккера* k -мерной плоскости π . Они обобщают однородные координаты в проективном пространстве $\mathbb{C}P^{N-1} = G_1(\mathbb{C}^N)$ и удовлетворяют системе уравнений, называемых *соотношениями Плюккера*.

Теорема 2.8 (вложение и соотношения Плюккера). *Отображение*

$$G_k(\mathbb{C}^N) \rightarrow \mathbb{C}P(\Lambda^k \mathbb{C}^N) = \mathbb{C}P^{C_N^k - 1}, \quad \pi \mapsto [v_1 \wedge \dots \wedge v_k] = [\dots : p_{i_1 \dots i_k} : \dots]$$

является вложением гладкого подмногообразия, а его образ задаётся соотношениями

$$\sum_{r=1}^{k+1} (-1)^r p_{i_1 \dots i_{k-1} j_r} p_{j_1 \dots \widehat{j_r} \dots j_{k+1}} = 0$$

для любых наборов $(i_1, \dots, i_{k-1})$ и $(j_1, \dots, j_{k+1})$, где мы полагаем $p_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}} = (-1)^\sigma p_{i_1 \dots i_k}$ для любой перестановки σ .

Соотношения Плюккера доказываются в линейной алгебре, мы лишь приведём первый пример нетривиального соотношения.

Пример 2.9. Грассманиан $G_2(\mathbb{C}^4)$ вкладывается в $\mathbb{C}P(\Lambda^2 \mathbb{C}^4) = \mathbb{C}P^5$ с однородными координатами $[p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}]$ как гиперповерхность, заданная квадратичным уравнением

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0,$$

которое получается, если положить $(i_1) = (1)$ и $(j_1, j_2, j_3) = (2, 3, 4)$ в теореме 2.8.

Опишем также клеточное разбиение многообразия Грассмана на клетки Шуберта.

Рассмотрим стандартный координатный флаг (последовательность вложенных подпространств) $\{0\} \subset \mathbb{C}^1 \subset \mathbb{C}^2 \subset \dots \subset \mathbb{C}^N$. Для k -мерной плоскости $\pi \in G_k(\mathbb{C}^N)$ рассмотрим последовательность

$$0 \leq \dim(\pi \cap \mathbb{C}^1) \leq \dim(\pi \cap \mathbb{C}^2) \leq \dots \leq \dim(\pi \cap \mathbb{C}^N) = k.$$

Два соседних члена этой последовательности отличаются не более чем на 1, т.е. в последовательности есть в точности k «скачков». Эти скачки задаются *символами Шуберта*

$$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k), \quad 1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq N, \quad \dim(\pi \cap \mathbb{C}^{s_i}) = i, \quad \dim(\pi \cap \mathbb{C}^{s_i-1}) = i-1.$$

Рассмотрим множество k -плоскостей, «скачки» которых задаются в точности символом $\mathbf{s}$:

$$e(\mathbf{s}) = \{\pi \in G_k(\mathbb{C}^N) : \dim(\pi \cap \mathbb{C}^{s_i}) = i, \dim(\pi \cap \mathbb{C}^{s_i-1}) = i-1 \text{ для } i = 1, 2, \dots, k\}.$$

Тогда $e(\mathbf{s})$ называется *клеткой Шуберта*. Очевидно,

$$G_k(\mathbb{C}^N) = \bigcup_{\mathbf{s}=(s_1, \dots, s_k)} e(\mathbf{s}), \quad \text{причём } e(\mathbf{s}) \cap e(\mathbf{s}') = \emptyset \text{ при } \mathbf{s} \neq \mathbf{s}'.$$

Легко видеть, что $\pi \in e(\mathbf{s})$ тогда и только тогда, когда плоскость π задаётся матрицей

$$P = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

где 1 в i -й строке стоит на s_i -м месте, а на позициях, обозначенных *, стоят произвольные числа. Такой вид матрицы, задающей плоскость $\pi \in e(\mathbf{s})$, определён однозначно с точностью до умножения слева на квадратную нижнетреугольную матрицу с 1 на диагонали. Отсюда следует, что $e(\mathbf{s})$ гомеоморфно открытому шару размерности

$$\dim e(\mathbf{s}) = 2((s_1 - 1) + (s_2 - 2) + \dots + (s_k - k)).$$

Введём частичный порядок на символах Шуберта: $\mathbf{s}' \leq \mathbf{s}$, если $s'_i \leq s_i$ для каждого $i = 1, \dots, k$. Доказательство следующего утверждения мы опустим (см. [МС] или [Ha]).

Теорема 2.10 (клеточное разбиение Шуберта). *Клетки Шуберта $e(\mathbf{s})$, соответствующие всевозможным символам $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$, $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq N$, задают клеточное разбиение многообразия Грассмана $G_k(\mathbb{C}^N)$. При этом замыкание клетки $e(\mathbf{s})$ содержится в объединении клеток $e(\mathbf{s}')$ с $\mathbf{s}' \leq \mathbf{s}$.*

Имеем вложение грассманианов $G_k(\mathbb{C}^N) \subset G_k(\mathbb{C}^{N+1})$, соответствующее вложению $\mathbb{C}^N \subset \mathbb{C}^{N+1}$ по первым N координатам.

Предложение 2.11. $G_k(\mathbb{C}^N) \subset G_k(\mathbb{C}^{N+1})$ является клеточным подпространством относительно разбиения на клетки Шуберта. При этом каждая клетка Шуберта размерности $\leq 2(N - k)$ в $G_k(\mathbb{C}^{N+1})$ лежит в $G_k(\mathbb{C}^N)$.

Доказательство. Рассмотрим клетку $e(\mathbf{s}) \subset G_k(\mathbb{C}^{N+1})$, где $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$, $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq N + 1$. Ясно, что $e(\mathbf{s}) \subset G_k(\mathbb{C}^N)$ тогда и только тогда, когда $s_k \leq N$. Поэтому $G_k(\mathbb{C}^N) \subset G_k(\mathbb{C}^{N+1})$ — замкнутое подмножество, представляющее собой объединение клеток, т.е. клеточное подпространство. Если $e(\mathbf{s}) \not\subset G_k(\mathbb{C}^N)$, то $s_k = N + 1$ и, следовательно,

$$\dim e(\mathbf{s}) = 2((s_1 - 1) + (s_2 - 2) + \dots + (s_k - k)) \geq 2(s_k - k) > 2(N - k). \quad \square$$

Разбиением целого числа $d \geq 0$ называется неупорядоченное множество $\omega = (i_1, \dots, i_p)$ натуральных чисел, таких что $i_1 + \dots + i_p = d$.

Предложение 2.12. *Число клеток размерности $2d$ в разбиении Шуберта грассманиана $G_k(\mathbb{C}^N)$ равно числу разбиений числа d на не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит $N - k$.*

Доказательство. Клетки размерности $2d$ соответствуют символам Шуберта $\mathbf{s}$, таким что $d = (s_1 - 1) + (s_2 - 2) + \dots + (s_k - k)$. Рассмотрим множество $\omega = (i_1, \dots, i_p)$, получаемое удалением нулей из последовательности $s_1 - 1, s_2 - 2, \dots, s_k - k$. Тогда $i_1 + \dots + i_p = d$, т.е. ω — разбиение d на не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит $N - k$, так как $s_k \leq N$. Обратно, каждое такое разбиение задаёт

символ $\mathbf{s}$ (надо упорядочить $(i_1, \dots, i_p)$ по неубыванию, дописать слева $k - p$ нулей и к каждому члену полученной последовательности прибавить его номер). $\square$

2.4. Классификация векторных расслоений. Бесконечномерным *гассманианом* $G_k = G_k(\mathbb{R}^\infty)$ называется множество всех k -мерных подпространств в $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_N \mathbb{R}^N$. Каждое k -мерное подпространство в $\mathbb{R}^\infty$ лежит в некотором $\mathbb{R}^N$, так что $G_k = \bigcup_N G_k(\mathbb{R}^N)$. На G_k вводится *слабая топология*: подмножество $A \subset G_k$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуты пересечения $A \cap G_k(\mathbb{R}^N)$ для всех N .

Теорема 2.13. Клетки $e(\mathbf{s})$, соответствующие символам Шуберта $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$, где $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k$, задают клеточное разбиение бесконечномерного гассманиана G_k . Число клеток размерности d равно числу разбиений числа d на не более чем k слагаемых.

Доказательство. Это следует из теоремы 2.10 и предложений 2.11 и 2.12. $\square$

Пример 2.14. Тавтологическое расслоение над гассманианом $G_k(\mathbb{R}^N)$ — это k -мерное векторное расслоение $\gamma^k = \gamma_{N, \mathbb{R}}^k$, слоем которого над $\pi \in G_k(\mathbb{R}^N)$ является k -плоскость π . Пространство тавтологического расслоения γ^k есть

$$E_k = \{(\pi, v) : \pi - k\text{-мерное подпространство в } \mathbb{R}^N, v \in \pi\}.$$

Также определено тавтологическое расслоение γ^k над $G_k = G_k(\mathbb{R}^\infty)$.

Тавтологическое расслоение γ^k лежит в основе классификационной теоремы.

Теорема 2.15. Пусть B — хаусдорфово паракомпактное пространство (например, клеточное). Тогда

- а) любое k -мерное векторное расслоение ξ над B изоморфно расслоению, индуцированному из тавтологического расслоения γ^k при помощи некоторого отображения $f: B \rightarrow G_k$, т. е. $\xi \cong f^* \gamma^k$;
- б) индуцированные расслоения $f_0^* \gamma^k$ и $f_1^* \gamma^k$ изоморфны тогда и только тогда, когда отображения $f_0: B \rightarrow G_k$ и $f_1: B \rightarrow G_k$ гомотопны.

Таким образом, множество $\text{Vect}^k(B)$ классов изоморфизма k -мерных векторных расслоений над B находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $[B, G_k]$ классов гомотопных отображений $B \rightarrow G_k$.

Доказательство. Мы опустим некоторые детали доказательства; подробности можно найти в [Ми] или [На, Ch. 1].

Пусть расслоение ξ задаётся проекцией $p: E \rightarrow B$, а тавтологическое расслоение γ^k — проекцией $p_k: E_k \rightarrow G_k$. Прежде всего заметим, что построение изоморфизма $\xi \cong f^* \gamma^k$ эквивалентно построению отображения $g: E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$, ограничение которого на каждый слой является линейным мономорфизмом. Действительно, если $\xi \cong f^* \gamma^k$, то отображение g задаётся композицией $E \cong f^* E_k \rightarrow E_k \rightarrow \mathbb{R}^\infty$, где последнее отображение есть $(\pi, v) \mapsto v$. Обратно, если дано $g: E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$, то зададим $f: B \rightarrow G_k$ по формуле $f(x) = g(E_x)$.

Вначале докажем а) в случае, когда база B компактна. Тогда существует вложение $j: E \hookrightarrow B \times \mathbb{R}^N$ в тривиальное расслоение (предложение 2.3). Композиция с проекцией $B \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ даёт требуемое отображение $g: E \rightarrow \mathbb{R}^N \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$. В общем случае рассуждение аналогично доказательству предложения 2.3 и использует разбиение единицы. Существует счётное покрытие $B = \bigcup_{i=1}^\infty U_i$ открытыми множествами, над

которыми расслоение ξ тривиально, и разбиение единицы $\{f_i\}$, подчинённое этому покрытию. Последнее означает, что функция $f_i: B \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, её носитель содержится в U_i , в каждой точке $x \in B$ лишь конечное число f_i отлично от нуля и $\sum_i f_i = 1$. (Существование разбиения единицы следует из того, что клеточные пространства паракомпактны.) Для каждого i определим $h_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^k$ как композицию тривиализации $\varphi_i: p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{R}^k$ и проекции. Далее определим

$$g_i: E \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad e \mapsto \begin{cases} f_i(p(e)) \cdot h_i(e) & \text{при } e \in p^{-1}(U_i), \\ 0 & \text{при } e \notin p^{-1}(U_i). \end{cases}$$

Отождествим $\mathbb{R}^\infty$ с $\bigoplus_{i=1}^\infty \mathbb{R}^k$. Тогда требуемое отображение $g: E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ задаётся формулой $g(e) = (g_1(e), \dots, g_i(e), \dots)$.

Теперь докажем б). Пусть $f_0^* E_k \cong f_1^* E_k \cong E$, изоморфизм $f_0^* E_k \cong E$ задаётся отображением $g_0: E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$, а изоморфизм $f_1^* E_k \cong E$ задаётся отображением $g_1: E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$. Чтобы построить гомотопию $f_t: B \rightarrow G_k$, $t \in [0, 1]$, между f_0 и f_1 достаточно построить гомотопию $g_t: E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ между g_0 и g_1 , такую что каждое g_t мономорфно на слоях; тогда $f_t(x) = g_t(E_x)$ даёт требуемую гомотопию.

Рассмотрим гомотопию $L_t: \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$, $L_t(r_1, r_2, \dots) = (1-t)(r_1, r_2, \dots) + t(r_1, 0, r_2, 0, \dots)$. Тогда каждое L_t линейно, $L_0 = \text{id}$, а L_1 «прореживает» координаты, так что на чётных местах стоят нули. Композиция с L_t задаёт гомотопию между g_0 и отображением $g'_0 = L_1 \circ g_0$, которое имеет ненулевые координаты только на нечётных местах. Аналогично строим гомотопию между g_1 и отображением $g'_1: E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$, которое имеет ненулевые координаты только на чётных местах. Теперь $g'_t = (1-t)g'_0 + tg'_1$ есть гомотопия между g'_0 и g'_1 . В результате получаем последовательность гомотопий $g_0 \simeq g'_0 \simeq g'_1 \simeq g_1$, где каждое промежуточное отображение $E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ мономорфно на слоях. Следовательно, $f_0 \simeq f_1$.

Теперь пусть $f_0 \simeq f_1$ при помощи гомотопии $F: B \times I \rightarrow G_k$. Рассмотрим индуцированное расслоение $F^* \gamma^k$ над $B \times I$. Его ограничения на $B \times \{0\}$ и $B \times \{1\}$ изоморфны (доказательство этого факта — задача). Первое ограничение есть $f_0^* \gamma^k$, а второе — $f_1^* \gamma^k$. $\square$

Ввиду теоремы 2.15 тавтологическое расслоение γ^k также называется *универсальным k -мерным векторным расслоением*, а его база $G_k = G_k(\mathbb{R}^\infty)$ называется *классифицирующим пространством k -мерных вещественных векторных расслоений* и обозначается $BO(k)$. Говорят, что отображение $f: B \rightarrow G_k$, для которого $\xi \cong f^* \gamma^k$, *классифицирует* расслоение ξ .

Теорема 2.15 также имеет место для комплексных векторных расслоений. Бесконечномерный комплексный грассманиан $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ называется *классифицирующим пространством k -мерных комплексных векторных расслоений* и обозначается $BU(k)$.

Задачи и упражнения.

2.16. Приведите пример локально тривиального расслоения $p: E \rightarrow B$ со слоем $\mathbb{R}^n$, не являющегося векторным.

2.17. При помощи эрмитовой метрики установите канонический изоморфизм $\xi^* \cong \bar{\xi}$ между двойственным комплексным расслоением $\xi^* = \text{Hom}(\xi, \underline{\mathbb{C}})$ и комплексно сопряжённым расслоением $\bar{\xi}$.

2.18. Докажите, что пространство тавтологического расслоения $\gamma_{1,\mathbb{R}}^1$ над $\mathbb{R}P^1$ гомеоморфно открытой ленте Мёбиуса (проективной плоскости с выколотой точкой).

2.19. Докажите, что тавтологическое расслоение $\gamma_{n,\mathbb{R}}^1$ над $\mathbb{R}P^n$ нетривиально при $n \geq 1$.

2.20. Задайте явно отображения перехода $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{C}^*$ тавтологического расслоения $\gamma_{n,\mathbb{C}}^1$ для покрытия $\mathbb{C}P^n$ стандартными аффинными картами.

2.21. Пусть для открытого покрытия $B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ даны два набора отображений перехода $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ и $g'_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, удовлетворяющие условиям (3). Докажите, что задаваемые ими векторные расслоения ξ и ξ' изоморфны тогда и только тогда, когда существует набор отображений $f_\alpha: U_\alpha \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, $\alpha \in A$, удовлетворяющий соотношениям $g'_{\alpha\beta}(x) = f_\alpha(x)g_{\alpha\beta}(x)f_\beta^{-1}(x)$ для любого $x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

2.22. Докажите, что

- а) на сфере S^{2n+1} существует векторное поле без нулей;
- б) на сфере S^{11} существуют три линейно независимых векторных поля без нулей;
- в) сфера S^{2n} не параллелизуема при $n \geq 1$.

2.23. Пусть $\mathcal{V}(B)$ — категория векторных расслоений и морфизмов над компактным хаусдорфовым пространством B . Докажите, что

- а) пространство сечений $\Gamma(\xi)$ векторного расслоения ξ является конечно порождённым проективным модулем над кольцом $C(B)$ непрерывных функций на B (модуль называется проективным, если он является прямым слагаемым свободного модуля);
- б) категория $\mathcal{V}(B)$ эквивалентна категории конечно порождённых проективных модулей над $C(B)$, при этом тривиальные расслоения соответствуют свободным модулям (это утверждение известно как *теорема Свана*).

2.24. Докажите изоморфизм $\mathcal{T}CP^n \cong \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$.

2.25. Докажите изоморфизм $\mathcal{T}G_k(\mathbb{R}^N) \cong \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$, где $\gamma = \gamma_{N,\mathbb{R}}^k$ — тавтологическое расслоение над грассманианом $G_k(\mathbb{R}^N)$, а $\gamma^\perp$ — его ортогональное дополнение. Аналогично, $\mathcal{T}G_k(\mathbb{C}^N) \cong \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$ для комплексного грассманиана.

2.26. Докажите, что если B компактно и хаусдорфово, то ограничения векторного расслоения $E \rightarrow B \times I$ на $B \times \{0\}$ и $B \times \{1\}$ изоморфны (это также верно и в более общем случае паракомпактного и хаусдорфового B).

3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ШТИФЕЛЯ–УИТНИ И ЧЖЕНЯ

Мы изложим два подхода к определению характеристических классов векторных расслоений. Первый основан на вычислении когомологий проективизации векторного расслоения; этот подход по-видимому является наиболее универсальным и применим также и для других теорий когомологий. Второй подход основан на непосредственном вычислении кольца когомологий классифицирующих пространств — бесконечномерных грассманианов.

3.1. Теорема Лере–Хирша. Для любого отображения $p: E \rightarrow B$ кольцо когомологий $H^*(E)$ является модулем над кольцом $H^*(B)$ по формуле $b \cdot e = p^*(b) \smile e$ для $b \in H^*(B)$, $e \in H^*(E)$.

Следующая теорема позволяет при некоторых условиях вычислять когомологии тотального пространства локально тривиально расслоения через когомологии базы.

Теорема 3.1 (Лере–Хирш). Пусть $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ — локально тривиальное расслоение и R — коммутативное кольцо с единицей. Предположим, что

- 1) $H^k(F; R)$ — конечно-порождённый свободный R -модуль для любого k ;
- 2) существуют классы $v_j \in H^*(E; R)$, такие что их ограничения $i^*(v_j)$ на любой слой F дают R -базис в $H^*(F; R)$.

Тогда $H^*(E; R)$ является свободным $H^*(B; R)$ -модулем с базисом $\{v_j\}$, т. е. отображение

$$\Phi_E: H^*(B; R) \otimes_R H^*(F; R) \rightarrow H^*(E; R), \quad b \otimes i^*(v_j) \mapsto p^*(b) \smile v_j,$$

является изоморфизмом R -модулей.

Доказательство. Мы докажем теорему в предположении, что B — клеточное пространство, этого будет достаточно для наших целей. Предположим вначале, что B конечномерно, $\dim B = n$. Утверждение очевидно при $n = 0$, так что можно предположить по индукции, что утверждение верно для $(n - 1)$ -мерного остова B^{n-1} .

Пусть $B' \subset B$ — подпространство, полученное удалением точки x_α из каждой n -мерной клетки $e_\alpha^n \subset B$. Тогда существует гомотопическая эквивалентность (деформационная ретракция) $B' \xrightarrow{\simeq} B^{n-1}$. Из свойства поднятия гомотопии для расслоения $E' \rightarrow B'$ получаем гомотопическую эквивалентность $E' \xrightarrow{\simeq} p^{-1}(B^{n-1})$. Теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^*(B, B') \otimes_R H^*(F) & \longrightarrow & H^*(B) \otimes_R H^*(F) & \longrightarrow & H^*(B') \otimes_R H^*(F) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \Phi_{E, E'} & & \downarrow \Phi_E & & \downarrow \Phi_{E'} \\ \dots & \longrightarrow & H^*(E, E') & \longrightarrow & H^*(E) & \longrightarrow & H^*(E') \longrightarrow \dots \end{array}$$

Здесь нижняя строка — точная последовательность пары (E, E') , а верхняя строка получается из точной последовательности пары (B, B') тензорным умножением на свободный R -модуль $H^*(F)$. Коммутативность двух квадратов, показанных на диаграмме, следует из естественности входящих в них гомоморфизмов. Коммутативность квадрата, включающего кограничные гомоморфизмы, проверяется непосредственно:

$$\begin{array}{ccc} b' \otimes i^*(v_j) & \xrightarrow{\quad} & db' \otimes i^*(v_j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ p^*(b') \smile v_j & \xrightarrow{\quad} & d(p^*(b') \smile v_j) = p^*(db') \smile v_j, \end{array}$$

так как $dv_j = 0$.

Так как имеют место гомотопические эквивалентности $B' \simeq B^{n-1}$ и $E' \simeq p^{-1}(B^{n-1})$, отображение $\Phi_{E'}$ в диаграмме выше является изоморфизмом по предположению индукции. Докажем, что $\Phi_{E, E'}$ также является изоморфизмом. Для каждой выбранной точки x_α выберем открытое множество U_α , такое что $x_\alpha \subset U_\alpha \subset e_\alpha^n$ и ограничение расслоения $p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$ тривиально. Положим $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ и

$U' = U \cap B'$. Мы имеем $H^*(B, B') \cong H^*(U, U')$ в силу вырезания и, аналогично, $H^*(E, E') \cong H^*(p^{-1}(U), p^{-1}(U')) \cong H^*(U \times F, U' \times F)$. Тогда отображение $\Phi_{E, E'}$ принимает вид

$$\Phi_{E, E'}: H^*(U, U') \otimes_R H^*(F) \rightarrow H^*(U \times F, U' \times F).$$

Это изоморфизм согласно относительной версии формулы Кюннета. Теперь тот факт, что Φ_E является изоморфизмом (для конечного клеточного B) вытекает из 5-леммы, примененной к диаграмме выше.

В случае произвольного клеточного B рассмотрим n -мерный остов и диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^*(B) \otimes_R H^*(F) & \longrightarrow & H^*(B^n) \otimes_R H^*(F) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi_n \\ H^*(E) & \longrightarrow & H^*(p^{-1}(B^n)). \end{array}$$

Здесь горизонтальные отображения являются изоморфизмами в размерностях меньше n , а отображение Φ_n является изоморфизмом согласно конечномерному случаю. Следовательно, Φ является изоморфизмом в размерностях меньше n . Так как это верно для любого n , доказательство для клеточного B завершено. $\square$

3.2. Определение и свойства характеристических классов. Пусть ξ — вещественное n -мерное векторное расслоение $p: E \rightarrow B$. Его *проективизацией* называется множество $\mathbb{R}P(\xi) = \{\ell \in E_x\}$ всех одномерных подпространств во всех слоях расслоения ξ . Имеется проекция $\mathbb{R}P(p): \mathbb{R}P(\xi) \rightarrow B$, переводящая $\ell \in E_x$ в x . Слоем этой проекции над $x \in B$ является проективное пространство слоя E_x . Множество $\mathbb{R}P(\xi)$ отождествляется с факторпространством дополнения до нулевого сечения в E , тем самым на нём вводится топология. Тривиализации $p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ расслоения ξ определяют тривиализации $\mathbb{R}P(p)^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}P^{n-1}$ и тем самым задают на $\mathbb{R}P(\xi)$ структуру локально тривиального расслоения над B со слоем $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Над $\mathbb{R}P(\xi)$ определено *тавтологическое* одномерное расслоение $\gamma(\xi)$, слоем которого над $\ell \in E_x$ является прямая ℓ (если $B = pt$, то $\gamma(\xi)$ превращается в тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^{n-1}$).

В силу теоремы 2.15 тавтологическое расслоение $\gamma(\xi)$ классифицируется некоторым отображением $f: \mathbb{R}P(\xi) \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$, т.е. $\gamma(\xi) = f^*(\gamma_{\mathbb{R}}^1)$, где $\gamma_{\mathbb{R}}^1$ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^\infty$. Мы имеем $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[v]$, где $v \in H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ — образующая. Таким образом, с расслоением ξ естественным образом связан класс когомологий $v_\xi = f^*(v) \in H^1(\mathbb{R}P(\xi); \mathbb{Z}_2)$.

Теорема 3.2. Пусть ξ — вещественное n -мерное векторное расслоение над клеточным пространством B . Тогда кольцо когомологий $H^*(\mathbb{R}P(\xi); \mathbb{Z}_2)$ изоморфно факторкольцу кольца многочленов с коэффициентами в $H^*(B; \mathbb{Z}_2)$ от одной образующей $v_\xi \in H^1(\mathbb{R}P(\xi); \mathbb{Z}_2)$ по единственному соотношению

$$(5) \quad v_\xi^n + w_1(\xi) \cdot v_\xi^{n-1} + \dots + w_{n-1}(\xi) \cdot v_\xi + w_n(\xi) \cdot 1 = 0,$$

где классы $w_i(\xi) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$, $i = 1, \dots, n$, определяются расслоением ξ .

Доказательство. Применим теорему Лере–Хирша (теорему 3.1) к расслоению $\mathbb{R}P(\xi)$ над B со слоем $\mathbb{R}P^{n-1}$. Первое условие теоремы выполнено автоматически, а для проверки второго условия заметим следующее. Как видно из доказательства теоремы 2.15, классифицирующее отображение $f: \mathbb{R}P(\xi) \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ тавтологического

расслоения $\gamma(\xi)$ задаётся отображением $g: E\gamma(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^\infty$, которое линейно на слоях. Поэтому ограничение отображения f на слой расслоения $\mathbb{R}P(\xi)$ есть стандартное вложение $\mathbb{R}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}P^\infty$. Если $i: \mathbb{R}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}P(\xi)$ — вложение слоя, то $i^*(v_\xi) = i^*(f^*(v)) = v$ — образующая группы $H^1(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Тогда $i^*(v_\xi^j) = v^j$ — образующая группы $H^j(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ для $j = 1, \dots, n-1$.

Из теоремы 3.1 следует, что $H^*(\mathbb{R}P(\xi); \mathbb{Z}_2)$ является свободным модулем над $H^*(B; \mathbb{Z}_2)$ с образующими $1, v_\xi, \dots, v_\xi^{n-1}$. Соотношение (5) — это разложение элемента $-v_\xi^n$ по базису $1, v_\xi, \dots, v_\xi^{n-1}$, а классы $w_i(\xi)$ — коэффициенты в разложении. $\square$

Классы $w_i(\xi) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$, $i = 1, \dots, n$, задаваемые соотношением (5), называются *характеристическими классами Штифеля–Уитни* n -мерного вещественного векторного расслоения ξ . Также формально положим $w_0(\xi) = 1$.

Аналогично определяется комплексная проективизация $\mathbb{C}P(\xi)$ комплексного n -мерного векторного расслоения ξ , состоящая из всех комплексных одномерных подпространств в слоях. Над $\mathbb{C}P(\xi)$ определено тавтологическое одномерное расслоение $\gamma(\xi)$, которое классифицируется отображением $f: \mathbb{C}P(\xi) \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Мы имеем $H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[v]$, но, в отличие от вещественного случая, образующая $v \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ определена неоднозначно (имеется две образующие, отличающиеся знаком). Выбор этой образующей определяет вид многих последующих формул. Мы возьмём в качестве образующей $v \in H^2(\mathbb{C}P^N)$ класс когомологий, двойственный по Пуанкаре к гиперплоскости $\mathbb{C}P^{N-1} \subset \mathbb{C}P^N$ с канонической ориентацией, происходящей из комплексной структуры. В качестве образующей $v \in H^2(\mathbb{C}P^\infty)$ мы выберем ту, которая ограничивается на $v \in H^2(\mathbb{C}P^N)$ при отображении когомологий, индуцированном вложением $\mathbb{C}P^N \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Таким образом, с комплексным расслоением ξ естественным образом связан класс когомологий $v_\xi = f^*(v) \in H^2(\mathbb{C}P(\xi); \mathbb{Z})$.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 3.2.

Теорема 3.3. Пусть ξ — комплексное n -мерное векторное расслоение над клеточным пространством B . Тогда кольцо $H^*(\mathbb{C}P(\xi); \mathbb{Z})$ изоморфно факторкольцу кольца многочленов с коэффициентами в $H^*(B; \mathbb{Z})$ от одной образующей $v_\xi \in H^2(\mathbb{C}P(\xi); \mathbb{Z})$ по единственному соотношению

$$(6) \quad v_\xi^n + c_1(\xi) \cdot v_\xi^{n-1} + \dots + c_{n-1}(\xi) \cdot v_\xi + c_n(\xi) \cdot 1 = 0,$$

где классы $c_i(\xi) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$, $i = 1, \dots, n$, определяются расслоением ξ .

Классы $c_i(\xi) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$, $i = 1, \dots, n$, задаваемые соотношением (6), называются *характеристическими классами Чженя* n -мерного комплексного векторного расслоения ξ . Также формально положим $c_0(\xi) = 1$.

Свойства характеристических классов Штифеля–Уитни и Чженя описываются следующей теоремой (которую мы сформулируем для классов Чженя; формулировка и доказательство для классов Штифеля–Уитни абсолютно аналогичны).

Теорема 3.4. Имеем

- а) $c_i(\xi) = 0$, если $i > \dim \xi$;
- б) $c_i(f^*\xi) = f^*c_i(\xi)$, где $f^*\xi$ — расслоение, индуцированное отображением $f: B' \rightarrow B$;
- в) $c_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j+k=i} c_j(\xi)c_k(\eta)$ (формула Уитни);
- г) $c_1(\gamma^1) = -v$ для тавтологического расслоения γ^1 над $\mathbb{C}P^n$.

Доказательство. Свойство а) следует из определения.

Для доказательства б) сначала заметим, что если $\bar{f}: \mathbb{C}P(f^*\xi) \rightarrow \mathbb{C}P(\xi)$ — отображение проективизаций, индуцированное отображением $f: B' \rightarrow B$, то $v_{f^*\xi} = \bar{f}^*(v_\xi)$ по определению класса $v_\xi \in H^2(\mathbb{C}P(\xi))$. Запишем (6) для расслоения $f^*\xi$:

$$0 = v_{f^*\xi}^n + c_1(f^*\xi) \cdot v_{f^*\xi}^{n-1} + \dots + c_n(f^*\xi) \cdot 1 = 0.$$

С другой стороны, применив $\bar{f}^*$ к (6) для ξ , получим

$$0 = \bar{f}^*(v_\xi^n + c_1(\xi) \cdot v_\xi^{n-1} + \dots + c_n(\xi) \cdot 1) = v_{f^*\xi}^n + f^*c_1(\xi) \cdot v_{f^*\xi}^{n-1} + \dots + f^*c_n(\xi) \cdot 1.$$

Так как $1, v_{f^*\xi}, \dots, v_{f^*\xi}^{n-1}$ — базис свободного $H^*(B')$ -модуля $H^*(\mathbb{C}P(f^*\xi))$, из сравнения коэффициентов в последних двух формулах получаем $c_i(f^*\xi) = f^*c_i(\xi)$.

Докажем в). Пусть $\dim \xi = n$, $\dim \eta = m$. Рассмотрим вложения $i_\xi: \mathbb{C}P(\xi) \hookrightarrow \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)$ и $i_\eta: \mathbb{C}P(\eta) \hookrightarrow \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)$, индуцированные вложением прямых слагаемых в $\xi \oplus \eta$. При этих вложениях тавтологические расслоения над проективизациями ограничиваются друг на друга: $i_\xi^*\gamma(\xi \oplus \eta) = \gamma(\xi)$, $i_\eta^*\gamma(\xi \oplus \eta) = \gamma(\eta)$. Следовательно, $i_\xi^*v_{\xi \oplus \eta} = v_\xi$, $i_\eta^*v_{\xi \oplus \eta} = v_\eta$.

Имеем деформационные ретракции

$$U = \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta) \setminus \mathbb{C}P(\xi) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}P(\eta), \quad V = \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta) \setminus \mathbb{C}P(\eta) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}P(\xi),$$

которые задаются послойно как ретракции $\mathbb{C}P^{m+n-1} \setminus \mathbb{C}P^{m-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}P^{n-1}$.

Теперь рассмотрим следующее соотношение в $H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta))$:

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{m+n} \left(\sum_{j+k=i} c_j(\xi) c_k(\eta) \cdot v_{\xi \oplus \eta}^{m+n-i} \right)}_a = \underbrace{\left(\sum_{j=0}^n c_j(\xi) \cdot v_{\xi \oplus \eta}^{n-j} \right)}_{a_1} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^m c_k(\eta) \cdot v_{\xi \oplus \eta}^{m-k} \right)}_{a_2}.$$

Рассмотрим фрагмент точной последовательности пары $(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), V)$:

$$\begin{array}{ccccc} H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), V) & \longrightarrow & H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)) & \xrightarrow{i_\xi^*} & H^*(V) \cong H^*(\mathbb{C}P(\xi)) \\ \tilde{a}_1 & \mapsto & a_1 & \mapsto & 0 \end{array}$$

Мы имеем $i_\xi^*(a_1) = \sum_{j=0}^n c_j(\xi) \cdot v_{\xi \oplus \eta}^{n-j} = 0$ в силу (6). Поэтому элемент a_1 накрывается элементом $\tilde{a}_1 \in H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), V)$. Аналогично, для пары $(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), U)$ получаем

$$\begin{array}{ccccc} H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), U) & \longrightarrow & H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)) & \xrightarrow{i_\eta^*} & H^*(U) \cong H^*(\mathbb{C}P(\eta)) \\ \tilde{a}_2 & \mapsto & a_2 & \mapsto & 0 \end{array}$$

Из естественности когомологического произведения получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), U) \times H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), V) & \xrightarrow{\sim} & H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), U \cup V) & \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)) \times H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)) & \xrightarrow{\sim} & H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)) & a_1 a_2 \end{array}$$

где верхнее отображение — относительное когомологическое произведение. Но $U \cup V = \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)$, поэтому $H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), U \cup V) = 0$. Следовательно, $\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 = 0$, а значит

и $a = a_1 a_2 = 0$. С другой стороны, соотношение (6) для $\xi \oplus \eta$ даёт

$$\sum_{i=0}^{m+n} c_i(\xi \oplus \eta) \cdot v_{\xi \oplus \eta}^{m+n-i} = 0.$$

Сравнивая коэффициент при $v_{\xi \oplus \eta}^{m+n-i}$ в этом соотношении с тем же коэффициентом в соотношении $a = 0$, с учётом того, что $1, v_{\xi \oplus \eta}, \dots, v_{\xi \oplus \eta}^{m+n-1}$ — базис, получаем $c_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j+k=i} c_j(\xi) c_k(\eta)$.

Для доказательства г) заметим, что $\mathbb{C}P(\gamma^1) \rightarrow \mathbb{C}P^n$ — тождественное отображение, так как γ^1 одномерно. Поэтому $v_{\gamma^1} = v \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ — выбранная образующая, и соотношение (6) принимает вид $v + c_1(\gamma^1) = 0$. $\square$

Полным классом Чжэня комплексного n -мерного расслоения ξ называется (неоднородный) элемент

$$c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \dots + c_n(\xi) \in H^*(B).$$

Формулу Уитни из теоремы 3.4 в) можно записать в виде

$$c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) c(\eta).$$

Расслоения ξ и η называются *стабильно эквивалентными*, если $\xi \oplus \mathbb{C}^k \cong \eta \oplus \mathbb{C}^l$ для некоторых k, l . В частности, ξ называется *стабильно тривиальным*, если $\xi \oplus \mathbb{C}^k \cong \mathbb{C}^l$.

Предложение 3.5. *Если ξ и η стабильно эквивалентны, то $c(\xi) = c(\eta)$. В частности, если ξ стабильно тривиально, то $c(\xi) = 1$.*

Доказательство. Заметим, что если $\xi \cong \mathbb{C}^k$ (тривиально), то $c(\xi) = 1$. Это следует из того, что тривиальное расслоение над B классифицируется отображением $B \rightarrow pt$ и утверждения б) теоремы 3.4. Теперь предложение следует из формулы Уитни. $\square$

Предложение 3.6. *Пусть ξ и η — одномерные комплексные расслоения над B . Тогда*

$$c_1(\xi \otimes \eta) = c_1(\xi) + c_1(\eta).$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $B = \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$, $\xi = p_1^* \gamma$, $\eta = p_2^* \gamma$, где γ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P^\infty$, $p_1, p_2: \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ — проекции. Мы имеем $H^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}[v_1, v_2]$ и $c_1(\xi \otimes \eta) = k_1 v_1 + k_2 v_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Для вложения $i_1: \mathbb{C}P^\infty \times pt \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$ имеем $i_1^*(\xi \otimes \eta) = \gamma$. Следовательно, $i_1^*(c_1(\xi \otimes \eta)) = c_1(\gamma) = -v$ и $k_1 = -1$. Аналогично, для вложения $i_2: pt \times \mathbb{C}P^\infty \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$ имеем $i_2^*(c_1(\xi \otimes \eta)) = c_1(\gamma) = -v$ и $k_2 = -1$. Следовательно, $c_1(\xi \otimes \eta) = -v_1 - v_2 = c_1(\xi) + c_1(\eta)$.

В случае произвольных ξ, η воспользуемся функториальностью. Пусть ξ классифицируется отображением $f: B \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$, а η классифицируется отображением $g: B \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Положим $h = (f, g): B \rightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$, тогда $\xi = f^* \gamma = h^*(p_1^* \gamma)$ и $\eta = g^* \gamma = h^*(p_2^* \gamma)$. Мы имеем

$$\begin{aligned} c_1(\xi \otimes \eta) &= c_1(h^*(p_1^* \gamma) \otimes h^*(p_2^* \gamma)) = h^*(c_1((p_1^* \gamma) \otimes (p_2^* \gamma))) = h^*(c_1(p_1^* \gamma) + c_1(p_2^* \gamma)) = \\ &= c_1(h^*(p_1^* \gamma)) + c_1(h^*(p_2^* \gamma)) = c_1(\xi) + c_1(\eta). \quad \square \end{aligned}$$

В следующем разделе мы обсудим, как выводить формулы для классов Чжэня тензорного произведения произвольных расслоений.

3.3. Принцип расщепления. Многообразия флагов. Единственность характеристических классов. Принцип расщепления, неформально говоря, заключается в том, что все свойства характеристических классов, выполняемые для расслоений, расщепляющихся в сумму одномерных расслоений, выполняются и для любых расслоений. В основе этого принципа лежит следующая теорема.

Теорема 3.7. Пусть ξ — n -мерное комплексное расслоение над клеточной базой B . Тогда существует B' и отображение $f: B' \rightarrow B$, такое что $f^*\xi = \lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n$ (сумма одномерных расслоений) и $f^*: H^*(B) \rightarrow H^*(B')$ — мономорфизм.

Доказательство. Рассмотрим следующую диаграмму индуцированных расслоений:

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_n & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \xi_2 & \rightarrow & \gamma_1 \oplus \xi_1 & \rightarrow & \xi_0 = \xi \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_n = \mathbb{C}P(\xi_{n-1}) & \xrightarrow{f_n} & \dots & \rightarrow & B_2 = \mathbb{C}P(\xi_1) & \xrightarrow{f_2} & B_1 = \mathbb{C}P(\xi_0) & \xrightarrow{f_1} & B_0 = B \end{array}$$

Здесь f_i — проекция проективизации расслоения ξ_{i-1} над B_{i-1} . На первом шаге мы индуцируем расслоение над $\mathbb{C}P(\xi_0)$ при помощи отображения f_1 . Это индуцированное расслоение $f_1^*\xi_0$ содержит в качестве подрасслоения одномерное расслоение γ_1 — тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P(\xi_0)$. Ортогональное дополнение к γ_1 в $f_1^*\xi_0$ обозначим через ξ_1 , так что $f_1^*\xi_0 = \gamma_1 \oplus \xi_1$. На втором шаге мы индуцируем расслоение над $\mathbb{C}P(\xi_1)$ при помощи отображения f_2 . Это индуцированное расслоение $f_2^*(\gamma_1 \oplus \xi_1)$ содержит в качестве подрасслоений уже два одномерных расслоения — расслоение $f_2^*\gamma_1$, которое мы продолжаем обозначать γ_1 , и тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P(\xi_1)$, которое мы обозначаем γ_2 . Их ортогональное дополнение обозначим через ξ_2 . И так далее. На последнем, n -шаге мы получаем, что γ_n — это тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P(\xi_{n-1})$. Каждое из отображений f_i индуцирует мономорфизм в когомологиях в силу теоремы Лере–Хирша. Утверждение теоремы получается, если положить $B' = B_n$ и $f = f_1 \circ \dots \circ f_n$. $\square$

Более явно конструкцию отображения $f: B' \rightarrow B$ и расщепления $f^*\xi = \lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n$ из теоремы 3.7 можно описать на основе понятия многообразия флагов.

Напомним, что (полным) *флагом* в $\mathbb{C}^n$ называется последовательность вложенных подпространств

$$U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_{n-1} \subset U_n = \mathbb{C}^n, \quad \dim U_i = i.$$

Множество всех флагов в $\mathbb{C}^n$ является комплексным многообразием размерности $\frac{n(n-1)}{2}$. Оно называется *многообразием флагов* и обозначается $Fl(\mathbb{C}^n)$. Над многообразием $Fl(\mathbb{C}^n)$ имеется n тавтологических расслоений $\gamma^1, \dots, \gamma^n$, $\dim \gamma^i = i$; слоем расслоения γ^i над данным флагом является его i -е подпространство U_i (так что расслоение γ^n тривиально).

Флагизацией n -мерного комплексного расслоения ξ над B называется множество $Fl(\xi)$ всех флагов во всех слоях расслоения ξ . Проекция $Fl(\xi) \rightarrow B$ является локально тривиальным расслоением со слоем $Fl(\mathbb{C}^n)$. Над многообразием $Fl(\xi)$ имеется n тавтологических расслоений $\gamma^1, \dots, \gamma^n$, $\dim \gamma^i = i$.

Теорема 3.8. Пусть ξ — n -мерное комплексное расслоение над клеточной базой B и пусть $f: Fl(\xi) \rightarrow B$ — проекция флагизации расслоения ξ . Тогда

$$f^*\xi \cong \gamma^1 \oplus (\gamma^2/\gamma^1) \oplus \dots \oplus (\gamma^n/\gamma^{n-1})$$

и $f^*: H^*(B) \rightarrow H^*(Fl(\xi))$ — мономорфизм.

Доказательство. Из конструкции пространства B' в доказательстве теоремы 3.7 следует, что точка в B' задаётся последовательным выбором n одномерных подпространств $\ell_1 \subset E_x, \ell_2 \subset E_x/\ell_1, \dots, \ell_n \subset E_x/(\ell_1 \oplus \dots \oplus \ell_{n-1})$ в слое $E_x \cong \mathbb{C}^n$ расслоения ξ . Каждый такой набор n одномерных подпространств задаёт флаг $U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_n$ в E_x , где $U_i = \ell_1 \oplus \dots \oplus \ell_i$. Обратно, каждый флаг $U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_n$ в E_x задаёт набор одномерных подпространств $\ell_i = U_i/U_{i-1}$. Поэтому пространство B' из теоремы 3.7 отождествляется с $Fl(\xi)$, а одномерные расслоения $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ над B' отождествляются с расслоениями $\gamma^1, \gamma^2/\gamma^1, \dots, \gamma^n/\gamma^{n-1}$ над $Fl(\xi)$. $\square$

Аналоги теорем 3.7 и 3.8 имеет место и для вещественных расслоений и когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$.

Следствием является теорема единственности для характеристических классов.

Теорема 3.9. *Каждому комплексному векторному расслоению ξ над клеточной базой B можно единственным образом сопоставить набор классов $c_i(\xi) \in H^{2i}(B)$, удовлетворяющих свойствам а)–г) из теоремы 3.4.*

Аналогично, каждому вещественному векторному расслоению ξ над клеточной базой B можно единственным образом сопоставить набор классов $w_i(B) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$, удовлетворяющих аналогам свойств а)–г) из теоремы 3.4 для классов Штифеля–Уитни.

Доказательство. Свойства а) и г) однозначно задают классы c_i для универсального одномерного расслоения γ^1 над $\mathbb{C}P^\infty$. Тогда свойство б) однозначно задаёт классы c_i для любого одномерного расслоения над B , так как такое расслоение классифицируется некоторым отображением $f: B \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Далее, свойство в) однозначно задаёт классы c_i для сумм одномерных расслоений. Тогда из принципа расщепления следует, что классы c_i определены однозначно для любых расслоений над клеточной базой B . Действительно, если $\{c'_i \in H^{2i}(B)\}$ — другой набор классов, удовлетворяющих свойствам а)–г), то для отображения $f: B' \rightarrow B$ из теоремы 3.7 имеем $f^*(c'_i(\xi)) = c'_i(f^*\xi) = c_i(f^*\xi) = f^*(c_i(\xi))$ в $H^{2i}(B')$, так как $f^*\xi$ — сумма одномерных расслоений. Так как $f^*: H^*(B) \rightarrow H^*(B')$ — мономорфизм, отсюда следует, что $c'_i(\xi) = c_i(\xi)$. $\square$

Если $\xi = \lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n$ — сумма одномерных расслоений, то

$$(7) \quad c(\xi) = (1 + t_1) \cdot \dots \cdot (1 + t_n), \quad \text{где } t_i = c_1(\lambda_i).$$

Отсюда $c_i(\xi) = \sigma_i(t_1, \dots, t_n)$ — i -й элементарный симметрический многочлен от $t_1, \dots, t_n$. Таким образом, принцип расщепления позволяет рассматривать характеристические классы n -мерного расслоения как симметрические многочлены от формальных переменных $t_1, \dots, t_n$.

Пример 3.10. Получим на основе принципа расщепления формулу для первого класса Чжэня тензорного произведения двух расслоений. Пусть $\dim \xi = n$ и $\dim \eta = m$. Можно считать, что $\xi = \lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n$ и $\eta = \mu_1 \oplus \dots \oplus \mu_m$ (суммы

одномерных расслоений). Тогда

$$\begin{aligned} c_1(\xi \otimes \eta) &= c_1\left(\bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \otimes \bigoplus_{j=1}^m \mu_j\right) = c_1\left(\bigoplus_{i,j} (\lambda_i \otimes \mu_j)\right) = \sum_{i,j} c_1(\lambda_i \otimes \mu_j) = \\ &= \sum_{i,j} (c_1(\lambda_i) + c_1(\mu_j)) = m \sum_{i=1}^n c_1(\lambda_i) + n \sum_{j=1}^m c_1(\mu_j) = mc_1(\xi) + nc_1(\eta), \end{aligned}$$

где в третьем равенстве мы воспользовались формулой Уитни для c_1 , а в четвёртой — формулой для c_1 от тензорного произведения одномерных расслоений (предложение 3.6).

3.4. Когомологии многообразий Грассмана. Здесь мы покажем, что кольцо когомологий многообразия Грассмана $G_k(\mathbb{C}^N)$ порождается классами Чженя тавтологического расслоения γ_N^k и опишем соотношения между этими классами. Отсюда будет следовать, что кольцо когомологий бесконечномерного грассманиана $G_k(\mathbb{C}^\infty) = BU(n)$ порождается классами $c_1(\gamma^k), \dots, c_k(\gamma^k)$ без соотношений, т.е. $H^*(BU(n)) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k]$ — кольцо многочленов.

Наряду с тавтологическим расслоением γ_N^k будем рассматривать его ортогональное дополнение — $(N - k)$ -мерное расслоение $(\gamma_N^k)^\perp$, слоем которого над $\pi \in G_k(\mathbb{C}^N)$ является ортогональное дополнение $\pi^\perp$ к π в $\mathbb{C}^N$. Обозначим для краткости $c_i = c_i(\gamma_N^k)$ и $c_j^\perp = c_j((\gamma_N^k)^\perp)$. Так как $\gamma_N^k \oplus (\gamma_N^k)^\perp \cong \mathbb{C}^N$, получаем

$$c \cdot c^\perp = (1 + c_1 + \dots + c_k)(1 + c_1^\perp + c_2^\perp + \dots) = 1.$$

Отсюда следует, что каждый класс $c_j^\perp$ является многочленом от классов $c_1, \dots, c_k$.

Кольцо когомологий $G_k(\mathbb{C}^N)$ порождается классами $c_1, \dots, c_k$, а все соотношения между ними вытекают из «размерностных» соотношений $c_j^\perp = 0$ при $j > N - k$.

Теорема 3.11. *Имеет место изоморфизм*

$$H^*(G_k(\mathbb{C}^N)) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k] / (c_j^\perp = 0 \text{ при } j > N - k).$$

Доказательство. Ясно, что определён гомоморфизм колец

$$\mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k] / (c_j^\perp = 0 \text{ при } j > N - k) \rightarrow H^*(G_k(\mathbb{C}^N)),$$

переводящий c_i в $c_i(\gamma_N^k) \in H^*(G_k(\mathbb{C}^N))$. Докажем индукцией по k , что это — изоморфизм. При $k = 1$ имеем $H^*(G_1(\mathbb{C}^N)) = H^*(\mathbb{C}P^{N-1}) \cong \mathbb{Z}[v] / (v^N = 0)$ и $c_1 = c_1(\gamma_N^1) = -v$. Тогда $c = 1 - v$ и $c^\perp = \frac{1}{1-v} = 1 + v + v^2 + \dots$. Таким образом, соотношение $v^N = 0$ эквивалентно соотношениям $c_j^\perp = 0$ при $j > N - 1$.

Предположим теперь, что утверждение доказано для $G_{k-1}(\mathbb{C}^N)$. Проективизация $\mathbb{C}P(\gamma_N^k)$ отождествляется с проективизацией $\mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp)$ следующим образом. Для прямой ℓ , лежащей в k -плоскости π^k , рассмотрим дополнительную $(k-1)$ -плоскость π^{k-1} , т.е. $\pi^k = \ell \oplus \pi^{k-1}$. Тогда ℓ можно рассматривать как прямую в $(\pi^{k-1})^\perp$. Отсюда получаем

$$\mathbb{C}P(\gamma_N^k) = \{\ell: \ell \subset \pi^k \subset \mathbb{C}^N\} = \{\ell: \ell \subset (\pi^{k-1})^\perp \subset \mathbb{C}^N\} = \mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp).$$

Пусть $p: \mathbb{C}P(\gamma_N^k) \rightarrow G_k(\mathbb{C}^N)$ и $p^\perp: \mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp) \rightarrow G_{k-1}(\mathbb{C}^N)$ — проекции и пусть γ — тавтологическое одномерное расслоение над $\mathbb{C}P(\gamma_N^k) = \mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp)$. Тогда

$$p^*(\gamma_N^k) = \xi \oplus \gamma, \quad (p^\perp)^*((\gamma_N^{k-1})^\perp) = \gamma \oplus \zeta,$$

где ξ — некоторое $(k-1)$ -мерное, а ζ — $(N-k)$ -мерное расслоение над $\mathbb{C}P(\gamma_N^k) = \mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp)$. При этом $p^*((\gamma_N^k)^\perp) = \zeta$ и $(p^\perp)^*(\gamma_N^{k-1}) = \xi$, т. е.

$$\xi \oplus \gamma \oplus \zeta = p^*(\gamma_N^k \oplus (\gamma_N^k)^\perp) = p^*(\mathbb{C}^N) = \mathbb{C}^N.$$

По теореме Лере–Хирша $H^*(\mathbb{C}P(\gamma_N^k))$ есть свободный $H^*(G_k(\mathbb{C}^N))$ -модуль с базисом $1, v, \dots, v^{k-1}$, где $v = -c_1(\gamma)$, и соотношением

$$(8) \quad v^k + p^*(c_1(\gamma_N^k))v^{k-1} + \dots + p^*(c_k(\gamma_N^k)) = 0.$$

Из равенства $p^*(\gamma_N^k) = \xi \oplus \gamma$ получаем

$$1 + c_1(p^*\gamma_N^k) + c_2(p^*\gamma_N^k) + \dots = (1 + c_1(\xi) + c_2(\xi) + \dots)(1 - v),$$

так что соотношение (8) можно записать как $c_k(\xi) = 0$.

Аналогично, $H^*(\mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp))$ есть свободный $H^*(G_{k-1}(\mathbb{C}^N))$ -модуль с базисом $1, v, \dots, v^{N-k}$ и соотношением $c_{N-k+1}(\zeta) = 0$.

По предположению индукции, $H^*(G_{k-1}(\mathbb{C}^N))$ порождается классами $c_1(\gamma_N^{k-1}), \dots, c_{k-1}(\gamma_N^{k-1})$ с соотношениями $c_i((\gamma_N^{k-1})^\perp) = 0$ при $i > N - k + 1$. Следовательно, кольцо $H^*(\mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp)) = H^*(\mathbb{C}P(\gamma_N^k))$ порождается классами $c_i(\xi)$, $c_1(\gamma) = -v$ и $c_j(\zeta)$, а все соотношения между ними происходят из равенств $c(\xi \oplus \gamma \oplus \zeta) = 1$, $c_i(\xi) = 0$ при $i \geq k$ и $c_j(\zeta) = 0$ при $j \geq N - k + 1$, т. е. из тривиальности расслоения $\xi \oplus \gamma \oplus \zeta$ и размерности расслоений ξ, ζ . Это означает, что $H^*(\mathbb{C}P(\gamma_N^k))$ является свободным модулем над своим подкольцом R , порождённым классами $c_1(\xi \oplus \gamma), \dots, c_k(\xi \oplus \gamma)$, с базисом $1, v, \dots, v^{k-1}$. С другой стороны, при мономорфизме $p^*: H^*(G_k(\mathbb{C}^N)) \rightarrow H^*(\mathbb{C}P(\gamma_N^k))$ имеем $p^*(c_i(\gamma_N^k)) = c_i(\xi \oplus \gamma)$, так что $p^*(H^*(G_k(\mathbb{C}^N))) = R$ и $H^*(G_k(\mathbb{C}^N))$ порождается классами $c_1(\gamma_N^k), \dots, c_k(\gamma_N^k)$ с соотношениями, происходящими из размерности расслоения $(\gamma_N^k)^\perp$. $\square$

Теперь рассмотрим бесконечномерный грассманиан $BU(k) = G_k(\mathbb{C}^\infty)$.

Теорема 3.12. *Имеет место изоморфизм*

$$H^*(BU(k)) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k].$$

Доказательство. Рассмотрим композицию гомоморфизмов

$$\mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k] \rightarrow H^*(G_k(\mathbb{C}^\infty)) \rightarrow H^*(G_k(\mathbb{C}^N)) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k]/(c_j^\perp = 0 \text{ при } j > N - k).$$

Здесь первый гомоморфизм переводит c_i в $c_i(\gamma^k)$, второй индуцирован вложением $G_k(\mathbb{C}^N) \hookrightarrow G_k(\mathbb{C}^\infty)$, а третий — изоморфизм из теоремы 3.11. Грассманиан $G_k(\mathbb{C}^N)$ является клеточным подкомплексом в $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ относительно разбиения на клетки Шуберта (теорема 2.10), при этом $2(N-k)$ -мерные остовы $G_k(\mathbb{C}^N)$ и $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ совпадают (предложение 2.11). Поэтому второй гомоморфизм в композиции выше является изоморфизмом в размерностях $< 2(N-k)$. Вся композиция является изоморфизмом в размерностях $\leq 2(N-k)$, так как первое соотношение $c_j^\perp = 0$ появляется в размерности $2(N-k+1)$. Следовательно, первый гомоморфизм также является изоморфизмом в размерностях $< 2(N-k)$. Так как это верно для любого N , получаем, что $\mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k] \rightarrow H^*(G_k(\mathbb{C}^\infty))$ — изоморфизм. $\square$

Комплексное n -мерное расслоение ξ над клеточной базой B классифицируется отображением $f: B \rightarrow BU(n)$, и мы имеем $c_i(\xi) = f^*(c_i)$. В связи с этим классы $c_i \in H^{2i}(BU(n))$ называются *универсальными характеристическими классами Чженя*.

Следующее утверждение описывает флагизацию универсального (тавтологического расслоения) γ^n над $BU(n)$ и даёт геометрическую интерпретацию формальных переменных $t_1, \dots, t_n$ из принципа расщепления, см. (7).

Теорема 3.13.

- а) Мы имеем $Fl(\gamma^n) \simeq (\mathbb{C}P^\infty)^n$, причём проекция флагизации $Fl(\gamma^n) \rightarrow BU(n)$ гомотопна отображению $f: (\mathbb{C}P^\infty)^n \rightarrow BU(n)$, классифицирующему декартово произведение n экземпляров тавтологического расслоения γ^1 над $\mathbb{C}P^\infty$.
 б) Гомоморфизм $f^*: H^*(BU(n)) \rightarrow H^*((\mathbb{C}P^\infty)^n)$ имеет вид

$$\mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n] \rightarrow \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n], \quad c_i \mapsto \sigma_i(t_1, \dots, t_n),$$

т. е. переводит универсальный класс Чженя c_i в i -й симметрический многочлен от образующих $t_1, \dots, t_n$.

Доказательство. Точками пространства $Fl(\gamma^n)$ являются флаги длины n в $\mathbb{C}^\infty$, а точками пространства $(\mathbb{C}P^\infty)^n$ являются последовательности из n прямых в $(\mathbb{C}^\infty)^n \cong \mathbb{C}^\infty$. Взаимно обратные гомотопические эквивалентности $Fl(\gamma^n) \rightarrow (\mathbb{C}P^\infty)^n$ и $(\mathbb{C}P^\infty)^n \rightarrow Fl(\gamma^n)$ сопоставляют флагу набор прямых и обратно, аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 3.8. Подробности оставим в качестве задачи.

Докажем б). Пусть $p_i: (\mathbb{C}P^\infty)^n \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ — проекция на i -й сомножитель, $t = c_1(\gamma^1) \in H^2(\mathbb{C}P^\infty)$ и $t_i = p_i^*(t)$. Тогда $H^*((\mathbb{C}P^\infty)^n) = \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$ и $c((\gamma^1)^n) = (1 + t_1) \cdot \dots \cdot (1 + t_n)$. Имеем $f^*(c_i) = c_i(f^*\gamma^n) = c_i((\gamma^1)^n) = \sigma_i(t_1, \dots, t_n)$. $\square$

Аналоги всех результатов этого параграфа имеют место для классов Штифеля–Уитни и когомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$:

Теорема 3.14. *Имеют место изоморфизмы*

$$H^*(G_k(\mathbb{R}^N); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_k] / (w_j^\perp = 0 \text{ при } j > N - k),$$

$$H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_n].$$

3.5. Параллелизуемость вещественных проективных пространств. Алгебры с делением. Одним из приложений классов Штифеля–Уитни является доказательство несуществования алгебр с делением в размерностях, отличных от 2^k . Как мы увидим, этот вопрос непосредственно связан с параллелизуемостью вещественных проективных пространств.

Классами Штифеля–Уитни гладкого многообразия M будем называть классы Штифеля–Уитни его касательного расслоения: $w_i(M) = w_i(TM)$.

Предложение 3.15.

- а) $w(\mathbb{R}P^n) = (1 + t)^{n+1}$ в кольце $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t]/(t^{n+1})$;
 б) $w(\mathbb{R}P^n) = 1$ тогда и только тогда, когда $n = 2^k - 1$ для целого $k \geq 0$.

Доказательство. Согласно теореме 2.7, имеем $T\mathbb{R}P^n \oplus \mathbb{R} \cong \gamma^{\oplus(n+1)}$, откуда $w(\mathbb{R}P^n) = w(\gamma)^{n+1} = (1 + t)^{n+1}$, где $t = w_1(\gamma) \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ — первый класс Штифеля–Уитни тавтологического расслоения.

Докажем б). Пусть $n + 1 = 2^k$. Тогда $w(\mathbb{R}P^n) = (1 + t)^{2^k} = 1 + t^{2^k} = 1$ в кольце $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t]/(t^{n+1})$. Пусть теперь $n + 1 = 2^k \cdot m$, где $m > 1$ нечётно. Тогда $w(\mathbb{R}P^n) = (1 + t)^{2^k \cdot m} = (1 + t^{2^k})^m = 1 + mt^{2^k} + \dots \neq 1$, так как $t^{2^k} \neq 0$. $\square$

Напомним, что многообразие называется параллелизуемым, если его касательное расслоение тривиально.

Следствие 3.16. *Если $\mathbb{R}P^n$ параллелизуемо, то $n = 2^k - 1$ для целого $k \geq 0$.*

Теорема 3.17 (Штифель). *Предположим, что на $\mathbb{R}^n$ существует билинейное умножение $m: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ без делителей нуля (ассоциативность и существование единицы не предполагается). Тогда $\mathbb{R}P^{n-1}$ параллелизуемо, т. е. $n = 2^k$.*

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда $r_i: y \mapsto m(y, e_i)$ задаёт изоморфизм $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, так как умножение m без делителей нуля. Рассмотрим изоморфизмы $v_i = r_i \circ r_1^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$ линейно независимы при $x \neq 0$ и $v_1 = \text{id}$. Действительно, если $0 = \lambda_1 v_1(x) + \dots + \lambda_n v_n(x)$, то $0 = \lambda_1 r_1(y) + \dots + \lambda_n r_n(y) = m(y, \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)$, где $y = r_1^{-1}(x) \neq 0$, откуда $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$.

Рассмотрим теперь морфизмы расслоений

$$\tilde{v}_i: \gamma \rightarrow \gamma^\perp, \quad (\ell, x) \mapsto (\ell^\perp, \text{pr}_{\ell^\perp} v_i(x)),$$

где $x \in \ell \subset \mathbb{R}^n$, а $\text{pr}_{\ell^\perp} v_i(x)$ — проекция вектора $v_i(x)$ на $\ell^\perp$. Тогда $\text{pr}_{\ell^\perp} v_1(x) = 0$, а векторы $\text{pr}_{\ell^\perp} v_2(x), \dots, \text{pr}_{\ell^\perp} v_n(x)$ линейно независимы в $\ell^\perp$ при $x \neq 0$. Следовательно, $\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n$ суть $(n-1)$ линейно независимых сечений расслоения $\text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp) = \mathcal{T}\mathbb{R}P^{n-1}$. Поэтому это расслоение тривиально. $\square$

Пространства $\mathbb{R}P^0 = pt$, $\mathbb{R}P^1$, $\mathbb{R}P^3$ и $\mathbb{R}P^7$ параллелизуемы, так как на $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^8$ имеется билинейное умножение без делителей нуля (вещественные числа, комплексные числа, кватернионы и октонионы Кэли, соответственно). При $k \geq 4$ пространство $\mathbb{R}P^{2^k-1}$ не параллелизуемо, и поэтому других билинейных умножений без делителей нуля на $\mathbb{R}^n$ нет. Этот факт был доказан в 1960 году Дж. Адамсом методами алгебраической топологии.

3.6. Препятствия к вложениям и погружениям многообразий. Ещё одно приложение характеристических классов Штифеля–Уитни заключается в построении препятствий к вложениям и погружениям многообразий в евклидово пространство.

Напомним, что гладкое отображение гладких многообразий $f: M \rightarrow N$ называется *погружением* (обозначается $M \looparrowright N$), если его дифференциал $D_x f: \mathcal{T}_x M \rightarrow \mathcal{T}_{f(x)} N$ инъективен в каждой точке $x \in M$. Погружение $f: M \rightarrow N$ называется *вложением*, если оно является гомеоморфизмом на свой образ $f(M)$ (в топологии, индуцированной из N). Если M компактно, то погружение является вложением тогда и только тогда, когда оно инъективно.

Нормальное расслоение $\nu = \nu(M \looparrowright N)$ погружения $f: M \looparrowright N$ определяется как $(f^* \mathcal{T}N) / \mathcal{T}M$. Введя риманову метрику на $\mathcal{T}N$, слой расслоения $\nu(M \looparrowright N)$ в точке $x \in M$ можно отождествить с ортогональным дополнением к подпространству $D_x f(\mathcal{T}_x M)$ в $\mathcal{T}_{f(x)} N$. Имеет место разложение

$$f^* \mathcal{T}N \cong \mathcal{T}M \oplus \nu(M \looparrowright N).$$

Из дифференциальной геометрии известна

Теорема 3.18 (Уитни). *Гладкое компактное многообразие M размерности $n > 1$ можно вложить в $\mathbb{R}^{2n}$ и погрузить в $\mathbb{R}^{2n-1}$.*

Когда M^n можно погрузить в евклидово пространство меньшей размерности? Пусть задано погружение $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ с нормальным расслоением ν . Тогда мы имеем $\mathcal{T}M \oplus \nu = \underline{\mathbb{R}}^{n+k}$, откуда $w(M) \cdot w(\nu) = 1$. Мы будем обозначать характеристический класс $w(\nu)$ нормального расслоения через $w^\perp(M)$. Он зависит только от характеристических классов многообразия M , так как имеет место формула формального обращения

$$w^\perp(M) = 1 + w_1^\perp(M) + w_2^\perp(M) + \dots = \frac{1}{1 + w_1(M) + w_2(M) + \dots}$$

Например,

$$\begin{aligned} w_1^\perp(M) &= -w_1(M), & w_2^\perp(M) &= w_1^2(M) - w_2(M), \\ w_3^\perp(M) &= -w_1^3(M) + 2w_1(M)w_2(M) - w_3(M), \dots \end{aligned}$$

(при формальном обращении ряда некоторые слагаемые получают со знаком минус, как в формулах выше, но так как мы работаем с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$, эти знаки можно опустить). Так как расслоение $\nu = \nu(M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k})$ имеет размерность k , мы получаем $w_i^\perp(M) = 0$ при $i > k$. Это может давать ограничения на k .

Пример 3.19. Рассмотрим $M = \mathbb{R}P^9$. Тогда

$$w(\mathbb{R}P^9) = (1 + t)^{10} = 1 + t^2 + t^8, \quad w^\perp(\mathbb{R}P^9) = \frac{1}{1 + t^2 + t^8} = 1 + t^2 + t^4 + t^6.$$

Так как $w_6^\perp(\mathbb{R}P^9) \neq 0$, получаем, что $\mathbb{R}P^9$ нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{9+5} = \mathbb{R}^{14}$. Согласно теореме Уитни, $\mathbb{R}P^9$ погружается в $\mathbb{R}^{17}$.

В некоторых случаях оценка из теоремы Уитни оказывается точной.

Теорема 3.20 (Милнор). *Многообразие $\mathbb{R}P^{2^k}$ нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{2^{k+1}-2}$.*

Доказательство. Мы имеем

$$\begin{aligned} w(\mathbb{R}P^{2^k}) &= (1 + t)^{2^{k+1}} = (1 + t)^{2^k} (1 + t) = (1 + t^{2^k})(1 + t) = 1 + t + t^{2^k}, \\ w^\perp(\mathbb{R}P^{2^k}) &= 1 + t + t^2 + \dots + t^{2^k-1}. \end{aligned}$$

Предположим, что существует погружение $\mathbb{R}P^{2^k} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2^{k+1}-2}$. Тогда его нормальное расслоение ν имеет размерность $2^{k+1} - 2 - 2^k = 2^k - 2$. Но $w_{2^k-1}(\nu) = w_{2^k-1}^\perp(\mathbb{R}P^{2^k}) = t^{2^k-1} \neq 0$. Противоречие. $\square$

Сравнивая с примером 3.19, получаем, что не только $\mathbb{R}P^9$, но даже $\mathbb{R}P^8$ нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{14}$. В общем случае нахождение минимальной размерности погружения проективного пространства $\mathbb{R}P^n$ является трудной задачей, которая полностью не решена до сих пор.

Задачи и упражнения.

3.21. Пусть ξ, γ — комплексные векторные расслоения над клеточным пространством B , причём γ одномерно. Докажите, что расслоения $\mathbb{C}P(\xi \otimes \gamma)$ и $\mathbb{C}P(\xi)$ изоморфны. То же для вещественных векторных расслоений и проективизаций.

3.22. Рассмотрим отображение $q: \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n / \mathbb{C}P^{n-1} \cong S^{2n}$. Докажите, что $q^*\alpha = v^n$, где $\alpha \in H^{2n}(S^{2n})$ — стандартная образующая, происходящая из ориентации $\mathbb{C}P^n$, а $v \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к $[\mathbb{C}P^{n-1}] \in H_{2n-2}(\mathbb{C}P^n)$.

3.23. Докажите следующую относительную версию теоремы Лере–Хирша. Пусть дана пара локально тривиальных расслоений $(F, F') \xrightarrow{i} (E, E') \xrightarrow{p} B$ над одной базой B . Предположим, что

- 1) $H^k(F, F'; R)$ — конечно-порождённый свободный R -модуль для любого k ;
- 2) существуют классы $v_j \in H^*(E, E'; R)$, такие что их ограничения $i^*(v_j)$ на любой слой (F, F') дают R -базис в $H^*(F, F'; R)$.

Тогда $H^*(E, E'; R)$ является свободным $H^*(B; R)$ -модулем с базисом $\{v_j\}$.

3.24. Приведите пример локально тривиального расслоения $E \rightarrow B$, для которого

- а) не выполнено второе из условий теоремы Лере–Хирша (т.е. $H^*(F; R)$ является конечно порождённым свободным R -модулем, но не существует набора классов в $H^*(E; R)$, которые ограничиваются на базис в коомологиях слоя);
- б) выполнены условия теоремы Лере–Хирша, но отсутствует изоморфизм колец $H^*(E; R) \cong H^*(B; R) \otimes H^*(F; R)$.

3.25. Докажите, что для колец коомологий унитарной и специальной унитарной групп имеют место изоморфизмы:

$$H^*(U(n); \mathbb{Z}) \cong \Lambda[u_1, u_2, \dots, u_n], \quad H^*(SU(n); \mathbb{Z}) \cong \Lambda[u_2, \dots, u_n], \quad \dim u_i = 2i - 1$$

(справа стоят внешние алгебры от нечётномерных образующих). *Указание:* используйте расслоение $U(n-1) \rightarrow U(n) \rightarrow S^{2n-1}$ и теорему Лере–Хирша. Что можно сказать о коомологиях группы $O(n)$, используя тот же метод?

3.26. Вычислите

- а) кольцо коомологий многообразия $L(n, m) = \mathbb{C}P(\gamma \oplus \underline{\mathbb{C}}^m)$, где γ — тавтологическое одномерное расслоение над $\mathbb{C}P^n$, а $\underline{\mathbb{C}}^m$ — тривиальное m -мерное расслоение над $\mathbb{C}P^n$;
- б) кольцо коомологий многообразия $\mathbb{C}P(\gamma^{\otimes i_1} \oplus \dots \oplus \gamma^{\otimes i_k})$ для произвольных целых чисел $i_1, \dots, i_k$;
- в) полный характеристический класс Чжэня касательного расслоения многообразия $\mathbb{C}P(\gamma^{\otimes i_1} \oplus \dots \oplus \gamma^{\otimes i_k})$.

3.27. Пусть $0 \leq k \leq l$ — натуральные числа. Определим многообразие Милнора

$$H_{kl} = \{([z_0 : \dots : z_k], [w_0 : \dots : w_l]) \in \mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l : z_0 w_0 + \dots + z_k w_k = 0\}.$$

- а) Докажите, что H_{kl} является сечением образа вложения Серге

$$\mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l \hookrightarrow \mathbb{C}P^{(k+1)(l+1)-1},$$

$$([z_0 : \dots : z_k], [w_0 : \dots : w_l]) \mapsto [z_0 w_0 : \dots : z_i w_j : \dots : z_k w_l]$$

гиперплоскостью $H \subset \mathbb{C}P^{(k+1)(l+1)-1}$ общего положения.

- б) Вычислите кольцо коомологий многообразия H_{ij} .

3.28. Пусть ξ — m -мерное, а η — n -мерное комплексные расслоения. Пользуясь принципом расщепления, выразите классы Чжэня $c_2(\xi \otimes \eta)$, $c_1(S^2 \xi)$, $c_2(S^2 \xi)$, $c_1(\Lambda^2 \xi)$, $c_2(\Lambda^2 \xi)$ через классы Чжэня расслоений ξ и η . Здесь $S^i \xi$ обозначает i -симметрическую степень расслоения ξ , а $\Lambda^i \xi$ обозначает i -ю внешнюю степень.

3.29. Запишем $c_i(\xi) = \sigma_i(x_1, \dots, x_n)$ (i -я симметрическая функция формальных переменных). Докажите, что полные классы Чженя симметрической и внешней степени расслоения ξ выражаются по формулам

$$c(\Lambda^k \xi) = \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (1 + (x_{i_1} + \dots + x_{i_k})), \quad c(S^k \xi) = \prod_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} (1 + (x_{i_1} + \dots + x_{i_k})).$$

3.30. Задайте в явном виде образующими и соотношениями кольца целочисленных когомологий грассманианов $G_2(\mathbb{C}^4)$, $G_2(\mathbb{C}^5)$, $G_3(\mathbb{C}^5)$.

3.31. Докажите, что $Fl(\gamma^n) \simeq (\mathbb{C}P^\infty)^n$, причём проекция флагизации $Fl(\gamma^n) \rightarrow BU(n)$ гомотопна отображению $f: (\mathbb{C}P^\infty)^n \rightarrow BU(n)$, классифицирующему декартово произведение n экземпляров тавтологического расслоения γ^1 над $\mathbb{C}P^\infty$.

3.32. Докажите, что числа Бетти (ранги групп целочисленных гомологий) многообразия флагов $Fl(\mathbb{C}^n)$ удовлетворяют соотношениям $\beta_{2i+1}(Fl(\mathbb{C}^n)) = 0$ и

$$\sum_i \beta_{2i}(Fl(\mathbb{C}^n)) t^{2i} = \prod_{i=1}^{n-1} (1 + t^2 + \dots + t^{2i}).$$

3.33. Докажите, что кольцо когомологий многообразия флагов $Fl(\mathbb{C}^n)$ описывается следующим образом:

$$H^*(Fl(\mathbb{C}^n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] / (\sigma_1, \dots, \sigma_n),$$

где $\dim t_i = 2$, а σ_i есть i -я элементарная симметрическая функция от $t_1, \dots, t_n$.

3.34. Пусть ξ — вещественное векторное расслоение. Докажите, что если $w(\xi) \neq 1$, то число $\min\{i: w_i(\xi) \neq 0\}$ есть степень двойки.

3.35. Докажите, что для комплексного расслоения ξ число $\min\{i: c_i(\xi) \neq 0\}$ может быть любым.

3.36. Пусть γ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^\infty$. Докажите, что не существует векторного расслоения ζ над $\mathbb{R}P^\infty$ такого, что $\gamma \oplus \zeta$ тривиально.

3.37. Докажите, что если многообразие M^n можно погрузить в $\mathbb{R}^{n+1}$, то каждый класс $w_i(M)$ является степенью класса $w_1(M)$.

4. КЛАСС ЭЙЛЕРА И КЛАСС ТОМА

4.1. Ориентируемые векторные расслоения. Рассмотрим вещественное векторное n -мерное расслоение ξ , заданное проекцией $p: E \rightarrow B$ с тривиализующим покрытием $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$, тривиализациями $\varphi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ и отображениями перехода $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$.

Выбор ориентации в слое $E_x = p^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^n$ над точкой $x \in B$ эквивалентен выбору одной из двух образующих группы $H_n(E_x, E_x \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$. В связи с этим будем называть образующую $\mu_x \in H_n(E_x, E_x \setminus \{0\})$ *ориентацией* слоя E_x . Для группы $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ (соответствующей слою тривиального расслоения) имеется канонический выбор образующей $\mu_0 \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, которая задаётся сингулярным симплексом $[v_0, \dots, v_n] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с вершинами $v_0 = -e_1 - \dots - e_n$, $v_1 = e_1, \dots, v_n = e_n$, где $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

Выбор ориентаций $\mu_x \in H_n(E_x, E_x \setminus \{0\})$ в каждом слое расслоения ξ называется *согласованным* относительно открытого покрытия $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ с тривиализациями $\varphi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, если для любых U_α и $x \in U_\alpha$ изоморфизм

$$(9) \quad H_n(E_x, E_x \setminus \{0\}) \xrightarrow{(\varphi_\alpha|_{E_x})^*} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

переводит μ_x в μ_0 .

Векторное расслоение ξ называется *ориентируемым*, если существует открытое покрытие $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ с тривиализациями $\varphi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ и согласованный выбор ориентаций $\mu_x \in H_n(E_x, E_x \setminus \{0\})$, $x \in B$, относительно этого покрытия.

Предложение 4.1. *Вещественное векторное n -мерное расслоение ξ ориентируемо тогда и только тогда, когда оно допускает тривиализующее покрытие $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ с отображениями перехода $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL^+(n, \mathbb{R})$, где $GL^+(n, \mathbb{R})$ — группа невырожденных матриц с положительным определителем.*

Доказательство. Если ξ ориентируемо, то из (9) получаем, что для любого $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ гомоморфизм

$$g_{\alpha\beta}(x)_* = ((\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})|_{x \times \mathbb{R}^n})_*: H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow H_n(E_x, E_x \setminus \{0\}) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

переводит μ_0 в μ_0 , а значит линейный изоморфизм $g_{\alpha\beta}(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ сохраняет ориентацию, т. е. имеет положительный определитель. Обратно, если $g_{\alpha\beta}(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет положительный определитель для любого $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, то $\mu_x := (\varphi_\alpha^{-1}|_{E_x})_* \mu_0$ задаёт согласованный выбор ориентаций в слоях. $\square$

Если M — гладкое многообразие, то группа локальных гомологий $H_n(M, M \setminus x)$, используемая в определении ориентации на M , отождествляется с группой $H_n(\mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \setminus \{0\})$ при помощи экспоненциального отображения $\mathcal{T}_x M \rightarrow M$, которое является диффеоморфизмом в окрестности точки $x \in M$. Отсюда получаем

Предложение 4.2. *Пусть M — гладкое n -мерное многообразие. Следующие условия эквивалентны:*

- 1) *многообразие M ориентируемо;*
- 2) *касательное расслоение $\mathcal{T}M$ ориентируемо;*
- 3) *существует гладкий атлас $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $\varphi_\alpha: U_\alpha \xrightarrow{\cong} V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, для которого отображения замены координат $\psi_{\alpha\beta}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ удовлетворяют условию $\det \text{Jac}_x \psi_{\alpha\beta} > 0$ для любого $x \in M$.*

4.2. Класс Тома и изоморфизм Тома. Ориентацию в слое вещественного расслоения ξ можно также задавать выбором образующей $\theta_x \in H^n(E_x, E_x \setminus \{0\})$ в группе когомологий (это удобно, например, при работе с когомологиями де Рама). При этом условие согласованности ориентаций разных слоёв получается очевидной дуализацией формулы (9).

Теорема 4.3. *Пусть ξ — вещественное ориентируемое векторное n -мерное расслоение ξ , заданное проекцией $p: E \rightarrow B$, с согласованно выбранными ориентациями слоёв $\theta_x \in H^n(E_x, E_x \setminus \{0\})$. Тогда*

- a) *существует единственный класс когомологий $\theta \in H^n(E, E \setminus B)$, ограничение которого на $H^n(E_x, E_x \setminus \{0\})$ есть θ_x для любого $x \in B$;*

б) умножение на класс θ задаёт изоморфизмы

$$H^k(B) \cong H^k(E) \xrightarrow{\sim \theta} H^{k+n}(E, E \setminus B), \quad H_{k+n}(E, E \setminus B) \xrightarrow{\sim \theta} H_k(E) \cong H_k(B)$$

для любого k .

Класс $\theta \in H^n(E, E \setminus B)$, задаваемый условием а), называется *классом Тома* расслоения ξ , а изоморфизмы из утверждения б) называются *изоморфизмами Тома*.

В доказательстве теоремы используется следующая алгебраическая конструкция обратного предела, двойственного к прямому пределу.

Конструкция 4.4 (обратный предел групп). Рассмотрим диаграмму $D = \{G_\alpha : \alpha \in P\}$ абелевых групп G_α и гомоморфизмов $f_{\alpha\beta} : G_\alpha \rightarrow G_\beta$, индексированных частично упорядоченным множеством $(P, \leq)$ (см. конструкцию 1.10).

Обратным пределом или просто *пределом* диаграммы D абелевых групп называется подгруппа прямого произведения $\prod_{\alpha \in P} G_\alpha$, состоящая из функций выбора ($\alpha \mapsto g_\alpha \in G_\alpha$), таких что $f_{\alpha\beta}(g_\alpha) = g_\beta$ при $\alpha \leq \beta$. Обозначается $\lim D$ или $\varprojlim G_\alpha$.

Определены канонические гомоморфизмы $p_\alpha : \varprojlim G_\alpha \rightarrow G_\alpha$, удовлетворяющие соотношениям $f_{\alpha\beta} p_\alpha = p_\beta$ при $\alpha \leq \beta$.

Если в P существует наименьший элемент μ , то $\varprojlim G_\alpha = G_\mu$. Если никакие два различных элемента в P не находятся в отношении порядка, то $\varprojlim G_\alpha = \prod_{\alpha \in P} G_\alpha$.

Предложение 4.5 (универсальное свойство обратного предела). Пусть $D = \{G_\alpha : \alpha \in P\}$ — диаграмма абелевых групп, индексированная частично упорядоченным множеством P . Предположим, что заданы гомоморфизмы $h_\alpha : H \rightarrow G_\alpha$, удовлетворяющие соотношениям $f_{\alpha\beta} h_\alpha = h_\beta$ при $\alpha \leq \beta$. Тогда существует единственный гомоморфизм $h : H \rightarrow \varprojlim G_\alpha$, такой что $p_\alpha h = h_\alpha$:

$$\begin{array}{ccc}
 & & G_\alpha \\
 & \nearrow h_\alpha & \uparrow p_\alpha \\
 H & \xrightarrow{h} \varprojlim G_\alpha & \\
 & \searrow h_\beta & \downarrow p_\beta \\
 & & G_\beta
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 \downarrow f_{\alpha\beta}
 \end{array}$$

Доказательство. Гомоморфизм h переводит $a \in H$ в функцию ($\alpha \mapsto h_\alpha(a)$). □

Из определений прямого и обратного предела вытекает, что гомоморфизм

$$\text{Hom}(\varprojlim G_\alpha, H) \rightarrow \varprojlim \text{Hom}(G_\alpha, H),$$

получаемый из универсальных свойств, является изоморфизмом для любой абелевой группы H (задача).

Универсальное свойство выше определяет предел диаграммы $D : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$ для произвольной категории $\mathcal{C}$. Конструкция 4.4 показывает, что пределы существуют в категории абелевых групп. Пределы диаграмм также существуют в категории топологических пространств.

Доказательство теоремы 4.3. Введём обозначение $E_0 = E \setminus B$. Мы докажем когомологический изоморфизм Тома; доказательство для гомологий аналогично. Доказательство разобьём на четыре шага.

Шаг 1. Расслоение ξ тривиально. Пусть $E = B \times \mathbb{R}^n$. Имеем образующие $1 \in H^0(B)$ и $\theta_0 \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Тогда $H^n(E, E_0) = H^n(B \times \mathbb{R}^n, B \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ и $\theta = 1 \times \theta_0$ есть требуемый класс.

Шаг 2. Предположим, что $B = B' \cup B''$, где B', B'' открыты, и теорема верна для $\xi|_{B'}, \xi|_{B''}$ и $\xi|_{B' \cap B''}$; докажем теорему для ξ . Обозначим $B^\cap = B' \cap B''$ и $E^\cap = E' \cap E''$. Рассмотрим следующую диаграмму отображений между последовательностями Майера–Виеториса:

$$\begin{array}{ccccccc} H^{k-1}(E^\cap) & \longrightarrow & H^k(E) & \longrightarrow & H^k(E') \oplus H^k(E'') & \longrightarrow & H^k(E^\cap) \\ \cong \downarrow \cdot \theta^\cap & & ? \downarrow \cdot \theta & & \cong \downarrow \cdot \theta' \oplus \theta'' & & \cong \downarrow \cdot \theta^\cap \\ H^{k-1+n}(E^\cap, E_0^\cap) & \longrightarrow & H^{k+n}(E, E_0) & \longrightarrow & H^{k+n}(E', E'_0) \oplus H^{k+n}(E'', E''_0) & \longrightarrow & H^{k+n}(E^\cap, E_0^\cap) \end{array}$$

По предположению существуют и единственны классы $\theta^\cap \in H^n(E^\cap, E_0^\cap)$, $\theta' \in H^n(E', E'_0)$, $\theta'' \in H^n(E'', E''_0)$. Ограничения классов θ' и θ'' на $H^n(E^\cap, E_0^\cap)$ обладают свойством из утверждения а) теоремы для $\theta^\cap$. Поэтому, в силу единственности, θ' и θ'' при ограничении переходят в $\theta^\cap$. Из точности последовательности Майера–Виеториса следует, что θ' и θ'' являются образами некоторого класса $\theta \in H^n(E, E_0)$. Этот класс определён однозначно, так как $H^{n-1}(E^\cap, E_0^\cap) = 0$ в силу утверждения б) теоремы для расслоения $\xi^\cap$. Тогда умножение на θ задаёт гомоморфизм $H^k(E) \xrightarrow{\theta} H^{k+n}(E, E_0)$, входящий в коммутативную диаграмму выше (в силу естественности умножения в когомологиях). Этот гомоморфизм является изоморфизмом согласно 5-лемме.

Шаг 3. Существует конечное тривиализующее покрытие $B = U_1 \cup \dots \cup U_m$ (например, B компактно). Будем вести индукцию по m . База индукции $m = 1$ — это шаг 1. Индукционный переход — применяем шаг 2 к расслоениям $\xi|_{U_1 \cup \dots \cup U_{m-1}}$, $\xi|_{U_m}$ и $\xi|_{(U_1 \cup \dots \cup U_{m-1}) \cap U_m} = \xi|_{(U_1 \cap U_m) \cup \dots \cup (U_{m-1} \cap U_m)}$.

Шаг 4. Общий случай. Представим B в виде объединения компактных подмножеств $C \subset B$. Мы имеем $\varinjlim H_k(C) = H_k(B)$, так как образ любого сингулярного симплекса содержится в компактном подмножестве (см. также задачу 1.25). Однако, естественный гомоморфизм $H^k(B) \rightarrow \varprojlim H^k(C)$, вообще говоря, не является изоморфизмом. Тем не менее, мы докажем изоморфизм

$$(10) \quad H^n(E, E \setminus B) \cong \varprojlim H^n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C).$$

Для этого вначале заметим, что $H_{n-1}(E, E \setminus B) = 0$. Действительно, для компактной базы B это вытекает из гомологического изоморфизма Тома $H_{n-1}(E, E \setminus B) \cong H_{-1}(B) = 0$, установленного на шаге 3, а в общем случае имеем

$$H_{n-1}(E, E \setminus B) = \varinjlim H_{n-1}(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C) = 0.$$

Далее, из формул универсальных коэффициентов получаем

$$\begin{aligned} H^n(E, E \setminus B) &\cong \text{Hom}(H_n(E, E \setminus B), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_{n-1}(E, E \setminus B), \mathbb{Z}) = \\ &= \text{Hom}(H_n(E, E \setminus B), \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\varinjlim H_n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C), \mathbb{Z}) \cong \\ &\cong \varprojlim \text{Hom}(H_n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C), \mathbb{Z}) \cong \varprojlim H^n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C). \end{aligned}$$

Тогда требуемый класс $\theta \in H^n(E, E \setminus B)$ соответствует при изоморфизме (10) элементу обратного предела, задаваемому классами $\theta_C \in H^n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C)$, которые

существуют, единственны и обладают свойством из утверждения а) теоремы согласно шагу 3.

Осталось установить изоморфизм Тома (утверждение б) теоремы) в общем случае. Для этого применим относительный вариант теоремы Лере–Хирша (задача 3.23) к паре расслоений $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow (E, E \setminus B) \rightarrow B$. Другой способ доказательства изоморфизма заключается в следующем. Вначале рассмотрим когомологии с коэффициентами в поле F . В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} H^k(E; F) & \xrightarrow{\sim \theta} & H^{k+n}(E, E \setminus B; F) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \varprojlim H^k(p^{-1}(C); F) & \xrightarrow[\cong]{\sim \theta_C} & \varprojlim H^{k+n}(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C; F) \end{array}$$

вертикальные стрелки являются изоморфизмами согласно формуле универсальных коэффициентов (как при доказательстве изоморфизма (10)), а нижняя стрелка является изоморфизмом согласно шагу 3. Следовательно, верхняя стрелка также является изоморфизмом. Далее, можно доказать (задача), что если гомоморфизм $H^k(E; F) \xrightarrow{\sim \theta} H^{k+n}(E, E \setminus B; F)$ является изоморфизмом для любого поля F , то он также является изоморфизмом с целыми коэффициентами. $\square$

Введём на векторном расслоении ξ евклидову метрику. Пусть $D\xi$ — пространство векторов длины ≤ 1 в слоях расслоения ξ , а $S\xi \subset D\xi$ — подпространство векторов длины 1. Тогда $D\xi \rightarrow B$ — локально тривиальное расслоение со слоем D^n , а $S\xi \rightarrow B$ — расслоение со слоем S^{n-1} .

Факторпространство $Th \xi = D\xi/S\xi$ называется *пространством Тома* расслоения ξ . Мы имеем

$$H^*(E, E \setminus B) \cong H^*(D\xi, D\xi \setminus B) \cong H^*(D\xi, S\xi) \cong \tilde{H}^*(Th \xi),$$

а изоморфизм Тома приобретает вид

$$H^k(B) \xrightarrow[\cong]{\sim \theta} \tilde{H}^{k+n}(Th \xi), \quad \theta \in H^n(Th \xi).$$

Пример 4.6.

1. Если ξ — тривиальное расслоение $\mathbb{R}^k \rightarrow pt$ над точкой, то $Th \xi = S^k$.
2. Если ξ — нульмерное расслоение $B \rightarrow B$, то $Th \xi = B_+ = B \sqcup pt$.
3. Имеем $Th(\xi \oplus \mathbb{R}^k) \cong \Sigma^k Th \xi$ (k -кратная надстройка, задача).
4. Из предыдущих примеров получаем $Th(\mathbb{R}^k) \cong (\Sigma^k B) \vee S^k$.
5. Если γ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^n$, то $Th \gamma \cong \mathbb{R}P^{n+1}$ (задача). Аналогично для $\mathbb{C}P^n$.

4.3. Определение класса Эйлера, его свойства. Пусть ξ — ориентированное n -мерное расслоение $p: E \rightarrow B$. Образ класса Тома $\theta(\xi) \in H^n(E, E \setminus B)$ при гомоморфизме

$$H^n(E, E \setminus B) \rightarrow H^n(E) \xrightarrow{\cong} H^n(B)$$

называется *классом Эйлера* ориентированного векторного расслоения ξ и обозначается $e(\xi) \in H^n(B)$.

Свойства класса Эйлера описываются следующей теоремой.

Теорема 4.7. *Имеем*

- а) $e(f^*\xi) = f^*e(\xi)$, где $f^*\xi$ — расслоение, индуцированное отображением $f: B' \rightarrow B$;
- б) если $\tilde{\xi}$ — расслоение ξ с противоположной ориентацией, то $e(\tilde{\xi}) = -e(\xi)$;
- в) если размерность ξ нечётна, то $2e(\xi) = 0$;
- г) $e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi')$ и $e(\xi \oplus \xi') = e(\xi) \smile e(\xi')$;
- д) если ξ допускает всюду ненулевое сечение, то $e(\xi) = 0$.

Доказательство. Свойство а) следует из функториальности класса Тома, а б) следует из определения.

Если размерность слоя нечётна, то отображение $E\xi \rightarrow E\xi$, $v \mapsto -v$, задаёт обра-щающий ориентацию изоморфизм расслоения, т. е. изоморфизм ориентированных расслоений $\xi \xrightarrow{\cong} \tilde{\xi}$. Тогда $e(\tilde{\xi}) = e(\xi)$ из свойства а) и $e(\tilde{\xi}) = -e(\xi)$ из свойства б), откуда следует свойство в).

Заметим, что $\theta(\xi \times \xi') = \theta(\xi) \times \theta(\xi') \in H^{n+n'}(E \times E', E \times E' \setminus B \times B')$, откуда получаем $e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi')$. Далее, рассмотрим диагональ $\Delta: B \rightarrow B \times B$, тогда $\xi \oplus \xi' = \Delta^*(\xi \times \xi')$ и $e(\xi \oplus \xi') = \Delta^*(e(\xi) \times e(\xi')) = e(\xi) \smile e(\xi')$. Свойство г) доказано.

Докажем д). Ненулевое сечение $s: B \rightarrow E \setminus B$ даёт разложение тождественного отображения $B \rightarrow B$ в композицию $B \xrightarrow{s} E \setminus B \rightarrow E \xrightarrow{p} B$. Таким образом композиция в верхней строке является тождественным изоморфизмом:

$$\begin{array}{ccccccc} H^n(B) & \xrightarrow{p^*} & H^n(E) & \rightarrow & H^n(E \setminus B) & \xrightarrow{s^*} & H^n(B), \\ e(\xi) & \mapsto & \theta(\xi)|_E & \mapsto & 0 & \mapsto & 0. \end{array}$$

Здесь $\theta(\xi)|_E$ обозначает образ класса Тома при гомоморфизме $H^n(E, E \setminus B) \rightarrow H^n(E)$, и он переходит в нуль при гомоморфизме $H^n(E) \rightarrow H^n(E \setminus B)$, так как композиция $H^n(E, E \setminus B) \rightarrow H^n(E) \rightarrow H^n(E \setminus B)$ является нулевой (из точной последовательности пары $(E, E \setminus B)$). Отсюда $e(\xi) = 0$.

По-другому свойство д) можно установить, введя метрику на расслоении ξ . Тогда ненулевое сечение даёт разложение $\xi = \xi' \oplus \mathbb{R}$, откуда из свойства г) получаем $e(\xi) = e(\xi') \smile e(\mathbb{R}) = 0$. $\square$

Можно также определить понятие *R-ориентируемого* векторного расслоения для любого коммутативного кольца R с единицей. Теорема 4.3 имеет место для *R-ориентируемого* расслоения ξ и даёт класс Тома $\theta(\xi) \in H^n(E, E \setminus B; R)$. Как и для *R-ориентируемых* многообразий, интерес представляют лишь случаи $R = \mathbb{Z}$ и $R = \mathbb{Z}_2$. Следующее утверждение показывает, что « $\mathbb{Z}_2$ -аналогом» класса Эйлера является старший класс Штифеля–Уитни.

Предложение 4.8. Пусть ξ — n -мерное векторное расслоение $p: E \rightarrow B$. Образ класса Тома $\theta(\xi) \in H^n(E, E \setminus B; \mathbb{Z}_2)$ при гомоморфизме

$$H^n(E, E \setminus B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(E; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^n(B; \mathbb{Z}_2)$$

есть класс Штифеля–Уитни $w_n(\xi)$. Если расслоение ξ ориентировано, то класс $w_n(\xi)$ получается из класса Эйлера $e(\xi)$ приведением по модулю 2.

Доказательство. Оба утверждения вытекают из сравнения свойств классов Эйлера и Штифеля–Уитни (теоремы 3.4 и 4.7) и единственности классов Штифеля–Уитни (теорема 3.9). Детали остаются в качестве задачи. $\square$

4.4. Связь с двойственностью Пуанкаре и эйлеровой характеристикой. Пусть M — гладкое m -мерное подмногообразие в гладком n -мерном многообразии N . Имеет место следующая теорема о трубчатой окрестности, которая доказывается при помощи экспоненциального отображения $\mathcal{T}N \rightarrow N$; это доказательство можно найти в книгах [Je] и [MC].

Теорема 4.9. *Существует окрестность U подмногообразия M в N , диффеоморфная пространству $E\nu$ нормального расслоения $\nu(M \subset N)$, причём диффеоморфизм переводит M в нулевое сечение расслоения M .*

Предложение 4.10. *Пусть подмногообразие M замкнуто в N . Тогда имеет место канонический изоморфизм $H^k(E\nu, E\nu \setminus M) \cong H^k(N, N \setminus M)$. Таким образом если нормальное расслоение $\nu(M \subset N)$ ориентировано, то его класс Тома можно рассматривать как элемент $\theta(\nu) \in H^{n-m}(N, N \setminus M)$. При этом класс Эйлера $e(\nu)$ является образом класса Тома при композиции*

$$H^{n-m}(N, N \setminus M) \xrightarrow{j^*} H^{n-m}(N) \xrightarrow{i^*} H^{n-m}(M),$$

где гомоморфизм j^* индуцирован отображением пар $j: (N, \emptyset) \rightarrow (N, N \setminus M)$, а i^* индуцирован вложением $i: M \rightarrow N$.

Аналогичное утверждение верно для $\mathbb{Z}_2$ -класса Тома $\theta(\nu) \in H^{n-m}(N, N \setminus M; \mathbb{Z}_2)$ и класса Штифеля–Уитни $w_{n-m}(\nu) \in H^{n-m}(M; \mathbb{Z}_2)$.

Доказательство. Пусть $U \cong E\nu$ — окрестность M из теоремы 4.9. Рассмотрим открытое покрытие $N = U \cup (N \setminus M)$. Тогда из вырезания и теоремы 4.9 получаем

$$H^k(N, N \setminus M) \xrightarrow{\cong} H^k(U, U \setminus M) \cong H^k(E\nu, E\nu \setminus M).$$

Утверждение о классе Эйлера вытекает из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} H^{n-m}(N, N \setminus M) & \xrightarrow{j^*} & H^{n-m}(N) & & \\ \cong \downarrow & & \downarrow & \searrow i^* & \\ H^{n-m}(E\nu, E\nu \setminus M) & \longrightarrow & H^{n-m}(E\nu) & \longrightarrow & H^{n-m}(M). \end{array}$$

Утверждение для класса Штифеля–Уитни доказывается аналогично. $\square$

Следствие 4.11. *Если замкнутое m -мерное многообразие M гладко вложено в $\mathbb{R}^{m+k}$, то $w_k(\nu) = 0$. Если M ориентуемо, то $e(\nu) = 0$.*

Теорема 4.12. *Многообразие $\mathbb{R}P^{2^k}$ нельзя гладко вложить в $\mathbb{R}^{2^{k+1}-1}$.*

Доказательство. Предположим, такое вложение существует. Тогда из вычисления в теореме 3.20 получаем $w_{2^k-1}(\nu) = t^{2^k-1} \neq 0$. Противоречие. $\square$

Если $i: M \hookrightarrow N$ — вложение замкнутого ориентированного подмногообразия в замкнутом ориентированном многообразии N , то изоморфизм

$$(11) \quad i^*\mathcal{T}N \cong \nu(M \subset N) \oplus \mathcal{T}M$$

задаёт ориентацию нормального расслоения ν .

Предложение 4.13. *Пусть $i: M \hookrightarrow N$ — вложение замкнутого ориентированного подмногообразия в замкнутом ориентированном многообразии N с нормальным расслоением ν и $j: (N, \emptyset) \rightarrow (N, N \setminus M)$. Тогда класс $j^*\theta(\nu) \in H^{n-m}(N)$ двойствен по Пуанкаре к $i_*[M] \in H_m(N)$.*

Доказательство. Пусть $U \cong E\nu$ — окрестность M из теоремы 4.9. Согласно лемме 1.4 для ориентированного n -мерного многообразия U и компактного подмножества $M \subset U$ существует единственный класс $\mu_M \in H_n(U, U \setminus M)$, который при ограничении переходит в локальную ориентацию $\mu_x \in H_n(U, U \setminus x) \cong \mathbb{Z}$ для любой точки $x \in M$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} H^{n-m}(N, N \setminus M) & \xrightarrow[\cong]{\ell^*} & H^{n-m}(U, U \setminus M) & \xrightarrow{\mu_M \frown} & H_m(U) & \xrightarrow[\cong]{} & H_m(M) \\ j_* \downarrow & & & & \searrow \ell_* & & \downarrow i_* \\ H^{n-m}(N) & \xrightarrow[\cong]{[N] \frown} & & & & & H_m(N). \end{array}$$

Здесь ℓ^* индуцирован отображением пар $\ell: (U, U \setminus M) \rightarrow (N, N \setminus M)$ и является изоморфизмом согласно вырезанию. Изоморфизм $H_m(U) \xrightarrow[\cong]{} H_m(M)$ индуцирован деформационной ретракцией $U \rightarrow M$. В нижней строке стоит изоморфизм двойственности Пуанкаре. Диаграмма коммутативна, так как для $\varphi \in H^{n-m}(N, N \setminus M)$ имеем

$$\ell_*(\mu_M \frown \ell^*\varphi) = \ell_*(\mu_M) \frown \varphi = j_*[N] \frown \varphi = [N] \frown j^*\varphi,$$

где первое и третье равенство следуют из леммы 1.8, а второе — из определения фундаментального класса. Положив $\varphi = \theta(\nu)$ в равенстве выше, получим, что двойственным по Пуанкаре классом к $j^*\theta(\nu)$ является $\ell_*(\mu_M \frown \ell^*\theta(\nu))$. Требуемое равенство $[N] \frown j^*\theta(\nu) = i_*[M]$ будет доказано, если мы проверим, что класс Тома $\theta(\nu)$ переходит в фундаментальный класс $[M]$ при композиции гомоморфизмов в верхней строке диаграммы. Это достаточно проверить для ограничений $\theta_x \in H^{n-m}(E\nu_x, E\nu_x \setminus 0)$ и $\mu_x^M \in H_m(M, M \setminus x)$ на любую точку $x \in M$, в силу единственности класса Тома и фундаментального класса. При изоморфизмах

$$H^{n-m}(E\nu_x, E\nu_x \setminus 0) \cong H^{n-m}(\mathcal{T}_x N, \mathcal{T}_x N \setminus \mathcal{T}_x M) \cong H^{n-m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{Z},$$

задаваемых разложением (11) и ориентациями, элемент θ_x переходит в каноническую образующую $\theta_0 \in H^{n-m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{Z}$. Аналогично, при изоморфизмах

$$H_n(N, N \setminus x) \cong H_n(\mathcal{T}_x N, \mathcal{T}_x N \setminus 0) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \cong \mathbb{Z}$$

класс локальной ориентации μ_x^N переходит в каноническую образующую $\mu_0^n \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \cong \mathbb{Z}$. Рассмотрим $\frown$ -произведение

$$\frown: H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \times H^{n-m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-m}).$$

Тогда произведение образующих $\mu_0^n \frown \theta_0$ есть образующая группы $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-m}) \cong H_m(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus 0)$, т.е. μ_0^m , которая соответствует ограничению на x фундаментального класса $[M] \in H_m(M)$. $\square$

Рассмотрим теперь диагональное вложение $\Delta: M \rightarrow M \times M$, $\Delta(x) = (x, x)$.

Лемма 4.14. *Нормальное расслоение $\nu(\Delta: M \rightarrow M \times M)$ канонически изоморфно касательному расслоению $\mathcal{T}M$.*

Доказательство. Вектор $(u, v) \in \mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M = \mathcal{T}_{(x,x)}(M \times M)$ касателен к подмногообразию $\Delta(M)$ тогда и только тогда, когда $u = v$ и нормален к $\Delta(M)$ тогда и только тогда, когда $u = -v$. Отображение $\mathcal{T}M \rightarrow \nu(\Delta)$, $v \mapsto (-v, v)$, даёт требуемый изоморфизм расслоений. $\square$

Предположим, что многообразие M ориентировано (или когомологии рассматриваются с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$). Обозначим через

$$\theta_\Delta \in H^m(M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))$$

класс Тома нормального расслоения $\nu(\Delta)$. Для $x \in M$ обозначим через $\psi_x \in H^m(M, M \setminus x) \cong \mathbb{Z}$ класс когомологий, двойственный к локальной ориентации $\mu_x \in H_m(M, M \setminus x)$, т. е. $\langle \psi_x, \mu_x \rangle = 1$. Рассмотрим отображение

$$(12) \quad j_x: (M, M \setminus x) \rightarrow (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)), \quad y \mapsto (x, y).$$

Лемма 4.15. *Имеем $j_x^* \theta_\Delta = \psi_x$ для любой точки $x \in M$.*

Доказательство. Пусть U — окрестность точки $x \in M$ из теоремы 4.9, тогда мы имеем вложение $\mathcal{T}_x M \cong U \rightarrow M$. Рассмотрим линейные отображения

$$\begin{aligned} f_0, f_1: (\mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \setminus 0) &\rightarrow (\mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M \setminus \mathcal{T}_x \Delta(M)), \\ f_0(v) &= (0, v), \quad f_1(v) = (-v, v). \end{aligned}$$

Отображения f_0 и f_1 гомотопны посредством гомотопии $f_t(v) = (-tv, v)$. Имеем две коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \setminus 0) & \xrightarrow{f_0} & (\mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M \setminus \mathcal{T}_x \Delta(M)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (M, M \setminus x) & \xrightarrow{j_x} & (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)) \\ \\ (\mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \setminus 0) & \xrightarrow{f_1} & (\mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M \setminus \mathcal{T}_x \Delta(M)) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \\ (E\nu_x, E\nu_x \setminus 0) & \xrightarrow{i} & (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)) \end{array}$$

Во второй диаграмме нижнее отображение — вложение слоя нормального расслоения $\nu(\Delta: M \rightarrow M \times M)$, а левое — изоморфизм из леммы 4.14. Из второй диаграммы, определения класса θ_Δ и леммы 4.14 получаем $i^* \theta_\Delta = \psi_x$. Так как $f_0 \simeq f_1$, имеем $j_x^* \theta_\Delta = f_0^* \theta_\Delta = f_1^* \theta_\Delta = i^* \theta_\Delta = \psi_x$, где мы отождествляем θ_Δ с его образом в $H^m(\mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M \setminus \mathcal{T}_x \Delta(M))$. $\square$

Рассмотрим $\times$ -умножение $\times: H^p(M) \times H^q(M) \rightarrow H^{p+q}(M \times M)$.

Лемма 4.16. *Для любого $\varphi \in H^k(M)$ имеем $(\varphi \times 1) \smile \theta_\Delta = (1 \times \varphi) \smile \theta_\Delta$.*

Доказательство. Пусть U — трубчатая окрестность $\Delta(M)$ в $M \times M$ из теоремы 4.9 и $p_1, p_2: M \times M \rightarrow M$ — проекции. Поскольку p_1 и p_2 совпадают на $\Delta(M)$, ограничение $p_1|_U$ гомотопно ограничению $p_2|_U$. Следовательно, два класса $\varphi \times 1 = p_1^*(\varphi)$ и $1 \times \varphi = p_2^*(\varphi)$ имеют один и тот же образ при гомоморфизме ограничения $H^k(M \times M) \rightarrow H^k(U)$. Тогда из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^k(M \times M) & \longrightarrow & H^k(U) \\ \downarrow \sim \theta_\Delta & & \downarrow \sim \theta_\Delta \\ H^{k+m}(M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)) & \xrightarrow{\cong} & H^{k+m}(U, U \setminus \Delta(M)) \end{array}$$

вытекает, что $(\varphi \times 1) \smile \theta_\Delta = (1 \times \varphi) \smile \theta_\Delta$ в $H^{k+m}(M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))$. $\square$

Определим теперь *косое гомологическое произведение* или */-произведение*. Для клеточных (ко)цепей клеточных пространств X и Y определим билинейное $/$ -произведение

$$/: \mathcal{C}^n(X \times Y) \times \mathcal{C}_q(Y) \rightarrow \mathcal{C}^{n-q}(X)$$

по формуле

$$(f \times g, e^q) \mapsto f \langle g, e^q \rangle$$

где $f \in \mathcal{C}^p(X)$, $g \in \mathcal{C}^{n-p}(Y)$, а e^q — клетка в Y (здесь как обычно полагаем $\langle g, e^q \rangle = 0$, если $n - p \neq q$). Эта формула однозначно определяет отображение, так как любая клеточная коцепь из $\mathcal{C}^n(X \times Y)$ является линейной комбинацией коцепей вида $f \times g$. (Сравните с клеточным определением $\times$ -произведения.)

Предложение 4.17. Для $h \in \mathcal{C}^n(X \times Y)$ и $a \in \mathcal{C}_q(Y)$ выполнено равенство

$$d(h/a) = dh/a + (-1)^{n-q} h/\partial a.$$

Доказательство. Можно считать $h = f \times g$, $f \in \mathcal{C}^p(X)$, $g \in \mathcal{C}^{n-p}(Y)$, $a = e^q$. Тогда

$$\begin{aligned} d(h/a) &= d(f \times g/e^q) = d(f \langle g, e^q \rangle) = df \langle g, e^q \rangle, \\ dh/a &= d(f \times g)/e^q = (df \times g + (-1)^p f \times dg)/e^q = df \langle g, e^q \rangle + (-1)^p f \langle dg, e^q \rangle, \\ h/\partial a &= (f \times g)/\partial e^q = f \langle g, \partial e^q \rangle = f \langle dg, e^q \rangle. \end{aligned}$$

При этом $\langle dg, e^q \rangle \neq 0$ только при $n - p + 1 = q$, т. е. $n - q = p - 1$. Умножая последнее равенство на $(-1)^{n-q}$ и складывая, получим требуемое. $\square$

Из предложения 4.17 следует, что $/$ -произведение коцикла на цикл есть коцикл, произведение коцикла на границу есть кограница и т. д., так что определено билинейное гомологическое $/$ -произведение

$$/: H^n(X \times Y) \times H_q(Y) \rightarrow H^{n-q}(X), \quad (\eta, \alpha) \mapsto \eta/\alpha.$$

Предложение 4.18. Имеем

- а) $(\varphi \times \psi)/\alpha = \varphi \langle \psi, \alpha \rangle$ для $\varphi \in H^p(X)$, $\psi \in H^{n-p}(Y)$ и $\alpha \in H_q(Y)$;
- б) $\langle \eta/\alpha, \beta \rangle = \langle \eta, \beta \times \alpha \rangle$ для $\eta \in H^n(X \times Y)$, $\alpha \in H_q(Y)$ и $\beta \in H_{n-q}(X)$;
- в) $((\varphi \times 1) \smile \eta)/\alpha = \varphi \smile (\eta/\alpha)$ для $\varphi \in H^p(X)$, $\eta \in H^n(X \times Y)$ и $\alpha \in H_q(Y)$.

Доказательство. Равенства а) и б) выполнены на уровне коцепей и вытекают из определения цепного $/$ -произведения. Для доказательства в) можно считать, что $\eta = \chi \times \psi$, $\chi \in H^{n-q}(X)$, $\psi \in H^q(Y)$. Тогда имеем

$$((\varphi \times 1) \smile (\chi \times \psi))/\alpha = ((\varphi \smile \chi) \times \psi)/\alpha = (\varphi \smile \chi) \langle \psi, \alpha \rangle = \varphi \smile (\eta/\alpha). \quad \square$$

При ограничении на $(M \times M, \emptyset) \subset (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))$ класс Тома θ_Δ переходит в класс $\nabla_M \in H^m(M \times M)$, который называется *диагональным когомологическим классом*. Если многообразие M замкнуто, то класс ∇_M двойствен по Пуанкаре к $\Delta_*[M] \in H_m(M \times M)$ согласно предложению 4.13.

Лемма 4.19. Если многообразие M замкнуто и ориентировано, то $\nabla_M/[M] = 1 \in H^0(M)$.

Доказательство. Рассмотрим вложение $i_x: x \rightarrow M$. Достаточно доказать, что $i_x^*(\nabla_M/[M]) = 1 \in H^0(x)$ для любой точки $x \in M$. Рассмотрим отображение j_x (12) и коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^m(M \times M) & \xrightarrow{/[M]} & H^0(M) \\ (i_x \times \text{id})^* \downarrow & & \downarrow i_x^* \\ H^m(x \times M) & \xrightarrow{/[M]} & H^0(x) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{r_x} & (M, M \setminus x) \\ j_x \downarrow & & \downarrow j_x \\ M \times M & \xrightarrow{r_\Delta} & (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)) \end{array}$$

Из первой диаграммы получаем

$$i_x^*(\nabla_M/[M]) = ((i_x \times \text{id})^*\nabla_M)/[M] = (1 \times j_x^*\nabla_M)/[M] = 1 \cdot \langle j_x^*\nabla_M, [M] \rangle$$

в $H^0(x)$, где в последнем равенстве мы воспользовались предложением 4.18 а). Из определения ∇_M и второй диаграммы получаем

$$\langle j_x^*\nabla_M, [M] \rangle = \langle j_x^*r_\Delta^*(\theta_\Delta), [M] \rangle = \langle r_x^*j_x^*(\theta_\Delta), [M] \rangle = \langle r_x^*\psi_x, [M] \rangle = \langle \psi_x, \mu_x \rangle = 1,$$

где в третьем равенстве мы воспользовались леммой 4.15. $\square$

Теорема 4.20. Пусть M — замкнутое многообразие и F -поле. Предположим, что M ориентируемо или поле F имеет характеристику 2. Пусть $\psi_1, \dots, \psi_r$ — базис в $H^*(M; F)$ и $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_r$ — двойственный по Пуанкаре базис в $H^*(M; F)$, т. е. $\langle \psi_i \smile \tilde{\psi}_j, [M] \rangle = \delta_{ij}$. Тогда

$$\nabla_M = \sum_{i=1}^r (-1)^{\dim \psi_i} \psi_i \times \tilde{\psi}_i, \quad e(\mathcal{T}M) = \sum_{i=1}^r (-1)^{\dim \psi_i} \psi_i \smile \tilde{\psi}_i.$$

Доказательство. Для коэффициентов в поле имеем $H^*(M \times M; F) = H^*(M; F) \otimes H^*(M; F)$. Поэтому мы можем записать $\nabla_M = \sum_{i=1}^r \psi_i \times \zeta_i$ для некоторых классов $\zeta_i \in H^*(M; F)$, $\dim \psi_i + \dim \zeta_i = m$.

Ограничивая соотношение из леммы 4.16 на $M \times M$, получаем $(\varphi \times 1) \smile \nabla_M = (1 \times \varphi) \smile \nabla_M$ для любого $\varphi \in H^*(M; F)$. Применим $/[M]$ к обеим частям этого соотношения. Слева получим

$$((\varphi \times 1) \smile \nabla_M)/[M] = \varphi \smile (\nabla_M/[M]) = \varphi$$

в силу предложения 4.18 в) и леммы 4.19, а справа

$$\begin{aligned} \left((1 \times \varphi) \smile \sum_j \psi_j \times \zeta_j \right) / [M] &= \sum_j (-1)^{\dim \varphi \dim \psi_j} (\psi_j \times (\varphi \smile \zeta_j)) / [M] = \\ &= \sum_j (-1)^{\dim \varphi \dim \psi_j} \psi_j \langle \varphi \smile \zeta_j, [M] \rangle \end{aligned}$$

в силу предложения 4.18 а). Полагая $\varphi = \psi_i$, получим

$$(-1)^{\dim \psi_i \dim \psi_j} \langle \psi_i \smile \zeta_j, [M] \rangle = \delta_{ij}.$$

Отсюда $\zeta_j = (-1)^{\dim \psi_j} \tilde{\psi}_j$ и $\nabla_M = \sum_j (-1)^{\dim \psi_j} \psi_j \times \tilde{\psi}_j$.

Формула для $e(\mathcal{T}M)$ следует из определения: $e(\mathcal{T}M) = \Delta^*(\nabla_M)$. $\square$

Из формул универсальных коэффициентов вытекает, что эйлерову характеристику многообразия M (или любого конечного клеточного пространства) можно вычислять через когомологии с коэффициентами в произвольном поле F , и результат не зависит от F :

$$\chi(M) = \sum_k (-1)^k \dim H^k(M; F).$$

Теорема 4.21. Для гладкого замкнутого ориентированного многообразия M

$$\langle e(\mathcal{T}M), [M] \rangle = \chi(M).$$

Если M неориентировано, то $w_m(\mathcal{T}M), [M] \rangle = \chi(M) \pmod{2}$.

Доказательство. Вычисляя $e(\mathcal{T}M) = \sum_i (-1)^{\dim \psi_i} \psi_i \smile \tilde{\psi}_i$ на фундаментальном классе, получаем $\langle e(\mathcal{T}M), [M] \rangle = \sum_i (-1)^{\dim \psi_i} = \chi(M)$. $\square$

Следствие 4.22. Имеем $\chi(M) = \langle \nabla_M \smile \nabla_M, [M \times M] \rangle$.

Доказательство. Так как ∇_M двойствен по Пуанкаре к $\Delta_*[M]$, имеем

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \langle e(\mathcal{T}M), [M] \rangle = \langle \Delta^* \nabla_M, [M] \rangle = \langle \nabla_M, \Delta_*[M] \rangle = \Delta_*[M] \smile \nabla_M = \\ &= ([M \times M] \smile \nabla_M) \smile \nabla_M = [M \times M] \smile (\nabla_M \smile \nabla_M) = \langle \nabla_M \smile \nabla_M, [M \times M] \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Гладкие подмногообразия M_1 и M_2 в N пересекаются *трансверсально*, если в каждой точке $x \in M_1 \cap M_2$ выполнено $\mathcal{T}_x M_1 + \mathcal{T}_x M_2 = \mathcal{T}_x N$. Если M_1 и M_2 имеют дополнительные размерности (т.е. $m_1 + m_2 = n$), то точки трансверсального пересечения образуют дискретное подмножество (конечное, если N компактно). Если M_1, M_2 и N ориентированы, то каждой точке пересечения $x \in M_1 \cap M_2$ присваивается *знак*, равный $+1$, если ориентации пространств левой и правой части равенства $\mathcal{T}_x M_1 \oplus \mathcal{T}_x M_2 = \mathcal{T}_x N$ совпадают, и -1 в противном случае. Сумма знаков точек пересечения называется *индексом пересечения* ориентированных подмногообразий M_1 и M_2 дополнительных размерностей в ориентированном многообразии N .

В дифференциальной топологии доказывается, что индекс пересечения равен $\langle D[M_1] \smile D[M_2], [N] \rangle$, где $D[M_i] \in H^{n-m_i}(N)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к фундаментальному классу $[M_i] \in H_{m_i}(N)$. Это также позволяет определить индекс пересечения для подмногообразий M_1 и M_2 , пересекающихся не трансверсально (в частности, *индекс самопересечения* многообразия половинной размерности в N). Для этого необходимо «пошевелить» одно из многообразий, например M_1 , т.е. заменить вложение M_1 в N на гомотопное вложение так, что новое подмногообразие $\widetilde{M}_1$ пересекает M_2 трансверсально. Индекс пересечения M_1 и M_2 тогда можно определить как индекс пересечения $\widetilde{M}_1$ и M_2 . При этом мы имеем $\langle D[M_1] \smile D[M_2], [N] \rangle = \langle D[\widetilde{M}_1] \smile D[M_2], [N] \rangle$, так как $[M_1] = [\widetilde{M}_1]$.

Так как класс ∇_M двойствен по Пуанкаре к диагональному подмногообразию $\Delta(M)$ в $M \times M$, выражение $\langle \nabla_M \smile \nabla_M, [M \times M] \rangle$ в правой части соотношения из следствия 4.22 есть индекс самопересечения $\Delta(M)$.

Следствие 4.23. Эйлерова характеристика замкнутого многообразия M равна *индексу самопересечения диагонального подмногообразия $\Delta(M)$ в $M \times M$* .

Так как нормальное расслоение к $\Delta(M)$ в $M \times M$ канонически изоморфно касательному расслоению $\mathcal{T}M$, вместо того, чтобы «шевелить» $\Delta(M)$ в $M \times M$, мы

можем шевелить нулевое сечение в пространстве $\mathcal{T}M$. Сечения касательного расслоения $\mathcal{T}M$ — это векторные поля на M , а нули сечения — особые точки векторного поля. Подмногообразие $\widetilde{M} \subset \mathcal{T}M$, задаваемое векторным полем (сечением), трансверсально к нулевому сечению $M \subset \mathcal{T}M$ тогда и только тогда, когда векторное поле имеет изолированные особенности.

Следствие 4.24. *Сумма индексов особых точек векторного поля с изолированными особенностями на гладком замкнутом ориентированном многообразии M равна эйлеровой характеристике $\chi(M)$.*

Задачи и упражнения.

4.25. Докажите, что для любой абелевой группы H имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(\varinjlim G_\alpha, H) \xrightarrow{\cong} \varprojlim \mathrm{Hom}(G_\alpha, H).$$

4.26. Докажите, что если гомоморфизм $H^k(E; F) \xrightarrow{\sim} H^{k+n}(E, E \setminus B; F)$ является изоморфизмом для любого поля F , то он является изоморфизмом с целыми коэффициентами (а также с коэффициентами в любом коммутативном кольце с единицей).

4.27. Докажите, что для пространства Тома $Th \xi = D\xi/S\xi$ вещественного векторного расслоения ξ имеем $Th(\xi \oplus \mathbb{R}^k) \cong \Sigma^k Th \xi$, где $\mathbb{R}^k$ — тривиальное расслоение над той же базой, а Σ^k — k -кратная надстройка.

4.28. Докажите, что пространство Тома $Th \xi$ вещественного (комплексного) векторного расслоения ξ над клеточным пространством гомеоморфно $\mathbb{R}P(\xi \oplus \mathbb{R})/\mathbb{R}P(\xi)$ (соответственно, $\mathbb{C}P(\xi \oplus \mathbb{C})/\mathbb{C}P(\xi)$).

4.29. Докажите, что пространство Тома тавтологического расслоения над $\mathbb{R}P^n$ (соответственно, над $\mathbb{C}P^n$) гомеоморфно $\mathbb{R}P^{n+1}$ (соответственно, $\mathbb{C}P^{n+1}$).

4.30. Докажите, что вещественное векторное расслоение ξ ориентируемо тогда и только тогда, когда $w_1(\xi) = 0$.

4.31. Докажите, что при гомоморфизме $H^n(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(B; \mathbb{Z}_2)$ класс Эйлера $e(\xi)$ ориентированного n -мерного расслоения ξ переходит в класс Штифеля–Уитни $w_n(\xi)$.

4.32. Пусть η^n — тавтологическое расслоение над $BO(n) = G_n(\mathbb{R}^\infty)$. Докажите, что расслоение $\eta^n \oplus \eta^n$ ориентируемо и $e(\eta^n \oplus \eta^n) \neq 0$.

4.33. Пусть ξ — комплексное n -мерное векторное расслоение и $\xi_{\mathbb{R}}$ — его овеществление. Докажите, что $e(\xi_{\mathbb{R}}) = c_n(\xi)$.

4.34. При каких n на сфере S^n существует нигде не обращающееся в нуль векторное поле? Тот же вопрос для $\mathbb{C}P^n$.

5. КЛАССЫ ПОНТЯГИНА

5.1. Общее понятие характеристического класса. Пусть $\mathcal{V}$ — некоторое семейство векторных расслоений фиксированной размерности n , замкнутое относительно перехода к индуцированному расслоению, и пусть R — коммутативное кольцо с единицей. Назовём k -мерным *характеристическим классом* расслоений из $\mathcal{V}$ с коэффициентами в R соответствие

$$\{\text{векторные расслоения из } \mathcal{V}\} \rightarrow \{\text{классы из } H^k(B; R)\}, \quad \xi = (p: E \rightarrow B) \mapsto c(\xi),$$

удовлетворяющее соотношению $f^*c(\xi) = c(f^*\xi)$ для $f: B' \rightarrow B$.

Примеры — классы Штифеля–Уитни для $\mathcal{V} = \{\text{вещественные расслоения}\}$ и $R = \mathbb{Z}_2$, классы Чженя для $\mathcal{V} = \{\text{комплексные расслоения}\}$ и $R = \mathbb{Z}$, а также класс Эйлера для $\mathcal{V} = \{\text{ориентированные расслоения}\}$ и $R = \mathbb{Z}$.

Характеристические классы всевозможных размерностей с коэффициентами в R образуют кольцо относительно кохомологического умножения.

Предложение 5.1. *Кольцо характеристических классов вещественных (комплексных) n -мерных расслоений с коэффициентами в R изоморфно $H^*(BO(n); R)$ (соответственно, $H^*(BU(n); R)$).*

Доказательство. Это следует из определения характеристических классов, классифицирующих пространств $BO(n) = G_n(\mathbb{R}^\infty)$, $BU(n) = G_n(\mathbb{C}^\infty)$ и теоремы 2.15. $\square$

Из теорем 3.12 и 3.14 мы знаем как устроены кольца кохомологий $BO(n)$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ и $BU(n)$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ (а значит, и с коэффициентами в любом R): $H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_n]$, $H^*(BU(n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n]$, где w_i — универсальные классы Штифеля–Уитни, а c_i — универсальные классы Чженя.

Следствие 5.2. *Любой характеристический класс вещественных (комплексных) n -мерных расслоений с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ (в $\mathbb{Z}$) есть многочлен от классов Штифеля–Уитни (Чженя), причём разным многочленам соответствуют разные характеристические классы.*

Аналогичное описание характеристических классов вещественных или ориентированных расслоений с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ отсутствует, так как кольца $H^*(BO(n); \mathbb{Z})$ и $H^*(BSO(n); \mathbb{Z})$ устроены сложно. Некоторое разумное приближение дают классы Понтрягина, как мы увидим далее. Классы Понтрягина также естественно возникают при рассмотрении кватернионных векторных расслоений.

5.2. Связь классов Штифеля–Уитни комплексного расслоения с его классами Чженя.

Теорема 5.3. *Пусть ξ — комплексное n -мерное расслоение над B и $\xi_{\mathbb{R}}$ — его овеществление. Тогда $w_{2k}(\xi_{\mathbb{R}}) = c_k(\xi) \bmod 2$ и $w_{2k+1}(\xi_{\mathbb{R}}) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим проективизацию $\mathbb{C}P(\xi) \rightarrow B$, тавтологическое одномерное комплексное расслоение $\gamma = \gamma(\mathbb{C}P(\xi))$ над $\mathbb{C}P(\xi)$, его овеществление $\gamma_{\mathbb{R}}$ (двумерное вещественное расслоение над $\mathbb{C}P(\xi)$) и проективизацию $\mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}})$. Мы имеем $\mathbb{R}P(\xi_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}})$, так как любая вещественная прямая в слое $\xi_{\mathbb{R}}$ однозначно задаёт содержащую её комплексную прямую в слое ξ . Получаем последовательность расслоений

$$\mathbb{R}P(\xi_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P(\xi) \rightarrow B,$$

где π — расслоение со слоем $\mathbb{R}P^1$.

Согласно теоремам 3.2 и 3.3 о кохомологиях проективизации имеем

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{C}P(\xi)) &\cong H^*(B)[v] / (v^n + c_1(\xi)v^{n-1} + \dots + c_n(\xi) = 0), \\ (13) \quad H^*(\mathbb{R}P(\xi_{\mathbb{R}})) &\cong H^*(B)[u] / (u^{2n} + w_1(\xi_{\mathbb{R}})u^{2n-1} + \dots + w_{2n}(\xi_{\mathbb{R}}) = 0), \\ &\quad \parallel \\ H^*(\mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}})) &\cong H^*(\mathbb{C}P(\xi))[t] / (t^2 + \pi^*w_1(\gamma_{\mathbb{R}})t + \pi^*w_2(\gamma_{\mathbb{R}}) = 0). \end{aligned}$$

Здесь все когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$, $v = e(\gamma_{\mathbb{R}}) = w_2(\gamma_{\mathbb{R}}) = c_1(\gamma) \bmod 2$. Обозначим $\gamma' = \gamma(\mathbb{R}P(\xi_{\mathbb{R}})) = \gamma(\mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}}))$ — тавтологическое одномерное вещественное расслоение над $\mathbb{R}P(\xi_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}})$. Тогда $u = t = w_1(\gamma')$.

Мы имеем $\pi^*\gamma_{\mathbb{R}} \cong \gamma' \oplus \gamma'$; изоморфизм переводит $(x, y) \in E(\gamma' \oplus \gamma')$ в $x + iy$. Поэтому $\pi^*w_1(\gamma_{\mathbb{R}}) = 0$ и $\pi^*w_2(\gamma_{\mathbb{R}}) = w_1(\gamma')^2$, т. е. $\pi^*v = t^2 = u^2$. Подставляя это в (13), получаем

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{R}P(\xi_{\mathbb{R}})) &= H^*(\mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}})) \cong H^*(\mathbb{C}P(\xi))[u] / (u^2 = \pi^*v) \cong \\ &\cong H^*(B)[u, \pi^*v] / ((\pi^*v)^n + c_1(\xi)(\pi^*v)^{n-1} + \dots + c_n(\xi) = 0, u^2 = \pi^*v) = \\ &= H^*(B)[u] / (u^{2n} + c_1(\xi)u^{2n-2} + \dots + c_n(\xi) = 0). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при u^k со второй формулой (13), получим требуемое. $\square$

Рассмотрим отображение $r: BU(n) = G_n(\mathbb{C}^\infty) \rightarrow G_{2n}(\mathbb{R}^\infty) = BO(2n)$, задаваемое овеществлением (забыванием комплексной структуры) n -мерных комплексных плоскостей. По определению, это отображение классифицирует овеществление тавтологического комплексного расслоения γ^n над $BU(n)$.

Предложение 5.4. *Гомоморфизм*

$$H^*(BO(2n); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots, w_{2n}] \rightarrow \mathbb{Z}_2[c_1, c_2, \dots, c_n] = H^*(BU(n); \mathbb{Z}_2),$$

индуцированный забыванием комплексной структуры $r: BU(n) \rightarrow BO(2n)$, переводит w_{2k} в c_k и w_{2k+1} в 0.

Доказательство. Пусть γ — тавтологическое комплексное расслоение над $BU(n)$, а γ' — тавтологическое вещественное расслоение над $BO(2n)$. Тогда $r^*\gamma' = \gamma_{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} r^*w_{2k} &= r^*(w_{2k}(\gamma')) = w_{2k}(r^*\gamma') = w_{2k}(\gamma_{\mathbb{R}}) = c_k(\gamma) = c_k \bmod 2, \\ r^*w_{2k+1} &= r^*(w_{2k+1}(\gamma')) = w_{2k+1}(r^*\gamma') = w_{2k+1}(\gamma_{\mathbb{R}}) = 0. \end{aligned}$$

$\square$

5.3. Кватернионные классы Понтрягина. *Кватернионы* определяются как элементы четырёхмерного векторного пространства $\mathbb{H} = \mathbb{R}\langle 1, i, j, k \rangle$ с базисом $1, i, j, k$, т. е. как линейные комбинации $a + bi + cj + dk$, где a, b, c, d — вещественные числа. Правило умножения символов i, j, k

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

распространённое по билинейности, превращает $\mathbb{H}$ в ассоциативную (но не коммутативную алгебру) алгебру с делением над $\mathbb{R}$.

Кватернионным векторным пространством называется вещественное векторное пространство V со структурой левого $\mathbb{H}$ -модуля, продолжающей структуру $\mathbb{R}$ -модуля (т. е. умножение на вещественные скаляры осуществляется как в исходном V). Вещественная размерность кватернионного векторного пространства кратна 4.

Если W — кватернионное векторное пространство, то его *комплексификацией* $W_{\mathbb{C}}$ называется комплексное векторное пространство, получаемое забыванием умножений на j, k (остаётся только умножение на комплексные скаляры). Если W имело размерность n над $\mathbb{H}$, то $W_{\mathbb{C}}$ имеет размерность $2n$ над $\mathbb{C}$.

Если V — комплексное векторное пространство, то его *кватернионизацией* называется кватернионное пространство $V_{\mathbb{H}} = V \otimes \mathbb{H}$. В более явном виде, $V_{\mathbb{H}}$ представляет собой пространство $V \oplus \bar{V}$, в котором умножение на кватернионную единицу

j определено формулой $j(x, y) = (-y, x)$. Так как $i(x, y) = (ix, -iy)$ в $V \oplus \bar{V}$, имеем $k(x, y) = ij(x, y) = (-iy, -ix)$. Непосредственная проверка показывает, что эти формулы действительно определяют структуру левого $\mathbb{H}$ -модуля на $V \oplus \bar{V}$.

Кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$ определяется как множество одномерных кватернионных подпространств (прямых) в $\mathbb{H}^{n+1}$, аналогично вещественному и комплексному случаям (умножение на кватернионные скаляры всегда осуществляется слева).

Кватернионным n -мерным векторным расслоением называется вещественное $4n$ -мерное расслоение, слои которого являются кватернионными векторными пространствами, а тривиализации — $\mathbb{H}$ -линейными отображениями. Описанные выше операции над векторными пространствами определены и для векторных расслоений. Так, определены комплексификация $\eta_{\mathbb{C}}$ кватернионного векторного расслоения η , кватернионизация $\xi_{\mathbb{H}}$ комплексного расслоения ξ и кватернионная проективизация $\mathbb{H}P(\eta)$.

Следующая теорема выводится из теоремы Лере–Хирша аналогично теореме 3.3.

Теорема 5.5. Пусть η — кватернионное n -мерное векторное расслоение над клеточным пространством B . Тогда кольцо $H^*(\mathbb{H}P(\eta); \mathbb{Z})$ изоморфно факторкольцу кольца многочленов с коэффициентами в $H^*(B)$ от одной образующей $v_{\eta} \in H^4(\mathbb{H}P(\eta))$ по единственному соотношению

$$v_{\eta}^n + p_1(\eta) \cdot v_{\eta}^{n-1} + \dots + p_{n-1}(\eta) \cdot v_{\eta} + p_n(\eta) \cdot 1 = 0,$$

где классы $p_i(\eta) \in H^{4i}(B)$, $i = 1, \dots, n$, определяются расслоением η .

Классы $p_i(\eta) \in H^{4i}(B)$ называются кватернионными классами Понтрягина n -мерного кватернионного векторного расслоения η .

Следующая теорема, аналогичная теореме 5.3, показывает, что кватернионные классы Понтрягина сводятся к классам Чженя.

Теорема 5.6. Пусть η — кватернионное n -мерное расслоение над B и $\eta_{\mathbb{C}}$ — его комплексификация. Тогда $p_k(\eta) = (-1)^k c_{2k}(\eta_{\mathbb{C}})$ и $c_{2k+1}(\eta_{\mathbb{C}}) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим проективизацию $\mathbb{H}P(\eta) \rightarrow B$, тавтологическое одномерное кватернионное расслоение $\gamma = \gamma(\mathbb{H}P(\eta))$ над $\mathbb{H}P(\eta)$, его комплексификацию $\gamma_{\mathbb{C}}$ (двумерное комплексное расслоение над $\mathbb{H}P(\eta)$) и проективизацию $\mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})$. Мы имеем $\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})$, так как любая комплексная прямая в слое $\eta_{\mathbb{C}}$ однозначно задаёт содержащую её кватернионную прямую в слое η . Получаем последовательность расслоений

$$\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{H}P(\eta) \rightarrow B,$$

где π — расслоение со слоем $\mathbb{C}P^1$.

Согласно теоремам 3.3 и 5.5 о когомологиях проективизации имеем

$$(14) \quad \begin{aligned} H^*(\mathbb{H}P(\eta)) &\cong H^*(B)[v] / (v^n + p_1(\eta)v^{n-1} + \dots + p_n(\eta) = 0), \\ H^*(\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}})) &\cong H^*(B)[u] / (u^{2n} + c_1(\eta_{\mathbb{C}})u^{2n-1} + \dots + c_{2n}(\eta_{\mathbb{C}}) = 0), \\ &\parallel \\ H^*(\mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})) &\cong H^*(\mathbb{H}P(\eta))[t] / (t^2 + \pi^*c_1(\gamma_{\mathbb{C}})t + \pi^*c_2(\gamma_{\mathbb{C}}) = 0). \end{aligned}$$

Мы имеем $v = c_2(\gamma_{\mathbb{C}}) = p_1(\gamma)$. Обозначим $\gamma' = \gamma(\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}})) = \gamma(\mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}}))$ — тавтологическое одномерное комплексное расслоение над $\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})$. Тогда $u = t = c_1(\gamma')$.

Мы имеем $\pi^*\gamma_{\mathbb{C}} \cong \gamma' \oplus \bar{\gamma}'$; изоморфизм переводит $(x, y) \in E(\gamma' \oplus \bar{\gamma}')$ в $x + jy$. Поэтому $\pi^*c_1(\gamma_{\mathbb{C}}) = 0$ и $\pi^*c_2(\gamma_{\mathbb{C}}) = -c_1(\gamma')^2$, т. е. $\pi^*v = -t^2 = -u^2$. Подставим это в (14):

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}})) &= H^*(\mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})) \cong H^*(\mathbb{H}P(\eta))[u] / (u^2 = -\pi^*v) \cong \\ &\cong H^*(B)[u, \pi^*v] / ((\pi^*v)^n + p_1(\eta)(\pi^*v)^{n-1} + \dots + p_n(\eta) = 0, u^2 = -\pi^*v) = \\ &= H^*(B)[u] / (u^{2n} - p_1(\eta)u^{2n-2} + \dots + (-1)^n p_n(\eta) = 0). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при u^k со второй формулой (14), получим требуемое. $\square$

Кватернионное векторное расслоение — это весьма богатая геометрическая структура, и естественно возникающих кватернионных расслоений мало.

Одна из трудностей, возникающих при работе с кватернионными расслоениями, заключается в том, что множество $\text{Hom}_{\mathbb{H}}(U, W)$ кватернионно-линейных отображений кватернионных пространств U и W не является кватернионным пространством (левым $\mathbb{H}$ -модулем), в силу некоммутативности умножения кватернионов. $\text{Hom}_{\mathbb{H}}(U, W)$ не имеет даже естественной комплексной структуры и является лишь вещественным векторным пространством.

Пример 5.7. Рассмотрим касательное расслоение $\mathcal{T}\mathbb{H}P^n$ к кватернионному проективному пространству. По аналогии с предложением 2.6 доказывается, что имеет место изоморфизм *вещественных* расслоений $\mathcal{T}\mathbb{H}P^n \cong \text{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \gamma^{\perp})$, где γ — тавтологическое одномерное кватернионное расслоение над $\mathbb{H}P^n$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\mathbb{H}P^n \oplus \text{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \gamma) &\cong \text{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \gamma^{\perp}) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \gamma) = \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \gamma^{\perp} \oplus \gamma) = \text{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \mathbb{H}^{n+1}) = \bigoplus_{i=1}^{n+1} \text{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \mathbb{H}). \end{aligned}$$

Расслоение $\text{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \mathbb{H})$ изоморфно, как вещественное расслоение, расслоению $\gamma_{\mathbb{R}}$. Расслоение $\text{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \gamma)$ является четырёхмерным вещественным расслоением, которое оказывается нетривиальным (в отличие от комплексного случая).

Можно доказать, что кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$ не является кватернионным многообразием даже в слабом смысле, т. е. касательное расслоение $\mathcal{T}\mathbb{H}P^n$ не является кватернионным расслоением, и даже не допускает комплексной структуры.

5.4. Классы Понтрягина вещественных расслоений. Пусть ξ — вещественное векторное расслоение над клеточной базой B . Его k -м *характеристическим классом Понтрягина* называется

$$p_k(\xi) = (-1)^k c_{2k}(\xi_{\mathbb{C}}) \in H^{4k}(B).$$

Также вводится полный класс Понтрягина $p(\xi) = 1 + p_1(\xi) + p_2(\xi) + \dots$.

Связь с кватернионными классами Понтрягина описывается через комплексные расслоения:

Предложение 5.8. Для комплексного расслоения ζ имеем $p_k(\zeta_{\mathbb{R}}) = p_k(\zeta_{\mathbb{H}})$, где слева стоит класс Понтрягина вещественного расслоения, а справа — кватернионного.

Доказательство. Имеем

$$p_k(\zeta_{\mathbb{R}}) = (-1)^k c_{2k}((\zeta_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}) = (-1)^k c_{2k}(\zeta \oplus \bar{\zeta}) = (-1)^k c_{2k}((\zeta_{\mathbb{H}})_{\mathbb{C}}) = p_k(\zeta_{\mathbb{H}}),$$

где последнее равенство вытекает из теоремы 5.6. $\square$

Предложение 5.9. Пусть ξ — вещественное векторное расслоение.

- а) $\xi_{\mathbb{C}} \cong \bar{\xi}_{\mathbb{C}}$ (изоморфизм комплексных расслоений);
- б) $2c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}}) = 0$. Если $\xi_{\mathbb{C}} = \eta_{\mathbb{C}}$ для кватернионного η , то $c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}}) = 0$.

Доказательство. Комплексификация $\xi_{\mathbb{C}}$ представляет собой расслоение $\xi \oplus \xi$ с оператором комплексной структуры $i(x, y) = (-y, x)$, а комплексная структура на $\bar{\xi}_{\mathbb{C}}$ задаётся как $i(x, y) = (y, -x)$. Тогда отображение $(x, y) \mapsto (x, -y)$ задаёт $\mathbb{C}$ -линейный изоморфизм $\xi_{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\xi}_{\mathbb{C}}$, что доказывает а).

Так как $c_{2k+1}(\bar{\zeta}) = -c_{2k+1}(\zeta)$ для любого комплексного расслоения ζ , получаем $c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}}) = c_{2k+1}(\bar{\xi}_{\mathbb{C}}) = -c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}})$, т. е. $2c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}}) = 0$. Второе утверждение из б) следует из теоремы 5.6. $\square$

Теорема 5.10 (формула Уитни для классов Понтрягина). Для любых вещественных расслоений ξ и η имеем $2(p(\xi \oplus \eta) - p(\xi)p(\eta)) = 0$.

Доказательство. Это следует из формулы Уитни для классов Чженя и предложения 5.9 б). $\square$

Если ζ — n -мерное комплексное расслоение, то, пользуясь принципом расщепления (7), мы можем записать $c(\zeta) = \prod_{i=1}^n (1 + t_i)$. Тогда имеем $c(\bar{\zeta}) = \prod_{i=1}^n (1 - t_i)$, $c((\zeta_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}) = c(\zeta \oplus \bar{\zeta}) = \prod_{i=1}^n (1 - t_i^2)$ и

$$p(\zeta_{\mathbb{R}}) = \prod_{i=1}^n (1 + t_i^2),$$

т. е. $p_i(\zeta_{\mathbb{R}}) = \sigma_i(t_1^2, \dots, t_n^2)$.

Пример 5.11. Вычислим классы Понтрягина (овеществления касательного расслоения) $\mathbb{C}P^n$. Мы имеем $\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong \bar{\gamma}^{\oplus(n+1)}$, откуда $c(\mathbb{C}P^n) = (1 + t)^{n+1}$, где $t = c_1(\bar{\gamma}) \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ — образующая. Следовательно,

$$p(\mathbb{C}P^n) = (1 + t^2)^{n+1}, \quad p_k(\mathbb{C}P^n) = C_{n+1}^k t^{2k} \text{ при } k \leq \frac{n}{2}.$$

Так как любое вещественное n -мерное расслоение ξ над клеточной базой B классифицируется отображением $f: B \rightarrow BO(n)$, можно рассмотреть универсальные классы Понтрягина $p_k = p_k(\gamma^n)$, где γ^n — тавтологическое расслоение над $BO(n) = G_n(\mathbb{R}^\infty)$. Тогда мы имеем $p_k(\xi) = f^*p_k$.

Целочисленное кольцо когомологий $H^*(BO(n))$ не порождается классами p_k и устроено достаточно сложно. Как мы увидим, кольцо когомологий $BO(n)$ порождается универсальными классами Понтрягина, если в кольце коэффициентов обратить 2. Далее в этом разделе все когомологии будут рассматриваться с коэффициентами в коммутативном кольце $R \ni \frac{1}{2}$. Например, $R = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ или $R = \mathbb{Q}$.

Предложение 5.12. Пусть $R \ni \frac{1}{2}$. Кольцо $H^*(BO(n); R)$ содержит подкольцо многочленов $R[p_1, \dots, p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}]$.

Доказательство. Пусть вначале $n = 2k$. Рассмотрим отображение $f: BU(k) \rightarrow BO(2k)$, классифицирующее овещствление тавтологического k -мерного комплексного расслоения над $BU(k)$, которое в течение этого доказательства мы будем обозначать γ' . Через γ будем обозначать тавтологическое $2k$ -мерное вещественное расслоение над $BO(2k)$. Мы имеем $f^*\gamma = \gamma'_{\mathbb{R}}$, $p_i = p_i(\gamma)$, $i = 1, \dots, k$. Мы имеем

$$1 - p_1(\gamma) + p_2(\gamma) - \dots + (-1)^k p_k(\gamma) = 1 + c_2(\gamma_{\mathbb{C}}) + c_4(\gamma_{\mathbb{C}}) + \dots + c_{2k}(\gamma_{\mathbb{C}}),$$

$$\begin{aligned}
f^*(1 - p_1 + p_2 - \dots + (-1)^k p_k) &= 1 + c_2(f^* \gamma_{\mathbb{C}}) + c_4(f^* \gamma_{\mathbb{C}}) + \dots + c_{2k}(f^* \gamma_{\mathbb{C}}) = \\
&= 1 + c_2((\gamma'_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}) + \dots + c_{2k}((\gamma'_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}) = 1 + c_2(\gamma' \oplus \bar{\gamma}') + c_4(\gamma' \oplus \bar{\gamma}') + \dots + c_{2k}(\gamma' \oplus \bar{\gamma}') = \\
&= (1 + c_1 + c_2 + \dots + c_k)(1 - c_1 + c_2 - \dots + (-1)^k c_k),
\end{aligned}$$

где $c_i = c_i(\gamma') \in H^*(BU(k); R)$ — универсальные классы Чженя. Следовательно,

$$f^* p_i = 2c_{2i} - 2c_{2i-1}c_1 + 2c_{2i-2}c_2 - \dots + (-1)^{i-1}2c_{i+1}c_{i-1} + (-1)^i c_i^2.$$

Отсюда вытекает, что классы $f^* p_1, \dots, f^* p_k$ алгебраически независимы в кольце $H^*(BU(k); R) = R[c_1, \dots, c_k]$ (т.е. никакой многочлен от них не равен нулю). Следовательно, то же верно и для классов $p_1, \dots, p_k$ в $H^*(BO(2k); R)$, т.е. $H^*(BO(2k); R)$ содержит подкольцо $R[p_1, \dots, p_k]$.

Пусть теперь $n = 2k + 1$. Рассмотрим отображение $g: BO(2k) \rightarrow BO(2k + 1)$, классифицирующее $(2k + 1)$ -мерное расслоение $\gamma^{2k} \oplus \mathbb{R}$. Тогда $g^* p_i = g^* p_i(\gamma^{2k+1}) = p_i(\gamma^{2k}) = p_i$ при $i = 1, \dots, k$. Так как классы $p_1, \dots, p_k$ алгебраически независимы в $H^*(BO(2k); R)$, они также алгебраически независимы в $H^*(BO(2k + 1); R)$. $\square$

5.5. Классы Понтрягина ориентированных расслоений.

Предложение 5.13. *Для ориентированного $2k$ -мерного вещественного расслоения ξ имеем $p_k(\xi) = e(\xi)^2$.*

Доказательство. Имеем изоморфизм $(\xi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong \xi \oplus \xi$ (неориентированных) вещественных расслоений. В левой части этого равенства ориентация задаётся базисом $(e_1, 0), (0, e_1), \dots, (e_{2k}, 0), (0, e_{2k})$, а в правой части — базисом $(e_1, 0), \dots, (e_{2k}, 0), (0, e_1), \dots, (0, e_{2k})$. Поэтому для ориентируемых расслоений получаем изоморфизм $(\xi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong (-1)^{\frac{2k(2k-1)}{2}} \xi \oplus \xi \cong (-1)^k \xi \oplus \xi$. Отсюда

$$p_k(\xi) = (-1)^k c_{2k}(\xi_{\mathbb{C}}) = (-1)^k e((\xi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}) = e(\xi \oplus \xi) = e(\xi)^2. \quad \square$$

Напомним, что через $S\xi$ обозначается пространство сферического расслоения $S\xi \rightarrow B$ со слоем S^{n-1} .

Теорема 5.14 (точная последовательность Гизина). *Пусть $\xi = (p: E \rightarrow B)$ — ориентированное n -мерное векторное расслоение и $p: S\xi \rightarrow B$ — соответствующее расслоение сфер. Имеет место точная последовательность*

$$\dots \rightarrow H^i(B) \xrightarrow{\cdot e(\xi)} H^{i+n}(B) \xrightarrow{p^*} H^{i+n}(S\xi) \rightarrow H^{i+1}(B) \xrightarrow{\cdot e(\xi)} \dots$$

Доказательство. Рассматривая точную последовательность пары $(E, E \setminus B)$, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & H^j(E, E \setminus B) & \longrightarrow & H^j(E) & \longrightarrow & H^j(E \setminus B) & \longrightarrow & H^{j+1}(E, E \setminus B) & \longrightarrow \\
& \cong \uparrow \cdot \theta(\xi) & & \cong \uparrow & & \cong \uparrow & & \cong \uparrow \cdot \theta(\xi) & \\
\longrightarrow & H^{j-n}(B) & \xrightarrow{\cdot e(\xi)} & H^j(B) & \longrightarrow & H^j(S\xi) & \longrightarrow & H^{j+1-n}(B) & \longrightarrow
\end{array}$$

где левая стрелка — изоморфизм Тома, а два другие вертикальные изоморфизма индуцированы гомотопическими эквивалентностями. Нижняя строка — требуемая точная последовательность. $\square$

Множество всех ориентированных k -мерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^N$ называется *ориентированным многообразием Грассмана* и обозначается $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^N)$. Имеется двулистное накрытие $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^N) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^N)$, задаваемое забыванием ориентации подпространств. Также определён бесконечномерный ориентированный грассманиан $\tilde{G}_k = \tilde{G}_k(\mathbb{R}^\infty)$ и тавтологическое ориентированное k -мерное расслоение $\tilde{\gamma}^k$ над $\tilde{G}_k$. Для ориентированных расслоений имеет место аналог теоремы 2.15: ориентированное расслоение ξ классифицируется отображением базы $\tilde{f}: B \rightarrow \tilde{G}_k$, т.е. $\xi \cong \tilde{f}^* \tilde{\gamma}^k$, и гомотопные отображения $\tilde{f}$ индуцируют изоморфные ориентированные расслоения. В связи с этим пространство $\tilde{G}_k$ называется *классифицирующим пространством* ориентированных k -мерных расслоений и обозначается $BSO(k)$.

Имеем двулистное накрытие $BSO(n) \rightarrow BO(n)$. Таким образом, ориентация вещественного n -мерного расслоения ξ над B — это в точности класс гомотопии поднятия классифицирующего отображения $f: B \rightarrow BO(n)$ до отображения $\tilde{f}: B \rightarrow BSO(n)$:

$$\begin{array}{ccc} & & BSO(n) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & BO(n) \end{array}$$

Теорема 5.15. Пусть R — коммутативное кольцо, содержащее $\frac{1}{2}$. Тогда

$$H^*(BSO(n); R) \cong \begin{cases} R[p_1, \dots, p_k], & \text{если } n = 2k + 1, \\ R[p_1, \dots, p_{k-1}, e], & \text{если } n = 2k, \end{cases}$$

где $p_i = p_i(\tilde{\gamma}^n)$ и $e = e(\tilde{\gamma}^n)$ — универсальные характеристические классы и $p_k = e^2$ при $n = 2k$.

Доказательство. В доказательстве все когомологии рассматриваются с коэффициентами в R . Аналогично предложению 5.12 доказывается, что кольцо $H^*(BSO(n))$ содержит подкольцо $R[p_1, \dots, p_k]$ или $R[p_1, \dots, p_{k-1}, e]$ в зависимости от чётности n . Далее используем индукцию по n . При $n = 1$ имеем двулистное накрытие $BSO(1) = S^\infty \rightarrow \mathbb{R}P^\infty = BO(1)$. Поэтому $H^*(BSO(1)) \cong R$. При $n = 2$ имеем $BSO(2) = BU(1)$, так как ориентация двумерного подпространства эквивалентна заданию в нём комплексной структуры. Поэтому $H^*(BSO(2)) \cong H^*(BU(1)) \cong R[c_1] = R[e]$.

Чтобы применить шаг индукции, рассмотрим универсальное ориентированное расслоение $E\tilde{\gamma}^n \rightarrow BSO(n)$. Пространство расслоения сфер $S\tilde{\gamma}^n$ представляет собой множество векторов v длины 1 в ориентированных n -мерных подпространствах в $\mathbb{R}^\infty$. Рассмотрим отображение $S\tilde{\gamma}^n \rightarrow BSO(n-1)$, сопоставляющее вектору v его ортогональную ориентированную $(n-1)$ -мерную плоскость $v^\perp$. Тогда $S\tilde{\gamma}^n \rightarrow BSO(n-1)$ — локально тривиальное расслоение со стягиваемым слоем S^∞ , и поэтому $S\tilde{\gamma}^n \simeq BSO(n-1)$. Индуцированный проекцией $S\tilde{\gamma}^n \rightarrow BSO(n)$ гомоморфизм $H^*(BSO(n)) \rightarrow H^*(S\tilde{\gamma}^n)$ превращается в гомоморфизм $H^*(BSO(n)) \rightarrow H^*(BSO(n-1))$, индуцированный отображением $BSO(n-1) \rightarrow BSO(n)$, классифицирующим расслоение $\tilde{\gamma}^{n-1} \oplus \underline{\mathbb{R}}$. Поэтому этот гомоморфизм переводит классы $p_i \in H^{4i}(BSO(n))$ в соответствующие классы $p_i \in H^{4i}(BSO(n-1))$ для $1 \leq i < \frac{n}{2}$.

Пусть $n = 2k$. Рассмотрим последовательность Гизина расслоения $E\tilde{\gamma}^n \rightarrow BSO(n)$:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{2i+2k-1}(S\tilde{\gamma}^n) \rightarrow H^{2i}(BSO(2k)) \xrightarrow{\cdot e} H^{2i+2k}(BSO(2k)) \rightarrow H^{2i+2k}(S\tilde{\gamma}^n) \rightarrow \\ \rightarrow H^{2i+1}(BSO(2k)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Здесь $H^{2i+2k-1}(S\tilde{\gamma}^n) = H^{2i+2k-1}(BSO(2k-1)) = 0$ по предположению индукции. Гомоморфизм $H^{2i+2k}(BSO(2k)) \rightarrow H^{2i+2k}(S\tilde{\gamma}^n) = H^{2i+2k}(BSO(2k-1))$ сюръективен, так как $H^*(BSO(2k-1)) = R[p_1, \dots, p_{k-1}]$ по предположению индукции и $p_i \in H^*(BSO(2k-1))$ накрывается соответствующим $p_i \in H^*(BSO(2k))$. В итоге получаем короткую точную последовательность в верхней строке диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{2i}(BSO(2k)) & \xrightarrow{\cdot e} & H^{2i+2k}(BSO(2k)) & \xrightarrow{\varphi} & H^{2i+2k}(BSO(2k-1)) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & R[p_1, \dots, p_{k-1}, e]^{2i} & \xrightarrow{\cdot e} & R[p_1, \dots, p_{k-1}, e]^{2i+2k} & \longrightarrow & R[p_1, \dots, p_{k-1}]^{2i+2k} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Чтобы завершить шаг индукции, докажем, что средняя вертикальная стрелка — эпиморфизм. Применив вспомогательную индукцию по размерности группы ко-гомологий, можно считать, что левая вертикальная стрелка сюръективна. Пусть $a \in H^{2i+2k}(BSO(2k))$. Запишем $\varphi(a) = Q(p_1, \dots, p_{k-1})$, где Q — многочлен. Тогда $\varphi(a - Q(p_1, \dots, p_{k-1})) = 0$, следовательно, $a - Q(p_1, \dots, p_{k-1}) = R(p_1, \dots, p_{k-1}, e) \cdot e$, где R — многочлен. Итак, $a = Q(p_1, \dots, p_{k-1}) + R(p_1, \dots, p_{k-1}, e) \cdot e \in R[p_1, \dots, p_{k-1}, e]$ и средняя стрелка сюръективна.

Пусть теперь $n = 2k + 1$. Тогда $e(\tilde{\gamma}^n) = 0$, так как n нечётно и $R \ni \frac{1}{2}$. Поэтому гомоморфизм умножения на e в точной последовательности Гизина расслоения $E\tilde{\gamma}^n \rightarrow BSO(n)$ нулевой, и она распадается в короткие точные последовательности:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{2i}(BSO(2k+1)) & \longrightarrow & H^{2i}(BSO(2k)) & \xrightarrow{\varphi} & H^{2i-2k}(BSO(2k+1)) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \parallel & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & R[p_1, \dots, p_k]^{2i} & \xrightarrow{\psi} & R[p_1, \dots, p_{k-1}, e]^{2i} & \longrightarrow & R[p_1, \dots, p_k]^{2i-2k} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Равенство посередине — по предположению индукции. Имеем $\psi(p_i) = p_i$ при $i < k$ и $\psi(p_k) = e^2$, здесь $e = e(\tilde{\gamma}^{2k})$. Тогда $R[p_1, \dots, p_{k-1}, e]$ — свободный $R[p_1, \dots, p_k]$ -модуль с образующими 1 и e , и из сравнения рангов получаем $H^{2i}(BSO(2k+1)) = R[p_1, \dots, p_k]^{2i}$. $\square$

Следствие 5.16. *Любой характеристический класс ориентированных n -мерных расслоений с коэффициентами в $R \ni \frac{1}{2}$ есть многочлен от классов Понтрягина u , если n чётно, от класса Эйлера.*

Задачи и упражнения.

5.17. Пусть V — комплексное векторное пространство. Докажите, что формула $j(x, y) = (-y, x)$ задаёт на $V \oplus \bar{V}$ естественную структуру кватернионного пространства (называемого кватернионизацией V).

5.18. Вычислите классы Понтрягина касательного расслоения кватернионного проективного пространства $\mathbb{H}P^n$. [Указание: пример 5.7.]

5.19. Докажите, что $p_i(\xi) = w_{2i}^2(\xi) \pmod{2}$ для вещественного расслоения ξ .

5.20. Докажите изоморфизм

$$H^*(BSO(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, \dots, w_n],$$

где $w_i = w_i(\tilde{\gamma}^n)$. Докажите, что при гомоморфизме

$$H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots, w_n] \rightarrow \mathbb{Z}_2[w_2, \dots, w_n] = H^*(BSO(n); \mathbb{Z}_2),$$

индуцированном накрытием $BSO(n) \rightarrow BO(n)$, класс w_1 переходит в нуль, и w_i переходит в w_i при $i \geq 2$. [Указание: используйте аналог точной последовательности Гизина с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ для двулистного накрытия — расслоения сфер одномерного вещественного расслоения.]

5.21. Докажите, что если $R \ni \frac{1}{2}$, то имеет место изоморфизм

$$H^*(BO(n); R) \cong R[p_1, \dots, p_{[\frac{n}{2}]}].$$

Опишите гомоморфизм $H^*(BO(n); R) \rightarrow H^*(BSO(n); R)$, индуцированный накрытием $BSO(n) \rightarrow BO(n)$.