ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 1: ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И PL-МНОГООБРАЗИЯ, ОРИЕНТИРУЕМОСТЬ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Вычислите группы локальных гомологий $H_i(X, X \setminus x)$ для графа X и его произвольной точки x.

2. Докажите, что S^n, T^n, $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ являются замкнутыми многообразиями, а шар D^n и полноторие $D^2 \times S^1$ являются многообразиями с краем.

PL-сферой рамерности n называется симплициальный комплекс, некоторое подразбиение которого изоморфно подразбиению границы $(n+1)$-мерного симплекса. *PL-многообразием* рамерности n называется симплициальный комплекс $\mathcal{K}$, для которого линк $\operatorname{lk}\sigma = \{\tau \in \mathcal{K} \colon \tau \cup \sigma \in \mathcal{K}, \tau \cap \sigma = \varnothing\}$ каждого непустого симплекса σ является PL-сферой размерности $n - 1 - \dim \sigma$.

3. Докажите, что если $\mathcal{K}$ — PL-многообразие, то $|\mathcal{K}|$ — многообразие.

4. Докажите, что граница симплициального многогранника является PL-сферой.

5. Докажите, что если $\mathcal{K}$ — n-мерное PL-многообразие, то $H_i(|\mathcal{K}|, |\mathcal{K}| \setminus x) = 0$ при $i \neq n$ и $H_n(|\mathcal{K}|, |\mathcal{K}| \setminus x) = \mathbb{Z}$, для любой точки $x \in |\mathcal{K}|$ (т. е. $|\mathcal{K}|$ является *гомологическим многообразием*).

6. Докажите, что если $|\mathcal{K}|$ — триангуляция n-мерного многообразия, то для любого непустого i-мерного симплекса σ линк $\operatorname{lk}_{\mathcal{K}} \sigma$ имеет гомологии как у $(n - i - 1)$-мерной сферы.

7. Докажите, что связное PL-многообразие $\mathcal{K}$ размерности n *сильно связно*, т. е. любой $(n-1)$-симплекс содержится в точности в двух n-симплексах, и любые два n-симплекса можно соединить цепочкой из n-симплексов, в которой любые два последовательных n-симплекса имеют общую $(n-1)$-мерную грань.

8. Докажите, что любая триангуляция связного многообразия сильно связна в смысле предыдущей задачи.

9. Докажите, что если связное PL-многообразие ориентируемо, то на нём имеется в точности две ориентации.

Для каждого симплекса $\sigma \in \mathcal{K}$ определим «барицентрическую звезду» как следующий подкомплекс в барицентрическом подразделении $\mathcal{K}'$:

$$\sigma^* = \big\{(\sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \ldots) \in \mathcal{K}' \colon \sigma \subset \sigma_1\big\}.$$

Определим также

$$\partial\sigma^* = \big\{(\sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \ldots) \in \mathcal{K}' \colon \sigma \subsetneq \sigma_1\big\}, \quad \sigma^\circ = \sigma^* \setminus \partial\sigma^*.$$

10. Пусть $\mathcal{K}$ — PL-многообразие. Докажите, что «открытые барицентрические звёзды» σ° симплексов $\sigma \in \mathcal{K}$ образуют клеточное разбиение пространства $|\mathcal{K}|$.

Date: 14 февраля 2019 г.

ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 2: МНОГООБРАЗИЯ, ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПУАНКАРЕ

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Пусть X — топологическое n-многообразие, $\mu_x \in H_n(X, X \setminus x)$ — локальная ориентация. Определим

$$\widetilde{X} = \{(x, \mu_x)\colon x \in X,\ \mu_x \in H_n(X, X \setminus x) \text{ — локальная ориентация в точке } x\}.$$

Введите топологию на X и докажите, что $\widetilde{X}$ — ориентируемое многообразие, а проекция $\widetilde{X} \to X$, $(x, \mu_x) \mapsto x$, является двулистным накрытием. Оно называется *ориентирующим накрытием* многообразия X.

2. Докажите, что многообразия S^n, T^n, $\mathbb{C}P^n$ ориентируемы. При каких n ориентируемо $\mathbb{R}P^n$?

3. Определим действие группы $\mathbb{Z}_7$ на S^5 формулой

$$\tau \cdot (z_0, z_1, z_2) = (e^{\frac{2\pi i}{7}} z_0, e^{\frac{2\pi i \cdot 2}{7}} z_1, e^{\frac{2\pi i \cdot 5}{7}} z_2),$$

где $\tau \in \mathbb{Z}_7$ — образующая группы. Вычислите группы гомологий $S^5/\mathbb{Z}_7$

а) с коэффициентами в $\mathbb{Z}$;

б) с коэффициентами в $\mathbb{Z}_7$.

4. *Связной суммой* $M\#N$ топологических многообразий M и N одной размерности n называется многообразие, получаемое вырезанием малых открытых шаров из M и N с последующим отождествлением их граничных сфер путём некоторого гомеоморфизма $S^{n-1} \xrightarrow{\cong} S^{n-1}$. Насколько выбор этого гомеоморфизма влияет на топологический тип результата — связной суммы?
Гомеоморфны ли многообразия

а) $S^2 \times S^2$ и $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$?

б) $S^2 \times S^2$ и $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$, где $\overline{\mathbb{C}P^2}$ обозначает $\mathbb{C}P^2$ с обращённой ориентацией?

5. Докажите, что если n-мерные многообразия M и N замкнуты и ориентируемы, то $H_i(M\#N) = H_i(M) \oplus H_i(N)$ при $0 < i < n$. Как выглядит соответствующая формула в неориентируемом случае?

6. Докажите, что для замкнутых n-мерных многообразий M и N имеет место формула для эйлеровой характеристики $\chi(M\#N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(S^n)$.

7. Пусть S_g — замкнутая ориентируемая поверхность рода g. Докажите, что отображение $S_g \to S_h$ степени 1 существует тогда и только тогда, когда $g \geqslant h$.

8. Вычислите кольцо когомологий

а) дополнения до объединения координатных плоскостей $x_1 = x_3 = 0$ и $x_2 = x_4 = 0$ в $\mathbb{R}^4$;

б) дополнения до объединения координатных плоскостей $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$, $x_3 = x_5 = 0$, $x_4 = x_1 = 0$ и $x_5 = x_2 = 0$ в $\mathbb{R}^5$;

в) дополнения до объединения координатных плоскостей $z_1 = z_3 = 0$ и $z_2 = z_4 = 0$ в $\mathbb{C}^4$;

г)* дополнения до объединения координатных плоскостей $z_1 = z_3 = 0$, $z_2 = z_4 = 0$, $z_3 = z_5 = 0$, $z_4 = z_1 = 0$ и $z_5 = z_2 = 0$ в $\mathbb{C}^5$.

Date: 21 февраля 2019 г.

ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 3: МНОГООБРАЗИЯ, ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПУАНКАРЕ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Докажите следующие свойства, связывающие $\smile$- и $\frown$-произведения:

а) $f_*(\alpha) \frown \varphi = f_*(\alpha \frown f^*(\varphi))$ для $f\colon X \to Y$, $\alpha \in H_k(X)$, $\varphi \in H^\ell(Y)$;

б) $\alpha \frown (\varphi \smile \psi) = (\alpha \frown \varphi) \frown \psi$ для $\alpha \in H_k(X)$, $\varphi \in H^\ell(X)$, $\psi \in H^m(X)$.

2. Пусть M^m — замкнутое ориентированное многообразие, а $i\colon N^n \hookrightarrow M^m$ — вложение замкнутого ориентированного подмногообразия. Пусть $x \in H^{m-n}(M)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к $i_*[N] \in H_n(M)$. Докажите, что для любого класса когомологий $y \in H^n(M)$ имеет место формула

$$\langle i^*y, [N]\rangle = \langle x \cdot y, [M]\rangle.$$

3. Докажите, что $H^i_c(X) = \varinjlim H^i(X, X-K)$, где прямой предел берётся по всем гомоморфизмам $H^i(X, X-K) \to H^i(X, X-L)$, соответствующим вложениям компактных подмножеств $K \subset L$ в X.

4. Вычислите $H^i_c(\mathbb{R}^n)$ для всех i.

5. Пусть $X = \bigcup_i U_i$ — бесконечное объединение последовательности открытых подмножеств $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$, причём любое компактное подмножество $K \subset X$ содержится в некотором U_i. Докажите, что $H_k(X) = \varinjlim H_k(U_i)$.

6. Пусть M — компактное n-мерное ориентируемое многообразие с краем ∂M. Докажите *изоморфизмы двойственности Пуанкаре–Лефшеца*

$$D_M = [M] \frown\, : H^k(M, \partial M) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M),$$
$$H^k(M) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M, \partial M),$$

где $[M] \in H_n(M, \partial M)$ — фундаментальный класс.

7. Докажите, что компактное многообразие не ретрагируется на свой край.

8. Пусть K — компактное подмножество в сфере S^n, причём вложение $K \subset S^n$ является корасслоением, т. е. удовлетворяет свойству продолжения гомотопии. Докажите *изоморфизмы двойственности Александера–Понтрягина*:

$$\widetilde{H}_i(S^n - K) \cong \widetilde{H}^{n-i-1}(K).$$

(Эти изоморфизмы имеют место и без ограничения на вложение, если K — локально стягиваемое компактное подмножество.)

9. Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, \ldots, m\}$, отличный от полного симплекса Δ^{m-1}. Определим *двойственный комплекс*

$$\widehat{\mathcal{K}} = \{I \subset [m]\colon [m] \setminus I \notin \mathcal{K}\}.$$

Положим $\widehat{I} = [m] \setminus I$. Для каждого $I \notin \mathcal{K}$ (т. е. $\widehat{I} \in \widehat{\mathcal{K}}$) докажите изоморфизмы

$$\widetilde{H}_j(\mathcal{K}_I) \cong \widetilde{H}^{|I|-3-j}\big(\mathrm{lk}_{\widehat{\mathcal{K}}}\, \widehat{I}\big),$$

где $\mathcal{K}_I = \{J \in \mathcal{K}\colon J \subset I\}$ — ограничение $\mathcal{K}$ на I. В частности, для $I = [m]$ получаем

$$\widetilde{H}_j(\mathcal{K}) \cong \widetilde{H}^{m-3-j}(\widehat{\mathcal{K}}).$$

Это — комбинаторная версия двойственности Александера–Понтрягина.

Date: 28 февраля 2019 г.

ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 4: ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

ЗАМЕНЯЮЩИЙ ЛЕКТОР: Г. Д. СОЛОМАДИН

1. Приведите пример локально тривиального расслоения (E, p, B) со слоем $\mathbb{R}^n$, не являющегося векторным.

2. Даны векторные расслоения ξ, η, γ и непрерывное отображение $f: Y \to X$.

а) Введите топологию и докажите, что векторными являются расслоения $\xi\oplus\eta$, $\xi\otimes\eta$, $\mathscr{H}om\ (\xi,\eta)$, ξ^*, $f^*\xi$;

б) Постройте канонические изоморфизмы $\xi\oplus\eta \simeq \eta\oplus\xi$, $\xi\oplus\eta \simeq \Delta^*(\xi\times\eta)$, где $\Delta : X \to X \times X$ диагональ, $\mathscr{H}om(\xi\oplus\eta,\gamma) \simeq \mathscr{H}om(\xi,\gamma)\oplus\mathscr{H}om(\eta,\gamma)$, $\mathscr{H}om(\xi,\eta) \simeq \xi\otimes\eta^*$.

3. Векторное $\mathbb{C}$-расслоение ξ ранга n послойно задает $\mathbb{R}$-расслоение $\xi_{\mathbb{R}}$ ранга $2n$ (овеществление). Наоборот, векторное $\mathbb{R}$-расслоение η ранга n послойно задает $\mathbb{C}$-расслоение $\xi\otimes\mathbb{C}$ ранга n (комплексификация). Послойно зададим сопряженное действие $\mathbb{C}$ на слоях ξ, получая расслоение $\overline{\xi}$ (сопряжение)

а) Докажите, что векторными являются расслоения $\xi_{\mathbb{R}}$, $\xi\otimes\mathbb{C}$, $\overline{\xi}$;

б) Постройте канонические изоморфизмы $(\eta\otimes\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \simeq \eta\oplus\eta$, $\xi_{\mathbb{R}}\otimes\mathbb{C} \simeq \xi\oplus\overline{\xi}$, $\overline{\xi}_{\mathbb{R}} \simeq \xi_{\mathbb{R}}$, $\overline{\xi} \simeq \xi^*$. (Указание: в последнем случае воспользуйтесь ортогональным расслоением и изоморфизмами из 2.)

4. Для *тавтологического расслоения* $\gamma_{n,m} = (E, p, G_n(\mathbb{C}^m))$ над $G_n(\mathbb{C}^m)$ по определению $E = \{(\Pi, v)|\ v \in \Pi\} \subset G_n(\mathbb{C}^m)\times\mathbb{C}^m$, p есть ограничение естественной проекции $G_n(\mathbb{C}^m)\times\mathbb{C}^m \to G_n(\mathbb{C}^m)$.

а) Найдите в терминах стандартных аффинных карт на $\mathbb{C}P^m$ склеивающие коциклы для $\eta = \gamma_{1,m}$;

б)* Проверьте, что $\gamma_{n,m}$ векторное расслоение.

5. На тотальном пространстве $\mathbb{K}$-векторного расслоения (E, B, p) над компактной хаусдорфовой B введите ортогональную или эрмитову метрику при $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, соответственно. (Указание: воспользуйтесь разбиением единицы, подчиненным тривиализующему открытому покрытию B.)

6. Дано $\mathbb{K}$-векторное расслоение $\xi = (E, B, p)$ над компактной хаусдорфовой B $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C})$. Обозначим пространство сечений (т.е. множество непрерывных отображений $s:\ B \to E$ т.ч. $p\circ s = Id$) расслоения ξ над X через $\Gamma(\xi) = \Gamma(\xi, B)$. Рассмотрим непрерывное отображение

$$ev^{\xi}:\ B\times\Gamma(\xi) \to E,\ (x, s) \to s(x).$$

Докажите, что существует *конечномерное* подпространство $V \subset \Gamma(\xi)$ т.ч. ограничение ev^{ξ} на $B \times V$ эпиморфно.

7. Даны склеивающие коциклы $(U_i, g_{j,i})$, $(U_r, h_{s,r})$ векторных расслоений ξ, η и непрерывное отображение $f:\ Y \to X$. Выразите в этих терминах склеивающие коциклы следующих векторных расслоений: (а) $\xi\oplus\eta$, (б) $\xi\otimes\beta$, (в) $\mathscr{H}om\ (\xi,\eta)$, (г) ξ^*, (д) $f^*\xi$.

Date: 7 марта 2019 г.

8. (*Сцепление векторных расслоений*) Пусть дано конечное покрытие $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^k$ компактного хаусдорфова X, $\mathbb{K}$-векторные расслоения $\xi_i = (E_i, U_i, p_i)$ и изоморфизмы $g_{j,i} : \ \xi_i|_{U_i \cap U_j} \to \xi_j|_{U_i \cap U_j}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R},\ \mathbb{C}$), удовлетворяющие для любых различных i, j, k *соотношению коциклов*

$$g_{k,j} \cdot g_{j,i} = g_{k,i} \tag{1}$$

при ограничении на множество $U_i \cap U_j \cap U_k$. Определите векторное расслоение $\xi = (E, X, p)$ и изоморфизмы $g_i : \ \xi_i \to \xi|_{U_i}$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\xi_i|_{U_i \cap U_j} \arrow[rr, "g_{ji}"] \arrow[dr, "g_i|_{U_i \cap U_j}"'] & & \xi_j|_{U_i \cap U_j} \arrow[dl, "g_j|_{U_i \cap U_j}"] \\
& \xi|_{U_i \cap U_j} &
\end{tikzcd}.$$

Пусть $G = GL_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. *$G$-коцикл* пространства X задается открытым покрытием (U_i) пространства X и непрерывными отображениями $g_{i,j} : \ U_i \cap U_j \to G$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R},\ \mathbb{C}$), удовлетворяющими (1). Два коцикла $(U_i, g_{i,j})$, $(V_r, h_{r,s})$ называются *эквивалентными*, если заданы непрерывные отображения $g_i^r : \ U_i \cap V_j \to G$, удовлетворяющие

$$g_j^s(x) \cdot g_{j,i} \cdot g_i^r(x)^{-1} = h_{s,r}(x), \ x \in U_i \cap U_j \cap V_r \cap V_s.$$

9. Проверьте, что это отношение эквивалентности на множестве G-коциклов пространства X.

10. Обозначим множество классов эквивалентности G-коциклов пространства X через $H^1(X; G)$. Постройте биекцию $H^1(X; G) \to Vect_n(X)$, где $Vect_n(X)$ обозначает множество классов изоморфизма векторных расслоений ранга n над X.

11. (*Теорема Свана*) Дано векторное расслоение ξ над компактным хаусдорфовым X. Формула $(f \cdot s)(x) = f(x) \cdot s(x)$ задает на пространстве глобальных сечений $\Gamma(\xi, X)$ структуру модуля над кольцом непрерывных функций $C(X)$ на X. Напомним, что модуль называется проективным, если является прямым слагаемым свободного.

а) Докажите, что $\Gamma(\xi, X)$ проективный $C(X)$-модуль;

б) Докажите, что для тривиальных расслоений ξ, η над X отображение $\Gamma : \mathrm{Hom}(\xi, \eta) \to \mathrm{Hom}_{C(X)}(\Gamma(\xi), \Gamma(\eta))$ биективно. Докажите, что Γ эквивалентность из категории тривиальных векторных расслоений в категорию конечно порожденных свободных модулей над $C(X)$;

в) Проверьте, что Γ является эквивалентностью из категории $Vect\ X$ в категорию $PMod_{C(X)}^{fg}$ конечно порожденных проективных модулей над $C(X)$. Докажите, что Γ является эквивалентностью. Указание: перейдите от б) к общему случаю, используя проекцию из тривиального расслоения в ξ.

ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 5: ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Докажите, что на сфере S^{2n+1} существует векторное поле без нулей.

2. Докажите, что на сфере S^{11} существуют три линейно независимых векторных поля без нулей.

3. Докажите, что сфера S^{2n} не параллелизуема при $n \geqslant 1$.

4. Пусть ξ, γ — комплексные векторные расслоения над клеточным пространством X, причём γ одномерно. Докажите, что расслоения $\mathbb{C}P(\xi \otimes \gamma)$ и $\mathbb{C}P(\xi)$ изоморфны. То же для вещественных векторных расслоений и проективизаций.

5. Опишите функции склейки для одномерного расслоения $\gamma^{\otimes k}$ над $\mathbb{C}P^n$, где γ — тавтологическое расслоение, $k \in \mathbb{Z}$, и при отрицательных k подразумевается тензорная степень расслоения $\overline{\gamma} \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \underline{\mathbb{C}})$. Начните со случая $\mathbb{C}P^1$.

6. Докажите, что $\mathcal{T}Gr(k,N) \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^{\perp})$, где γ есть k-мерное тавтологическое расслоение над (вещественным или комплексным) грассманианом $Gr(k,N)$, а $\gamma^{\perp}$ есть $(N-k)$-мерное расслоение ортогональных плоскостей.

7. Рассмотрим отображение $q\colon \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1} \cong S^{2n}$. Докажите, что $q^*\alpha = v^n$, где $\alpha \in H^{2n}(S^{2n})$ — стандартная образующая, происходящая из ориентации $\mathbb{C}P^n$, а $v \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к $[\mathbb{C}P^{n-1}] \in H_{2n-2}(\mathbb{C}P^n)$.

8.

а) Приведите пример локально тривиального расслоения $F \to E \to B$, для которого не выполнено второе из условий теоремы Лере–Хирша (т. е. $H^*(F;R)$ является конечно порождённым свободным R-модулем, но не существует набора классов в $H^*(E;R)$, которые ограничиваются на базис в когомологиях каждого слоя).

б) Приведите пример локально тривиального расслоения $F \to E \to B$, для которого выполнены условия теоремы Лере–Хирша, но отсутствует изоморфизм колец $H^*(E;R) \cong H^*(B;R) \otimes H^*(F;R)$.

9. Докажите изоморфизмы колец

$$H^*(U(n);\mathbb{Z}) \cong \Lambda[u_1, u_2, \dots, u_n], \quad \dim u_i = 2i-1,$$
$$H^*(SU(n);\mathbb{Z}) \cong \Lambda[u_2, \dots, u_n], \quad \dim u_i = 2i-1$$

(справа стоят внешние алгебры от нечётномерных образующих). *Указание:* используйте расслоение $U(n-1) \to U(n) \to S^{2n-1}$ и теорему Лере–Хирша. Что можно сказать про когомологии группы $O(n)$, используя тот же метод?

Date: 14 марта 2019 г.

ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 6: ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ЧЖЕНЯ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Вычислите полный характеристический класс Чженя касательного расслоения многообразия $\mathbb{C}P^n$.

2.

а) Вычислите кольцо когомологий многообразия $L(n,m) = \mathbb{C}P(\eta \oplus \underline{\mathbb{C}}^m)$, где η — тавтологическое одномерное расслоение над $\mathbb{C}P^n$, а $\underline{\mathbb{C}}^m$ — тривиальное m-мерное расслоение над $\mathbb{C}P^n$.

б) Вычислите кольцо когомологий многообразия $\mathbb{C}P(\eta^{\otimes i_1} \oplus \ldots \oplus \eta^{\otimes i_k})$ для произвольных целых чисел $i_1, \ldots, i_k$.

в)* Вычислите полный характеристический класс Чженя касательного расслоения многообразия $\mathbb{C}P(\eta^{\otimes i_1} \oplus \ldots \oplus \eta^{\otimes i_k})$.

3. Пусть $0 \leqslant k \leqslant l$ — натуральные числа. Определим *многообразие Милнора*

$$H_{kl} = \big\{([z_0 : \cdots : z_k], [w_0 : \cdots : w_l]) \in \mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l \colon z_0 w_0 + \ldots + z_k w_k = 0\big\}.$$

а) Докажите, что H_{ij} является сечением образа *вложения Серге*

$$\mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l \hookrightarrow \mathbb{C}P^{(k+1)(l+1)-1},$$
$$([z_0 : \cdots : z_k], [w_0 : \cdots : w_l]) \mapsto [z_0 w_0 : \cdots : z_i w_j : \cdots : z_k w_l]$$

гиперплоскостью $H \subset \mathbb{C}P^{(k+1)(l+1)-1}$ общего положения.

б) Вычислите кольцо когомологий многообразия H_{ij}.

4. Докажите, что структурную группу комплексного n-мерного расслоения ξ можно редуцировать к $SU(n)$ тогда и только тогда, когда $c_1(\xi) = 0$. *Указание:* редукция структурной группы соответствует поднятию классифицирующего отображения в $BU(n)$ до отображения в $BSU(n)$.

5. Пусть ξ — m-мерное, а η — n-мерное комплексные расслоения. Пользуясь принципом расщепления, выразите классы Чженя $c_1(\xi \otimes \eta)$, $c_2(\xi \otimes \eta)$, $c_1(S^2\xi)$, $c_2(S^2\xi)$, $c_1(\Lambda^2\xi)$, $c_2(\Lambda^2\xi)$ через классы Чженя расслоений ξ и η. Здесь $S^i\xi$ обозначает i-симметрическую степень расслоения ξ, а $\Lambda^i\xi$ обозначает i-ю внешнюю степень.

6. Запишем $c_i(\xi) = \sigma_i(x_1, \ldots, x_n)$ (i-я симметрическая функция формальных переменных). Докажите, что полные классы Чженя симметрической и внешней степени расслоения ξ выражаются по формулам

$$c(\Lambda^k\xi) = \prod_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} (1 + (x_{i_1} + \ldots + x_{i_k})), \quad c(S^k\xi) = \prod_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n} (1 + (x_{i_1} + \ldots + x_{i_k})).$$

7. Пусть ξ — комплексное n-мерное расслоение над X и пусть $p\colon Fl(\xi) \to X$ — флагизация расслоения ξ. Докажите, что индуцированное $p^*(\xi)$ над $Fl(\xi)$ распадается в сумму одномерных $\gamma_1 \oplus \ldots \oplus \gamma_n$. Опишите ограничение каждого расслоения γ_i на слой $Fl(\mathbb{C}^n) \subset Fl(\xi)$ в терминах пространств, входящих во флаги.

8. Докажите, что числа Бетти (ранги групп целочисленных гомологий) многообразия флагов $F = Fl(\mathbb{C}^n)$ удовлетворяют соотношениям $\beta_{2i+1}(F) = 0$ и

$$\sum_i \beta_{2i}(F) t^{2i} = \prod_{i=1}^{n-1} (1 + t^2 + \ldots + t^{2i}).$$

Date: 21 марта 2019 г.

ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 7: ГРАССМАНИАНЫ И МНОГООБРАЗИЯ ФЛАГОВ, ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Задайте в явном виде образующими и соотношениями кольца целочисленных когомологий грассманианов $G_2(\mathbb{C}^4)$, $G_2(\mathbb{C}^5)$, $G_3(\mathbb{C}^5)$.

2. Пусть P — матрица размера $k \times N$. Обозначим через $p_{i_1,\ldots,i_k}$ минор, составленный из столбцов $i_1, \ldots, i_k$. Докажите *соотношения Плюккера*

$$\sum_{r=1}^{k+1} (-1)^r \, p_{i_1,\ldots,i_{k-1},j_r} \, p_{j_1,\ldots,\widehat{j_r},\ldots,j_{r+1}} = 0$$

для любых наборов различных индексов $(i_1, \ldots, i_{k-1})$ и $j_1, \ldots, j_{k+1}$.

3. Для каждого набора $s = (s_1, \ldots, s_k)$, $1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_k \leqslant N$ рассмотрим следующее подмножество в вещественном грассманиане:

$$e(s) = \{\pi \in G_k(\mathbb{R}^N) \colon \dim(\pi \cap \mathbb{R}^{s_i}) = i, \ \dim(\pi \cap \mathbb{R}^{s_i - 1}) = i - 1 \quad \text{для } i = 1, \ldots, k\}.$$

а) Убедитесь, что $e(s) \cap e(s') = \varnothing$ при $s \neq s'$ и $G_k(\mathbb{R}^n) = \bigcup_s e(s)$.

б) Докажите, что $e(s)$ гомеоморфно открытому шару размерности $(s_1 - 1) + (s_2 - 2) + \ldots + (s_k - k)$.

б) Докажите, что $\overline{e(s)} \subset \bigcup_{t<s} e(t)$, где $t = (t_1, \ldots, t_k) \leqslant s = (s_1, \ldots, s_k)$, если $t_i \leqslant s_i$ при $i = 1, \ldots, k$.

Отсюда следует, что $G_k(\mathbb{R}^n) = \bigcup_s e(s)$ — клеточное разбиение. Подмножества $e(s)$ называются *клетками Шуберта*, а их замыкания $\overline{e(s)}$ — *многообразиями Шуберта*. Для комплексного грассманиана $G_k(\mathbb{C}^N)$ то же верно с удвоением размерностей.

4. Докажите, что гомоморфизм $H^*(BU(n)) \to H^*(BT^n)$, индуцированный классифицирующим отображением $(\mathbb{C}P^\infty)^n = BT^n \to BU(n)$ произведения n тавтологических расслоений над $\mathbb{C}P^\infty$, переводит $H^*(BU(n)) = \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n]$ в подкольцо симметрических многочленов $\mathbb{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] \subset \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n] = H^*(BT^n)$, где $\deg t_i = 2$, а σ_i есть i-я элементарная симметрическая функция от $t_1, \ldots, t_n$.

5. Докажите, что кольцо когомологий многообразия флагов $Fl(\mathbb{C}^n)$ описывается следующим образом:

$$H^*(Fl(\mathbb{C}^n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]/(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

6. Пусть ξ — вещественное векторное расслоение. Докажите, что если $w(\xi) \neq 1$, то число $\min\{i \colon w_i(\xi) \neq 0\}$ есть степень двойки.

7. Докажите, что для комплексного расслоения ξ число $\min\{i \colon c_i(\xi) \neq 0\}$ может быть любым.

8. Пусть η — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^\infty$. Докажите, что не существует векторного расслоения ζ над $\mathbb{R}P^\infty$ такого, что $\eta \oplus \zeta$ тривиально.

9. Докажите, что если многообразие M^n можно погрузить в $\mathbb{R}^{n+1}$, то каждый класс $w_i(M)$ является степенью класса $w_1(M)$.

Date: 28 марта 2019 г.

ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 8: ОРИЕНТИРУЕМЫЕ РАССЛОЕНИЯ, КЛАСС ТОМА И КЛАСС ЭЙЛЕРА

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Докажите, что для пространства Тома $Th\,\xi = D\xi/S\xi$ вещественного векторного расслоения ξ имеем $Th(\xi \oplus \underline{\mathbb{R}}^k) \cong \Sigma^k\, Th\,\xi$, где $\underline{\mathbb{R}}^k$ — тривиальное расслоение над той же базой, а Σ^k — k-кратная надстройка.

2. Докажите, что пространство Тома $Th\,\xi$ вещественного (комплексного) векторного расслоения ξ над клеточным пространством гомеоморфно $\mathbb{R}P(\xi \oplus \underline{\mathbb{R}})/\mathbb{R}P(\xi)$ (соответственно, $\mathbb{C}P(\xi \oplus \underline{\mathbb{C}})/\mathbb{C}P(\xi)$).

3. Докажите, что пространство Тома тавтологического расслоения над $\mathbb{R}P^n$ (соответственно, над $\mathbb{C}P^n$) гомеоморфно $\mathbb{R}P^{n+1}$ (соответственно, $\mathbb{C}P^{n+1}$).

4. Докажите, что вещественное векторное расслоение ξ ориентируемо тогда и только тогда, когда $w_1(\xi) = 0$.

5. Докажите, что при гомоморфизме $H^n(B;\mathbb{Z}) \to H^n(B;\mathbb{Z}_2)$ класс Эйлера $e(\xi)$ ориентированного расслоения ξ переходит в класс Штифеля–Уитни $w_n(\xi)$.

6. Пусть η^n — тавтологическое расслоение над $BO(n) = G_n(\mathbb{R}^\infty)$. Докажите, что расслоение $\eta^n \oplus \eta^n$ ориентировано и $e(\eta^n \oplus \eta^n) \neq 0$.

7. Пусть ξ — комплексное n-мерное векторное расслоение и $\xi_{\mathbb{R}}$ — его овеществление. Докажите, что $e(\xi_{\mathbb{R}}) = c_n(\xi)$. *Указание:* это соотношение достаточно проверить для тавтологического расслоения над $BU(n)$.

Date: 4 апреля 2019 г.

ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 9: КЛАСС ЭЙЛЕРА И ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Пусть $i\colon M^m \to N^{m+k}$ — гладкое вложение замкнутых ориентированных многообразий с нормальным расслоением ν и классом Тома $\theta(\nu) \subset H^k(E\nu, (E\nu)_0)$, и пусть $j\colon (N, \varnothing) \to (N, N\backslash M)$ — вложение пар. Докажите, что класс $j^*\theta(\nu) \in H^k(N)$ двойствен по Пуанкаре к классу $i_*[M] \in H_m(N)$.
Указание: надо проверить, что $[N] \frown (j^*\theta(\nu)) = i_*[M]$, что эквивалентно соотношению $j_*[N] \frown \theta(\nu) = i_*[M]$. Проверьте это соотношение, воспользовавшись определением фундаментальных классов и класса Тома как единственных классов, которые при ограничении на $(N, N \setminus x)$, $(M, M \setminus x)$ и слой нормального расслоения ν дают канонические образующие в группах локальных (ко)гомологий.

2. Докажите, что при $n = 2^p$ проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ нельзя гладко вложить в $\mathbb{R}^{2n-1}$.

3. Пусть M^m — ориентированное многообразие. Рассмотрим отображение
$$j_x\colon (M, M \setminus x) \to \big(M \times M, (M \times M) \setminus \Delta(M)\big), \quad j_x(y) = (x, y),$$
где $\Delta\colon M \to M \times M$ — диагональное отображение. Пусть
$$\theta_\Delta \in H^m\big(M \times M, (M \times M) \setminus \Delta(M)\big)$$
— класс Тома. Докажите, что $j_x^*(\theta_\Delta) \in H^M(M, M\backslash x)$ — каноническая образующая, задаваемая ориентацией мнообразия M.

4. При каких n на сфере S^n существует нигде не обращающееся в нуль векторное поле? Тот же вопрос для $\mathbb{C}P^n$.

Date: 11 апреля 2019 г.

ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 10: КЛАССЫ ПОНТРЯГИНА

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Докажите, что для комплексного векторного расслоения ξ имеют место равенства $c_k(\xi) = w_{2k}(\xi_{\mathbb{R}}) \mod 2$ и $w_{2k+1}(\xi_{\mathbb{R}}) = 0$.

2. Докажите, что для кватернионного векторного расслоения ξ имеют место равенства $p_k(\xi) = (-1)^k c_{2k}(\xi_{\mathbb{C}})$ и $c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}}) = 0$.

3. Вычислите классы Понтрягина (касательного расслоения) $\mathbb{C}P^n$.

4*. Вычислите классы Понтрягина (касательного расслоения) $\mathbb{H}P^n$. *Указание.* Как и в комплексном случае, $\mathcal{T}\mathbb{H}P^n \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma_{\mathbb{H}}, \gamma_{\mathbb{H}}^{\perp})$. Однако $\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma_{\mathbb{H}}, \gamma_{\mathbb{H}})$ не является одномерным тривиальным кватернионным расслоением, а является нетривиальным вещественным 4-мерным расслоением.

5. Докажите, что для любого двулистного накрытия $\widetilde{B} \to B$ имеет место точная последовательность когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$:

$$\ldots \longrightarrow H^{k-1}(B) \xrightarrow{\cdot w_1} H^k(B) \longrightarrow H^k(\widetilde{B}) \longrightarrow H^k(B) \longrightarrow \ldots,$$

где w_1 — первый класс Штифеля–Уитни одномерного расслоения над B, ассоциированного с накрытием.

6. Докажите, что

$$H^*(BSO(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, \ldots, w_n],$$

где $w_i = w_i(\widetilde{\eta})$ — универсальные классы Штифеля–Уитни. *Указание:* используйте двулистное накрытие $BSO(n) \to BO(n)$, предыдущую задачу и вычисление $H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, \ldots, w_n]$.

7. Докажите, что если R — коммутативное кольцо, содержащее $\frac{1}{2}$, то

$$H^*(BO(n); R) \cong R[p_1, \ldots, p_{[\frac{n}{2}]}],$$

где $p_i = p_i(\eta)$ — универсальные классы Понтрягина. *Указание:* используйте двулистное накрытие $BSO(n) \to BO(n)$ и вычисление $H^*(BSO(n); R)$.

8. Для каждого разбиения $\omega = (i_1, \ldots, k_k)$ числа $n = i_1 + \ldots + i_k$ определим *число Штифеля–Уитни* компактного многообразия M^n:

$$w_\omega[M^n] = \langle w_{i_1} \cdots w_{i_k}(\mathcal{T}M), [M^n] \rangle \in \mathbb{Z}_2,$$

число Чженя компактного комплексного многообразия M^{2n}:

$$c_\omega[M^{2n}] = \langle c_{i_1} \cdots c_{i_k}(\mathcal{T}M), [M^{2n}] \rangle \in \mathbb{Z}$$

и *число Понтрягина* компактного ориентированного многообразия M^{4n}:

$$p_\omega[M^{4n}] = \langle p_{i_1} \cdots p_{i_k}(\mathcal{T}M), [M^{4n}] \rangle \in \mathbb{Z}.$$

Вычислите все числа Штифеля–Уитни пространства $\mathbb{R}P^n$, числа Чженя и Понтрягина пространства $\mathbb{C}P^n$.

9. Докажите, что если M^n является границей компактного многообразия W^{n+1}, то $w_\omega[M^n] = 0$ для любого разбиения ω. Аналогично, если M^{4n} является границей ориентированного компактного многообразия W^{4n+1}, то $p_\omega[M^{4n}] = 0$ для любого ω.

10. Докажите, что $\mathbb{R}P^{2n}$ и $\mathbb{C}P^{2n}$ не являются границами никакого компактного многообразия, а $\mathbb{R}P^{2n+1}$ и $\mathbb{C}P^{2n+1}$ являются границами компактных многообразий.

Date: 18 апреля 2019 г.

ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 11: СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАССЛОЕНИЯ

ЗАМЕНЯЮЩИЙ ЛЕКТОР: Г. Д. СОЛОМАДИН

1. Примените теорему Лере к СП фильтрации, чтобы:

а) Для пары $X \subset Y$ вывести точную последовательность пары в сингулярных гомологиях.

б) То же для тройки $X \subset Y \subset Z$.

в) Для конечного CW-комплекса X и его фильтрации остовами $\dots \subset X_k \subset \dots$, $X_k = \operatorname{sk}^k X$ показать изоморфизм клеточных и сингулярных гомологий X.

2. Для локально тривиального расслоения $\xi = (E, B, F, \pi)$ над односвязной базой B покажите, что композиции

$$H_p(E) \to F_pH_p(E)\big/F_{p-1}H_p(E) \simeq E^\infty_{p,0} \hookrightarrow E^2_{p,0} \simeq H_p(B;\ H_0(F)) \simeq H_p(B)$$

$$H_q(F) \to H_0(B;\ H_q(F)) \simeq E^2_{0,q} \twoheadrightarrow E^\infty_{p,0} \simeq F_0H_q(E)\big/F_{-1}H_q(E) \simeq H_q(E)$$

индуцированы проекцией $E \to B$ и вложением слоя $F \subset E$, соответственно.

3. В условиях предыдущей задачи, покажите, что $\chi(E) = \chi(F) \cdot \chi(B)$, где $\chi(X)$ равно эйлеровой характеристике топологического пространства X. Указание: воспользуйтесь СП расслоения и вычислением χ в цепях.

4. а) Вычислите кольцо $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$, пользуясь расслоением $S^{2n+1} \xrightarrow{S^1} \mathbb{C}P^n$

б) Вычислите когомологии проективного расслоения $\mathbb{P}(\xi) \to B$ над односвязной базой B.

в) Докажите, что группы $H^*(SU(n); \mathbb{Z})$ и $H^*(S^3 \times S^5 \times \dots \times S^{2n-1}; \mathbb{Z})$ изоморфны, пользуясь расслоением $SU(n) \overset{SU(n-1)}{\to} S^{2n-1}$.

г) Докажите изоморфизм колец из п.в). Указание: воспользуйтесь правилом Лейбница, чтобы показать вырождение дифференциалов на мультипликативных образующих СП в члене E_2.

5. (*Точные пары*) а) Рассмотрим точный комплекс градуированных $\mathbb{Z}$-модулей:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & A \arrow[dl, "g"] \\ & B \arrow[ul, "h"] & \end{tikzcd} .$$

Зададим дифференциал $d_1 = g \circ h : B \to B$. Покажите, что треугольник (*вторая производная пара*)

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "f'"] & & A' \arrow[dl, "g'"] \\ & B' \arrow[ul, "h'"] & \end{tikzcd} ,$$

корректно определен и является точным. Здесь $A' = f(A)$, $B' = \ker d_1/\operatorname{Im} d_1$, $f' = f|_A$, g' задается по формуле $g'(f(c)) = [g(c)]$, h' индуцирован h.

б) Пусть в предыдущем пункте модули биградуированны: $A = (A^{p,q})$, $B = (B^{p,q})$. Пусть f, g, h имеют бистепени $(-1, 1), (0, 0), (1, 0)$. Покажите, что бистепень дифференциала d_r в r-ой производной паре равна $(r, 1 - r)$.

Date: 25 апреля 2019 г.

ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 12: УМНОЖЕНИЕ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РАССЛОЕНИЯ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Выведите из спектральной последовательности гомологическую *точную последовательность Вана* для расслоения $p\colon E \to S^n$ с базой S^n:

$$\ldots \longrightarrow H_m(F) \longrightarrow H_m(E) \longrightarrow H_{m-n}(F) \longrightarrow H_{m-1}(F) \longrightarrow \ldots$$

2. Выведите из спектральной последовательности гомологическую и когомологическую *точную последовательность Гизина* для расслоения $p\colon E \to B$ со слоем S^n:

$$\ldots \longrightarrow H_{m-n}(B) \longrightarrow H_m(E) \longrightarrow H_m(B) \longrightarrow H_{m-n-1}(B) \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \longrightarrow H^{m-n-1}(B) \longrightarrow H^m(B) \longrightarrow H^m(E) \longrightarrow H^{m-n}(B) \longrightarrow \ldots$$

3. Рассмотрим многообразие $H_k = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \eta^{\otimes k})$, где $\underline{\mathbb{C}}$ обозначает тривиальное, а η — тавтологическое комплексное одномерное расслоение над $\mathbb{C}P^1$.

а) Вычислите кольцо целочисленных когомологий $H^*(H_k)$ и убедитесь, что кольца, соответствующие чётным и нечётным k, неизоморфны.

б) Докажите, что H_k диффеоморфно $S^2 \times S^2$ при чётном k и $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$ (связная сумма $\mathbb{C}P^2$ и $\mathbb{C}P^2$ с обращённой ориентацией) при нечётном k.

4. Используя спектальную последовательность универсального расслоения $E \to BU(n)$ со слоем $U(n)$ и вычисление кольца $H^*(U(n))$, докажите изоморфизм

$$H^*(BU(n)) \cong \mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots, c_n], \quad \deg c_i = 2i.$$

5. Имеем изоморфизм колец когомологий $H^*(SU(3)) \cong H^*(S^3 \times S^5)$. Верно ли, что $SU(3)$ и $S^3 \times S^5$ гомотопически эквивалентнты?

6. С помощью спектральной последовательности расслоения докажите следующую *теорему Лере–Хирша.* Пусть $p\colon E \to B$ — локально тривиальное расслоение над односвязной базой B со слоем F. Предположим, что для коммутативного кольца коэффициентов R выполены условия:

а) $H^n(F;R)$ — конечно порождённый свободный R-модуль для любого n;

б) существуют классы $v_j \in H^*(E;R)$, для которых ограничения $i^*(v_j)$ образуют R-базис в $H^*(F;R)$ для вложения каждого слоя $i\colon F \to E$.

Тогда $H^*(E;R)$ — свободный $H^*(B;R)$-модуль с базисом $\{v_j\}$.

7. Вычислите кольцо $H^*(\Omega S^n)$ при $n \geqslant 4$.

Date: 16 мая 2019 г.

ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 13: СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ СФЕР

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Докажите, что

а) $H^*(K(\mathbb{Z}, 2n); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[v]$ — алгебра многочленов, $\deg v = 2n$;

б) $H^*(K(\mathbb{Z}, 2n+1); \mathbb{Q}) \cong \Lambda_{\mathbb{Q}}[u]$ — внешняя алгебра, $\deg u = 2n+1$.

2. Докажите, что если π — конечная группа, то $H^k(K(\pi, n); \mathbb{Q}) = 0$ при $k > 0$.

3. Вычислите $H^*(K(\mathbb{Z}_2, 2); \mathbb{Z})$ и $H^*(K(\mathbb{Z}_2, 3); \mathbb{Z})$ вплоть до размерности 6.

4. Вычислите $H_*(K(\mathbb{Z}_2, 4); \mathbb{Z})$ вплоть до размерности 6.

5. Вычислите $\pi_4(S^3)$ при помощи башни Уайтхеда.

6. Вычислите вторую стабильную гомотопическую группу сфер $\pi_2^s = \pi_6(S^4)$.

7. Пусть X — односвязное клеточное пространство. Докажите, что группы гомологий $H_q(X; \mathbb{Z})$ конечно порождены (конечны) для любого q, то и гомотопические группы $\pi_q(X)$ конечно порождены (конечны) для любого q. Верно ли это для неодносвязных X?

Date: 23 мая 2019 г.