

ВВЕДЕНИЕ В ТОПОЛОГИЮ / Топология-1/ ВВЕДЕНИЕ В ГОМОТОПИЧЕСКУЮ ТОПОЛОГИЮ

**ПАНОВ Тарас Евгеньевич**

Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова

Независимый Московский университет

Факультет математики НИУ ВШЭ

Последняя редакция: 16 июня 2023 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |    |
|--|----|
| Предисловие  | 2  |
| Список литературы  | 2  |
| 1. Необходимые сведения из общей топологии                           | 3  |
| 1.1. Основные понятия  | 3  |
| 1.2. Категории и функторы  | 6  |
| 1.3. Произведения и копроизведения, декартовы и кодекартовы квадраты | 6  |
| 1.4. Топология на пространстве отображений                           | 10 |
| Задачи и упражнения  | 10 |
| 2. Операции над топологическими пространствами                       | 12 |
| 2.1. Конус, надстройка и джойн                                       | 12 |
| 2.2. Пространства с отмеченной точкой                                | 14 |
| 2.3. Пространства путей и петель                                     | 14 |
| Задачи и упражнения  | 15 |
| 3. Гомотопии и гомотопические эквивалентности                        | 16 |
| Задачи и упражнения  | 16 |
| 4. Клеточные пространства  | 17 |
| 4.1. Определение и примеры   | 17 |
| 4.2. Свойство продолжения гомотопии                                  | 22 |
| 4.3. Теорема о клеточной аппроксимации                               | 24 |
| Задачи и упражнения  | 27 |
| 5. Фундаментальная группа  | 28 |
| 5.1. Определение и основные свойства                                 | 28 |
| 5.2. Зависимость от отмеченной точки                                 | 30 |
| 5.3. Фундаментальная группа окружности                               | 31 |
| Задачи и упражнения  | 33 |
| 6. Теорема ван Кампена   | 34 |
| 6.1. Свободное произведение групп                                    | 34 |
| 6.2. Формулировка и доказательство теоремы                           | 35 |
| 6.3. Фундаментальная группа клеточного пространства                  | 39 |
| Задачи и упражнения  | 41 |
| 7. Накрытия  | 42 |
| 7.1. Определение и примеры   | 42 |
| 7.2. Свойство поднятия гомотопии                                     | 43 |
| 7.3. Накрытия и фундаментальная группа                               | 44 |
| 7.4. Теорема о поднятии отображений                                  | 45 |
| 7.5. Универсальное накрытие  | 46 |
| 7.6. Классификация накрытий  | 47 |
| 7.7. Графы, свободные группы и теорема Нильсена–Шрайера              | 48 |
| Задачи и упражнения  | 50 |
| 8. Расслоения  | 51 |
| 8.1. Локально тривиальные расслоения. Свойство поднятия гомотопии    | 51 |
| 8.2. Расслоения в смысле Гуревича и Серра                            | 53 |
| 8.3. Расслоения и корасслоения. Теорема факторизации                 | 54 |
| Задачи и упражнения  | 56 |
| 9. Гомотопические группы   | 58 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 9.1. | Определение. Коммутативность   | 58 |
| 9.2. | Относительные гомотопические группы. Точная последовательность<br>пары | 59 |
| 9.3. | Гомотопическая последовательность расслоения                           | 61 |
| 9.4. | Теорема Уайтхеда   | 63 |
|      | Задачи и упражнения  | 64 |
|      | Предметный указатель   | 65 |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Это первая часть базового курса лекций по алгебраической топологии (курсы «Введение в топологию» на механико-математическом факультете МГУ, «Топология-1» в Независимом Московском университете и «Введение в гомотопическую топологию» на факультете математики НИУ ВШЭ).

Основная часть курса — начала теории гомотопий. Сюда входит теория клеточных пространств, фундаментальная группа, накрытия, гомотопическая теория расслоений и высшие гомотопические группы.

Данный текст доступен на странице Т. Е. Панова на сайте кафедры высшей геометрии и топологии: <http://hgeom.math.msu.su/people/taras/>

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Ва] В. А. Васильев. *Введение в топологию*. Москва, Фазис, 1997.
- [ВИНХ] О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецеваев, В. М. Харламов. *Элементарная топология*. Москва, МЦНМО, 2010.
- [ФФ] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. *Курс гомотопической топологии*. Москва, «Наука», 1989.
- [Ха] А. Хатчер. *Алгебраическая топология*. Москва, МЦНМО, 2011.

## 1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ

### 1.1. Основные понятия.

*Топологическим пространством* называется множество  $X$  с выделенным набором подмножеств, называемых *открытыми*, которые удовлетворяют условиям:

- (а) пустое множество  $\emptyset$  и всё множество  $X$  являются открытыми;
- (б) объединение любого набора открытых множеств является открытым;
- (в) пересечение конечного числа открытых множеств является открытым.

Набор  $\mathcal{T}$  открытых подмножеств также называется *топологией* на пространстве  $X$ .

Если на множестве  $X$  введены две топологии  $\mathcal{T}_1$  и  $\mathcal{T}_2$ , причём каждое подмножество из  $\mathcal{T}_1$  лежит в  $\mathcal{T}_2$ , то говорят, что топология  $\mathcal{T}_1$  *грубее* топологии  $\mathcal{T}_2$ , а топология  $\mathcal{T}_2$  *тоньше* топологии  $\mathcal{T}_1$ .

Самой тонкой топологией на  $X$  является *дискретная*, в которой все подмножества открыты, а самой грубой — *антидискретная*, в которой открытыми являются только  $\emptyset$  и  $X$ .

*Замечание.* Вместо терминологии грубая/тонкая в математике часто используется терминология *сильная/слабая* топология. По этому поводу приведём цитату из книги [ФФ] (стр. 13):

Термины «слабая топология» и «сильная топология» не имеют в математике единого толкования. Мы считаем топологию более слабой, если в ней больше открытых множеств, т. е. меньше предельных точек (у нас слабее всех дискретная топология). Образно выражаясь, слабая топология — это топология, в которой точки слабее притягиваются друг к другу. Противоположная терминология исходит из представления, что в топологическом пространстве точки отталкиваются друг от друга (по отношению к этой терминологии дискретная топология является самой сильной).

Элементы  $x \in X$  топологического пространства называются *точками*. Любое открытое множество  $U$ , содержащее данную точку  $x \in X$ , называется *окрестностью* этой точки.

Отображение  $f: X \rightarrow Y$  топологических пространств *непрерывно*, если для любого открытого подмножества  $U \subset Y$  подмножество  $f^{-1}(U)$  открыто в  $X$ .

**Пример 1.1.** На вещественной прямой  $\mathbb{R}$  вводится *стандартная* топология, в которой множество  $U \subset \mathbb{R}$  открыто, если для любой точки  $x \in U$  множество  $U$  содержит интервал  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  для некоторого  $\varepsilon > 0$ . Таким образом, открытые множества на  $\mathbb{R}$  — это объединения (возможно, бесконечного числа) интервалов.

В анализе функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется *непрерывной*, если для любой точки  $x_0 \in \mathbb{R}$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что если  $|x - x_0| < \delta$ , то  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Назовем временно такую функцию  $\varepsilon$ - $\delta$ -*непрерывной*.

**Предложение 1.2.** *Функция  $f$  является  $\varepsilon$ - $\delta$ -непрерывной тогда и только тогда, когда она непрерывна как отображение  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — некоторая  $\varepsilon$ - $\delta$ -непрерывная функция и рассмотрим открытое подмножество  $U \subset \mathbb{R}$ . Тогда для любой точки  $x_0 \in f^{-1}(U)$  найдётся такое  $\varepsilon > 0$ , что  $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subset U$  (так как  $U$  открыто). Для этого  $\varepsilon$ , согласно определению  $\varepsilon$ - $\delta$ -непрерывности, найдётся такое  $\delta > 0$ , что если  $|x - x_0| < \delta$ , то

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Последнее неравенство означает, что  $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subset U$ , а значит  $x \in f^{-1}(U)$ . Мы получили, что для  $x_0 \in f^{-1}(U)$  найдётся такое  $\delta > 0$ , что  $|x - x_0| < \delta$  влечёт  $x \in f^{-1}(U)$ . Это означает, что  $f^{-1}(U)$  открыто. Итак, отображение  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно.

Обратно, пусть  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно. Выберем  $x_0 \in \mathbb{R}$  и  $\varepsilon > 0$ . Интервал  $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$  открыт, поэтому его прообраз открыт и содержит  $x_0$ . Следовательно, найдётся такое  $\delta > 0$ , что  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ . Последнее условие эквивалентно тому, что если  $|x - x_0| < \delta$ , то  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Итак, функция  $f$  является  $\varepsilon$ -непрерывной.  $\square$

Далее под «пространством» мы будем понимать топологическое пространство, а под «отображением» — непрерывное отображение.

Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *гомеоморфизмом*, если оно непрерывно, взаимно однозначно и обратное отображение  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  также непрерывно. Два пространства *гомеоморфны*, если между ними существует гомеоморфизм. Для гомеоморфных пространств  $X$  и  $Y$  используется обозначение  $X \cong Y$ .

Обратим внимание, что если  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное взаимно однозначное отображение, то  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  может не быть непрерывным.

**Пример 1.3.** Пусть  $X$  представляет собой множество из двух элементов с дискретной топологией, а  $Y$  — то же множество с антидискретной топологией. Тогда тождественное отображение  $X \rightarrow Y$  непрерывно, а его обратное — нет.

Каждое подмножество  $A \subset X$  является топологическим пространством относительно *индукцированной* топологии, в которой открытые множества имеют вид  $A \cap U$ , где  $U$  открыто в  $X$ . При этом отображение *вложения*  $i: A \hookrightarrow X$  непрерывно.

Подмножество  $A \subset X$  *замкнуто*, если его дополнение открыто. Точка  $x \in X$  называется *пределной* для подмножества  $A \subset X$ , если любая окрестность точки  $x$  содержит точку из  $A$ , отличную от  $x$ . Подмножество  $A \subset X$  замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки (упражнение).

Пространство  $X$  *связно*, если его нельзя представить в виде объединения  $A \sqcup B$  непересекающихся подмножеств  $A$  и  $B$ , каждое из которых непусто и открыто.

Пространство  $X$  *компактно*, если из каждого его покрытия открытыми множествами  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  можно выделить конечное подпокрытие  $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$ .

Пространство  $X$  *хаусдорфово*, если у любых его двух различных точек  $x, y \in X$  существуют непересекающиеся окрестности,  $U \ni x, V \ni y, U \cap V = \emptyset$ .

**Теорема 1.4.** Непрерывное взаимно однозначное отображение  $f: X \rightarrow Y$  компактного пространства  $X$  на хаусдорфово пространство  $Y$  является гомеоморфизмом.

Доказательство опирается на три леммы.

**Лемма 1.5.** Если  $X$  компактно и  $A \subset X$  — замкнутое подмножество, то  $A$  также компактно (в индуцированной топологии).

*Доказательство.* Пусть  $A = \bigcup_{i \in I} V_i$  — открытое покрытие. Имеем  $V_i = A \cap U_i$ , где  $U_i$  — открыто в  $X$ . Тогда  $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} U_i$  — открытое покрытие. Выделим конечное подпокрытие  $X = (X \setminus A) \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$ . Тогда  $A = V_1 \cup \dots \cup V_n$  — конечное подпокрытие.  $\square$

**Лемма 1.6.** *Если  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное суръективное отображение и  $X$  компактно, то  $Y$  также компактно.*

*Доказательство.* Пусть  $Y = \bigcup_{i \in I} U_i$  — открытое покрытие. Тогда  $X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$  также является открытым покрытием. Выделим конечное подпокрытие  $X = f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_n)$ . Тогда  $Y = U_1 \cup \dots \cup U_n$  — конечное подпокрытие.  $\square$

**Лемма 1.7.** *Если  $Y$  хаусдорфово и  $B \subset Y$  — компактное подмножество, то  $B$  замкнуто.*

*Доказательство.* Предположим, что для  $B$  найдётся предельная точка  $y \in Y$ , такая, что  $y \notin B$ . Для каждой точки  $b \in B$  выберем открытые (в  $Y$ ) подмножества  $U_b \ni b$ ,  $V_b \ni y$ ,  $U_b \cap V_b = \emptyset$ . Из открытого покрытия  $B = \bigcup_{b \in B} U_b$  выделим конечное подпокрытие  $B = U_{b_1} \cup \dots \cup U_{b_n}$ . Тогда  $V = V_{b_1} \cap \dots \cap V_{b_n}$  — окрестность точки  $y$ , не пересекающаяся с  $B$ . Противоречие.  $\square$

*Доказательство теоремы 1.4.* Надо доказать, что обратное отображение  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  непрерывно. Другими словами, надо доказать, что  $f$  переводит открытые множества в открытые (такие отображения называются *открытыми*). Так как  $f$  взаимно однозначно, это эквивалентно тому, что  $f$  переводит замкнутые множества в замкнутые. Пусть  $A \subset X$  замкнуто. Согласно лемме 1.5,  $A$  компактно. Согласно лемме 1.6,  $f(A) \subset Y$  также компактно. Наконец, согласно лемме 1.7,  $f(A)$  замкнуто.  $\square$

*Отношением* на множестве  $X$  называется подмножество  $R \subset X \times X$  декартова квадрата  $X \times X$ . Если  $(x_1, x_2) \in R$ , то говорят, что элементы  $x_1$  и  $x_2$  находятся в отношении  $R$ . При этом используется обозначение  $x_1 \sim_R x_2$  или просто  $x_1 \sim x_2$ . Отношение  $R$  называется *отношением эквивалентности*, если оно *рефлексивно* ( $(x, x) \in R$  или  $x \sim x$  для любого  $x \in X$ ), *симметрично* ( $x_1 \sim x_2$  влечёт  $x_2 \sim x_1$ ) и *транзитивно* ( $x_1 \sim x_2$  и  $x_2 \sim x_3$  влечёт  $x_1 \sim x_3$ ). Множество  $X$  с отношением эквивалентности представляется в виде несвязного объединения *классов эквивалентности*. Обозначим через  $X/\sim$  множество классов эквивалентности.

**Конструкция 1.8** (фактор-топология). Пусть  $X$  — топологическое пространство с отношением эквивалентности. Рассмотрим отображение множеств  $p: X \rightarrow X/\sim$ , которое сопоставляет точке её класс эквивалентности. Тогда на множестве  $X/\sim$  определена *фактор-топология*, в которой множество  $U \subset X/\sim$  открыто тогда и только тогда, когда его прообраз  $p^{-1}(U)$  открыт в  $X$ . Отображение  $p: X \rightarrow X/\sim$  непрерывно относительно фактор-топологии и называется *фактор-отображением*.

Вот два важнейших примера фактор-пространства.

**Конструкция 1.9** (стягивание подпространства). Пусть  $A \subset X$ , а отношение эквивалентности на  $X$  задано так:  $x_1 \sim x_2$  тогда и только тогда, когда либо  $x_1 = x_2$ , либо  $x_1 \in A$  и  $x_2 \in A$ . Фактор-пространство  $X/\sim$  обозначается  $X/A$ ; говорят, что  $X/A$  получается из  $X$  *стягиванием*  $A$  в точку. Если  $A = pt$  — точка, то  $X/pt$  гомеоморфно  $X$ . Также отдельно рассматривают случай  $A = \emptyset$ . Тогда  $X/\emptyset$  полагают равным несвязному объединению  $X$  и точки; такой формализм оказывается весьма полезным.

**Конструкция 1.10** (пространство орбит действия группы). Говорят, что группа  $G$  действует слева на пространстве  $X$ , если для каждого элемента  $g \in G$  задано

непрерывное отображение  $\alpha_g: X \rightarrow X$ , такое, что  $\alpha_e = \text{id}$  (тождественное отображение) и  $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$  (композиция). Заметим, что каждое отображение  $\alpha_g$  является гомеоморфизмом (с обратным  $\alpha_{g^{-1}}$ ). Точка  $\alpha_g(x)$  обозначается просто  $gx$ .

Примеры:

- Общая линейная группа (обратимых операторов)  $GL(V)$ , а также её подгруппы (например,  $SL(V)$ ,  $SO(V)$ ), действуют на линейном пространстве  $V$ ;
- группа невырожденных матриц  $GL(n, \mathbb{R})$  действует слева на пространстве столбцов  $\mathbb{R}^n$ ;
- аддитивная группа линейного пространства  $V$  также действует на  $V$ ;
- группа перестановок (симметрическая группа)  $\Sigma_n$  действует на конечном множестве  $[n] = \{1, \dots, n\}$ .

*Орбитой* точки  $x \in X$  под действием  $G$  называется подмножество

$$Gx = \{gx: g \in G\} \subset X.$$

Примеры:

- орбитами действия группы поворотов  $SO(2)$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  являются концентрические окружности с центром в  $0$  и точка  $0$ ;
- действие группы  $\Sigma_n$  на  $[n]$  имеет единственную орбиту — само множество  $[n]$ .

Орбиты разных точек не пересекаются или совпадают и тем самым задают отношение эквивалентности на  $X$ :  $x \sim y$  если существует  $g \in G$ , такой, что  $gx = y$ .

Соответствующее фактор-пространство  $X/\sim$  называется *пространством орбит* по действию  $G$  и обозначается  $X/G$ .

**1.2. Категории и функторы.** Категория  $\mathcal{C}$  состоит из класса *объектов* и класса *морфизмов* между объектами. Подкласс морфизмов между объектами  $A$  и  $B$  обозначается  $\text{Hom}(A, B)$ . При этом морфизмы должны удовлетворять следующим условиям. Если  $f \in \text{Hom}(A, B)$  и  $g \in \text{Hom}(B, C)$ , то определена *композиция*  $g \circ f \in \text{Hom}(A, C)$ . Более того, требуется, чтобы композиция была ассоциативной и для любого объекта  $A$  класс  $\text{Hom}(A, A)$  содержал *тождественный* морфизм  $\text{id}_A$ , удовлетворяющий соотношениям  $f \circ \text{id}_A = \text{id}_B \circ f = f$  для любого  $f \in \text{Hom}(A, B)$ .

Примерами являются категория множеств, категория групп и гомоморфизмов, категория топологических пространств и непрерывных отображений.

*Ковариантный функтор* из категории  $\mathcal{C}$  в категорию  $\mathcal{D}$  сопоставляет каждому объекту  $A$  из  $\mathcal{C}$  объект  $F(A)$  из  $\mathcal{D}$  и каждому морфизму  $f: A \rightarrow B$  из  $\mathcal{C}$  морфизм  $F(A) \rightarrow F(B)$  из  $\mathcal{D}$  так, что  $F$  сохраняет композицию и тождественный морфизм:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f), \quad F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}.$$

*Контравариантный функтор* из  $\mathcal{C}$  в  $\mathcal{D}$  сопоставляет морфизму  $f: A \rightarrow B$  из  $\mathcal{C}$  морфизм  $F(B) \rightarrow F(A)$  из  $\mathcal{D}$  так, что

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g), \quad F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}.$$

**1.3. Произведения и копроизведения, декартовы и кодекартовы квадраты.**

*Базой* топологии  $\mathcal{T}$  на  $X$  называется набор открытых подмножеств  $\{U_i: i \in I\}$ , такой, что любое открытое множество в  $X$  представляется в виде объединения (конечного или бесконечного) подмножеств  $U_i$ .

**Пример 1.11.** Базой топологии на вещественной прямой  $\mathbb{R}$  является набор всех интервалов. Интервалы с рациональным концами также образуют базу топологии на  $\mathbb{R}$  (эта база счётна, в отличие от базы из всех интервалов).

**Конструкция 1.12** (топология произведения). *Произведением* пространств  $X$  и  $Y$  называется множество  $X \times Y$  (состоящее из пар  $(x, y)$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ) с топологией, базу которой образуют подмножества вида  $U \times V$ , где  $U$  открыто в  $X$ , а  $V$  открыто в  $Y$ . Эта топология называется *топологией произведения*.

**Пример 1.13.** *Вещественная плоскость*  $\mathbb{R}^2$  — это декартово произведение  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  с топологией произведения. Открытыми множествами здесь являются объединения открытых прямоугольников (произведенений интервалов). В анализе топология на  $\mathbb{R}^2$  вводится так: открытыми являются множества, которые вместе с любой своей точкой содержат некоторый открытый шар с центром в этой точке. Таким образом, в этой топологии открытые множества — это объединения открытых шаров. Эта топология совпадает с топологией произведения, так как каждый открытый прямоугольник является объединением открытых шаров, и каждый открытый шар является объединением открытых прямоугольников.

Те же рассуждения относятся к топологии на пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

**Пример 1.14.** *Окружность* называется топологическое пространство, гомеоморфное следующему подмножеству в  $\mathbb{R}^2$ :

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

(с индуцированной топологией). По-другому окружность можно определить как фактор-пространство  $[0, 1]/\{0, 1\}$  отрезка по его границе. Непрерывное отображение

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t),$$

индуцирует гомеоморфизм  $[0, 1]/\{0, 1\} \xrightarrow{\cong} S^1$ . Доказательство этого факта — упражнение (указание: воспользоваться теоремой 1.4).

В то же время, если рассмотреть ограничение отображения  $f$  на полуинтервал, то мы получим непрерывное взаимно однозначное отображение  $[0, 1) \rightarrow S^1$ , которое не является гомеоморфизмом (упражнение).

**Предложение 1.15.** Топология произведения является самой грубой из всех топологий на  $X \times Y$ , относительно которых проекции  $p_X: X \times Y \rightarrow X$ ,  $(x, y) \mapsto x$ , и  $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ ,  $(x, y) \mapsto y$ , являются непрерывными.

*Доказательство.* Чтобы отображение  $p_X$  было непрерывным, необходимо объявить открытыми все подмножества вида  $p_X^{-1}(U) = U \times Y$ , где  $U \subset X$  — открытое множество. Аналогично, чтобы отображение  $p_Y$  было непрерывным, необходимо объявить открытыми все подмножества вида  $p_Y^{-1}(V) = X \times V$ , где  $V \subset Y$  — открыто. Тогда пересечение  $(U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V$  также должно быть открытым, а значит должны быть открытыми и всевозможные объединения множеств вида  $U \times V$ . Таким образом, необходимо объявить открытыми все множества из топологии произведения. Это и означает, что топология произведения — самая грубая из топологий на  $X \times Y$ , относительно которых обе проекции непрерывны.  $\square$

**Предложение 1.16** (универсальное свойство произведения). *Пусть даны отображения  $f: Z \rightarrow X$  и  $g: Z \rightarrow Y$ . Тогда существует единственное отображение*

$h: Z \rightarrow X \times Y$ , такое, что  $p_X \circ h = f$  и  $p_Y \circ h = g$ . Это выражается коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{h} & X \times Y & \xrightarrow{p_X} & X \\ & \searrow f & \downarrow p_Y & & \\ & & Y & & \end{array}$$

*Доказательство.* Формула  $h(z) := (f(z), g(z))$  однозначно определяет отображение  $h$ . Проверка его непрерывности остаётся в качестве упражнения.  $\square$

Данное универсальное свойство определяет понятие *категорного произведения*. Тем самым топология произведения задаёт категорное произведение в категории топологических пространств.

Аналогично определяется произведение конечного числа пространств  $X_1 \times \dots \times X_n$ . Базой топологии произведения являются множества вида  $U_1 \times \dots \times U_n$ , где  $U_i \subset X_i$  открыто. Однако, при определении топологии произведения бесконечного числа пространств имеется тонкость.

**Конструкция 1.17** (топология бесконечного произведения). Пусть  $\{X_i: i \in I\}$  — набор пространств, проиндексированных элементами множества  $I$ . По определению, элементами *декартова произведения*  $\prod_{i \in I} X_i$  являются функции выбора  $i \mapsto x_i$ , сопоставляющие каждому элементу  $i \in I$  элемент  $x_i \in X_i$ . Если  $I$  — счётное множество (множество натуральных чисел), то элементами бесконечного произведения  $\prod_{i \in I} X_i$  являются бесконечные последовательности  $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$ ,  $x_i \in X_i$ .

Можно было бы определить топологию на  $\prod_{i \in I} X_i$ , взяв в качестве базы всевозможные произведения вида  $\prod_{i \in I} U_i$ , где  $U_i \subset X_i$  открыто. Однако в такой топологии будет слишком много открытых множеств, и поэтому она не будет обладать универсальным свойством относительно всех проекций  $\prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ .

Действительно, чтобы проекция  $p_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$  была непрерывной, нужно объявить открытыми все подмножества произведения вида  $p_i^{-1}(U_i) = \prod_{j \in I} Y_j$ , где  $Y_j = X_j$  при  $j \neq i$  и  $Y_i = U_i$  — открытое множество в  $X_i$  (на  $i$ -м месте в произведении стоит  $U_i$ , а на остальных местах —  $X_j$ ). Беря конечные пересечения таких множеств, мы получим подмножества вида  $\prod_{i \in I} U_i$ , где  $U_i \subset X_i$  открыто и лишь *конечное число  $U_i$  отлично от  $X_i$* . Набор таких множеств образует базу топологии, которая является самой грубой из всех топологий на  $\prod_{i \in I} X_i$ , относительно которых все проекции  $p_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$  непрерывны. Эта топология называется *топологией произведения*  $\prod_{i \in I} X_i$ . Она обладает универсальным свойством: для любого набора непрерывных отображений  $Z \rightarrow X_i$ ,  $i \in I$ , существует единственное непрерывное отображение  $Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ , композиция которого с проекциями даёт исходные отображения  $Z \rightarrow X_i$ .

Если же в  $\prod_{i \in I} X_i$  объявить открытыми *всевозможные* произведения  $\prod_{i \in I} U_i$ , где  $U_i \subset X_i$  открыто, то для такой топологии отображение  $Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ , задаваемое непрерывными отображениями  $Z \rightarrow X_i$ , может уже не быть непрерывным: прообраз открытого множества  $\prod_{i \in I} U_i$  может не быть открытым в  $Z$ .

Обобщением произведения является понятие декартового квадрата.

**Конструкция 1.18** (декартов квадрат).

(1)

$$\begin{array}{ccccc}
 & Z & & & \\
 & \searrow h & \nearrow f & & \\
 & X \times_A Y & \xrightarrow{p_X} & X & \\
 & \downarrow p_Y & & & \downarrow r \\
 & Y & \xrightarrow{s} & A &
 \end{array}$$

Квадратная диаграмма в нижней правой части рисунка называется *декартовым квадратом*, если она обладает универсальным свойством, описываемым рисунком. Пространство  $X \times_A Y$  называется *расслоенным произведением* (или *коамальгамой*, в англ. терминологии *pullback*) пространств  $X$  и  $Y$  с заданными отображениями  $r: X \rightarrow A$  и  $s: Y \rightarrow A$ .

Таким образом, расслоенное произведение  $X \times_A Y$  — это такое пространство с заданными отображениями  $p_X: X \times_A Y \rightarrow X$  и  $p_Y: X \times_A Y \rightarrow Y$ , что  $r \circ p_X = s \circ p_Y$  и для любого пространства  $Z$  с отображениями  $f: Z \rightarrow X$  и  $g: Z \rightarrow Y$ , такими, что  $r \circ f = s \circ g$ , существует единственное отображение  $h: Z \rightarrow X \times_A Y$ , такое, что  $p_X \circ h = f$  и  $p_Y \circ h = g$ .

Существование декартового квадрата (расслоенного произведения) доказывается предъявлением явной конструкции пространства  $X \times_A Y$ , использующей индуцированную топологию и топологию произведения:

$$X \times_A Y = \{(x, y) \in X \times Y : r(x) = s(y)\}.$$

Проверка универсального свойства остаётся в качестве упражнения.

Обращение стрелок приводит к двойственной конструкции копроизведения и *кодекарта* *квадрата*.

**Конструкция 1.19** (кодекартов квадрат и копроизведение).

(2)

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{r} & X & & \\
 \downarrow s & & \downarrow i_X & & \\
 Y & \xrightarrow{i_Y} & X \cup_A Y & \xrightarrow{f} & Z \\
 & & \searrow h & \nearrow g & \\
 & & & & Z
 \end{array}$$

Пространство  $X \cup_A Y$  называется *склейкой* (или *амальгамой*, в англ. терминологии *pushout*) пространств  $X$  и  $Y$  с заданными отображениями  $r: A \rightarrow X$  и  $s: A \rightarrow Y$ .

Явная конструкция пространства  $X \cup_A Y$  использует фактор-топологию:

$$X \cup_A Y = X \sqcup Y / \sim, \quad \text{где } x \sim y, \text{ если } x = r(a) \text{ и } y = s(a) \text{ для некоторого } a \in A,$$

т. е. факторпространство берётся по минимальному отношению эквивалентности, содержащему все пары  $(r(a), s(a))$ . В частности, при  $A = \emptyset$  получаем, что *копроизведением* пространств  $X$  и  $Y$  является их несвязное объединение  $X \sqcup Y$ .

**1.4. Топология на пространстве отображений.** Предбазой топологии  $\mathcal{T}$  на  $X$  называется набор открытых подмножеств  $U_i: i \in I$ , порождающих  $\mathcal{T}$  (т. е.  $\mathcal{T}$  является самой грубой топологией, в которой все  $U_i$  открыты). Более явно, предбаза — это набор открытых множеств, совокупность всевозможных конечных пересечений которых образует базу.

**Конструкция 1.20.** Пусть  $X, Y$  — два фиксированных пространства. Рассмотрим множество всех непрерывных отображений  $f: X \rightarrow Y$ . Это множество обозначается  $\mathcal{C}(X, Y)$  или  $Y^X$ . На нём можно ввести топологию следующим образом. Для каждого компактного подмножества  $K \subset X$  и открытого открытия множества  $U \subset Y$  рассмотрим подмножество отображений

$$W(K, U) = \{f \in Y^X : f(K) \subset U\}.$$

Топология на  $Y^X$ , порождённая набором всевозможных подмножеств  $W(K, U)$  (т. е. для которой подмножества  $W(K, U)$  образуют предбазу), называется *компактно-открытой топологией*. Далее будем предполагать, что на  $Y^X$  всегда введена компактно-открытая топология.

**Предложение 1.21.** Если  $X$  — конечное множество (с дискретной топологией), то топология на  $Y^X$  совпадает с топологией произведения  $\prod_{x \in X} Y$ .

*Доказательство.* Любое подмножество  $K \subset X$  является компактным. Каждое множество  $W(K, U)$  является конечным пересечением  $\bigcap_{x \in K} W(x, U)$ , а множества  $W(x, U)$  порождают топологию конечного произведения  $\prod_{x \in X} Y$ .  $\square$

Если  $X$  — компактное пространство, а  $(Y, \rho)$  — метрическое пространство, то пространство  $\mathcal{C}(X, Y)$  метризуемо с метрикой

$$\rho(f, g) = \max_{x \in X} \{\rho(f(x), g(x))\}.$$

Можно доказать (задача), что эта метрика индуцирует на  $\mathcal{C}(X, Y)$  компактно-открытую топологию.

### Задачи и упражнения.

**1.22.** Докажите, что подмножество  $A \subset X$  замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

**1.23.** Докажите, что в хаусдорфовом пространстве точки являются замкнутыми множествами.

**1.24.** Покажите, что оба условия на пространства в теореме 1.4 являются необходимыми. А именно, приведите пример непрерывного взаимно однозначного отображения  $f: X \rightarrow Y$ , которое не является гомеоморфизмом, при каждом из следующих дополнительных ограничений:

- а)  $X$  компактно;
- б)  $Y$  хаусдорфово.

**1.25.** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *собственным*, если прообразы компактных подмножеств компактны. Докажите, что отображение  $f: X \rightarrow Y$  компактного пространства  $X$  в хаусдорфово пространство  $Y$  собственно.

**1.26.** Пусть  $i: A \rightarrow X$  — открытое инъективное отображение. Докажите, что  $A$  гомеоморфно пространству  $i(A)$  с топологией, индуцированной из  $X$ . (Говорят, что открытое инъективное отображение является вложением.) Докажите то же для замкнутого инъективного отображения. (Непрерывное отображение называется *замкнутым*, если образ замкнутого множества замкнут.)

**1.27.** Пусть  $p: X \rightarrow B$  — открытое сюръективное отображение. Докажите, что  $B$  гомеоморфно фактор-пространству  $X/\sim$  по отношению эквивалентности, при котором  $x_1 \sim x_2$  тогда и только тогда, когда  $p(x_1) = p(x_2)$ . (Говорят, что открытое сюръективное отображение является фактор-отображением). Докажите то же для замкнутого сюръективного отображения.

**1.28.** Докажите, что индуцированная топология на  $A \subset X$  является самой грубой из всех топологий, для которых отображение  $A \hookrightarrow X$  непрерывно.

**1.29.** Докажите, что фактор-топология на  $X/\sim$  является самой тонкой из всех топологий, для которых отображение  $X \rightarrow X/\sim$  непрерывно.

**1.30.** Докажите, что если  $A \subset X$  и  $X/A$  хаусдорфово, то  $A$  замкнуто. Однако  $X/A$  может быть не хаусдорфовым даже если  $X$  хаусдорфово, а  $A \subset X$  — замкнуто.

**1.31.** Опишите пространство орбит  $\mathbb{R}^2/SO(2)$  действия группы поворотов на плоскости.

**1.32.** Докажите, что факторпространство  $[0, 1]/\{0, 1\}$  отрезка по его границе гомеоморфно окружности.

**1.33.** Завершите доказательство предложения 1.16 (проверьте непрерывность построенного там отображения).

**1.34.** Докажите, что произведение конечного числа компактных пространств компактно. Соответствующее утверждение в случае бесконечного числа пространств известно как *теорема Тихонова* и является одним из самых значимых результатов общей топологии. Теорема Тихонова эквивалентна аксиоме выбора (полезно самостоятельно вывести аксиому выбора из теоремы Тихонова или разобрать доказательство).

**1.35.** Докажите, что канторово множество (т. е. множество чисел из отрезка  $[0, 1]$ , которые не содержат 1 в троичной записи) гомеоморфно произведению счётного числа дискретных пространств  $\{0, 1\}$ .

**1.36.** Докажите, что множество иррациональных вещественных чисел гомеоморфно произведению счётного числа множеств натуральных чисел.

**1.37.** Пусть  $\tilde{\mathbb{R}}^\infty$  — множество бесконечных последовательностей вещественных чисел (декартово произведение счётного числа вещественных прямых) с топологией, в которой базой открытых множеств являются всевозможные бесконечные произведения интервалов. Докажите, что в этой топологии диагональное отображение  $\mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}^\infty$ ,  $x \rightarrow (x, x, \dots)$ , не является непрерывным. Это означает, в частности, что топология  $\tilde{\mathbb{R}}^\infty$  отличается от топологии произведения  $\mathbb{R}^\infty$ .

**1.38.** Рассмотрим подмножество  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1})$  вещественной прямой с индуцированной топологией. Гомеоморфно ли пространство  $X$  несвязному объединению бесконечного числа интервалов?

**1.39.** Проверьте универсальные свойства расслоенного произведения  $X \times_A Y$  и склейки  $X \cup_A Y$ .

**1.40.** Что является произведением, копроизведением и кодекартовым квадратом в категориях групп и абелевых групп?

**1.41.** Верно ли предложение 1.21 для произвольного пространства  $X$ ?

**1.42.** Докажите, что  $X$  — компактное пространство, а  $(Y, \rho)$  — метрическое пространство, то формула

$$\rho(f, g) = \max_{x \in X} \{\rho(f(x), g(x))\}$$

задаёт метрику на множестве непрерывных отображений  $\mathcal{C}(X, Y)$ , и эта метрика индуцирует компактно открытую топологию.

**1.43.** Докажите, что имеет место гомеоморфизм

$$\mathcal{C}(X, Y \times Z) \cong \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Z) \quad \text{или} \quad (Y \times Z)^X \cong Y^X \times Z^X.$$

**1.44.** Пространство  $Y$  называется *локально компактным*, если для каждой точки  $y \in Y$  найдётся окрестность, замыкание которой компактно. Докажите, что если  $Y$  хаусдорфово и локально компактно, то отображение композиции

$$\varphi: \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f$$

непрерывно. В частности, *отображение вычисления*

$$e: Y \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow Z, \quad (y, f) \mapsto f(y)$$

непрерывно.

**1.45** (экспоненциальный закон). Определено каноническое отображение

$$\Phi: \mathcal{C}(X \times Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)) \quad \text{или} \quad \Phi: Z^{X \times Y} \rightarrow (Z^Y)^X,$$

при котором отображение  $f: X \times Y \rightarrow Z$  переходит в отображение  $\Phi(f): X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$ , переводящее  $x \in X$  в отображение  $y \mapsto f(x, y)$ . Докажите, что если  $X$  хаусдорфово, то отображение  $\Phi$  непрерывно. Если, дополнительно,  $Y$  хаусдорфово и локально компактно, то  $\Phi$  — гомеоморфизм. (Если эта задача покажется сложной, доказательство можно найти в [ВИНХ, 25.Vx].)

## 2. ОПЕРАЦИИ НАД ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

**2.1. Конус, надстройка и джойн.** Символ  $I$  обозначает у нас единичный отрезок  $[0, 1]$ .

*Цилиндром* над  $X$  называется произведение  $X \times I$ ; подпространства  $X \times 1$  и  $X \times 0$  называются (*верхним* и *нижним*) *основаниями* цилиндра.

*Конус*  $CX$  над  $X$  — это факторпространство цилиндра по его верхнему основанию:  $CX = (X \times I)/(X \times 1)$ . Образ основания  $X \times 1$  называется *вершиной* конуса, а образ основания  $X \times 0$  — *основанием* конуса.

*Надстройкой*  $\Sigma X$  над  $X$  называется факторпространство конуса по его основанию:  $\Sigma X = CX/(X \times 0)$ . (Обратите внимание, что это — не то же самое, что факторпространство  $(X \times I)/(X \times 1 \cup X \times 0)$ .) Пространство  $X$  вкладывается в надстройку  $\Sigma X$  в качестве  $X \times \frac{1}{2}$ . По-другому надстройку можно определить как склейку двух

конусов по их основаниям:  $\Sigma X = CX \cup_X CX$ ; таким образом мы имеем кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & CX \\ \downarrow i & & \downarrow \\ CX & \longrightarrow & \Sigma X, \end{array}$$

где каждое из отображений  $i$  является вложением  $X$  на основание цилиндра.

Определим  $n$ -мерный шар как следующее подмножество в  $\mathbb{R}^n$

$$D^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

с индуцированной топологией. Аналогично, определим  $n$ -мерную сферу

$$S^n = \{x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Заметим, что при  $n = 0$  получаем, что  $S^0$  — две точки.

**Предложение 2.1.** Имеют место гомеоморфизмы  $CS^n \cong D^{n+1}$  и  $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим непрерывное отображение

$$S^n \times I \rightarrow D^{n+1}, \quad (x_1, \dots, x_{n+1}, t) \mapsto ((1-t)x_1, \dots, (1-t)x_{n+1}).$$

Оно переводит верхнее основание  $S^n \times 1$  в точку  $\mathbf{0} \in D^{n+1}$  и поэтому индуцирует непрерывное взаимно однозначное отображение  $CS^n = (S^n \times I)/(S^n \times 1) \rightarrow D^{n+1}$ . Так как  $CS^n$  — компактное пространство (как факторпространство произведения компактных пространств), а  $D^{n+1}$  — хаусдорфово (как подмножество хаусдорфова пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ ), данное отображение  $CS^n \rightarrow D^{n+1}$  является гомеоморфизмом в силу теоремы 1.4.

Для доказательства второго гомеоморфизма рассмотрим отображение

$$D^n \rightarrow S^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{x_1}{r} \sin \pi r, \dots, \frac{x_n}{r} \sin \pi r, \cos \pi r\right), & \text{если } r \neq 0, \\ (0, \dots, 0, 1), & \text{если } r = 0. \end{cases}$$

где  $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ . Это отображение взаимно однозначно на внутренности шара и переводит его границу  $S^{n-1}$  (где  $r = 1$ ) в «южный полюс»  $(0, \dots, 0, -1) \in S^n$ . Поэтому оно индуцирует гомеоморфизм  $D^n/S^{n-1} \xrightarrow{\cong} S^n$  в силу теоремы 1.4.

Теперь требуемый гомеоморфизм получается как композиция гомеоморфизмов

$$\Sigma S^n = CS^n/(S^n \times 0) \xrightarrow{\cong} D^{n+1}/S^n \xrightarrow{\cong} S^{n+1},$$

построенных выше. □

*Джойн* (или *соединение*)  $X * Y$  пространств  $X$  и  $Y$  удобно представлять себе как объединение отрезков, соединяющих каждую точку пространства  $X$  с каждой точкой пространства  $Y$ . Формально джойн определяется как факторпространство

$$X * Y = X \times Y \times I / (x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0), (x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1)$$

при любых  $x, x_1, x_2 \in X$  и  $y, y_1, y_2 \in Y$ . Произведение,  $X \times Y$  вкладывается в джойн в качестве  $X \times Y \times \frac{1}{2}$ .

Из сравнения определений надстройки и джона получаем, что  $S^0 * X \cong \Sigma X$ . В частности,  $S^0 * S^k \cong S^{k+1}$ . Имеет место более общий факт:  $S^k * S^l \cong S^{k+l+1}$  (задача).

**2.2. Пространства с отмеченной точкой.** В теории гомотопий часто имеют дело с категорией *пространств с отмеченными точками*, объектами которой являются пары  $(X, x_0)$ , состоящие из пространства  $X$  и точки  $x_0 \in X$ , а морфизмами  $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  — отображения, сохраняющие отмеченные точки, т. е. непрерывные отображения  $f: X \rightarrow Y$  с условием  $f(x_0) = y_0$ . При этом операции, описанные выше, видоизменяются следующим образом.

*Произведением* пространств с отмеченными точками  $(X, x_0)$  и  $(Y, y_0)$  называется пространство  $X \times Y$  с отмеченной точкой  $(x_0, y_0)$ . В *конусе* и *надстройке* над  $(X, x_0)$  дополнительно стягивается подпространство  $x_0 \times I$ , т. е.

$$C(X, x_0) = X \times I / (X \times 1 \cup x_0 \times I), \quad \Sigma(X, x_0) = CX / (X \times 0 \cup x_0 \times I).$$

При этом стянутое подпространство объявляется отмеченной точкой. В *джойне*  $(X, x_0) * (Y, y_0)$  дополнительно стягивается подпространство  $x_0 \times y_0 \times I$ .

Мы часто будем говорить о пространстве  $X$  с отмеченной точкой, имея ввиду пару  $(X, x_0)$ . Если из контекста ясно, что рассматриваются пространства с отмеченными точками, то для конуса, надстройки и джойна мы будем использовать стандартные обозначения  $CX$ ,  $\Sigma X$ ,  $X * Y$ , имея ввиду  $C(X, x_0)$ ,  $\Sigma(X, x_0)$  и  $(X, x_0) * (Y, y_0)$ .

Если  $X = (X, x_0)$  и  $Y = (Y, y_0)$  — пространства с отмеченными точками, то подпространство отображений, сохраняющих отмеченные точки, обозначается  $\mathcal{C}_*(X, Y)$ .

Имеются следующие две дополнительные операции над пространствами с отмеченными точками.

*Букетом* пространств с отмеченными точками  $X$  и  $Y$  называется пространство  $X \vee Y$ , получаемое склейкой  $X$  и  $Y$  по отмеченным точкам  $x_0$  и  $y_0$ :

$$X \vee Y = X \sqcup Y / (x_0 \sim y_0).$$

Букет  $X \vee Y$  естественным образом вкладывается в произведение  $X \times Y$  в качестве подпространства  $X \times y_0 \cup x_0 \times Y$ ; при этом отмеченная точка букета переходит в  $(x_0, y_0)$ . Букет является копроизведением в категории пространств с отмеченными точками (упражнение).

*Приведённым произведением* (или *смэш-произведением*) пространств с отмеченными точками  $X$  и  $Y$  называется пространство  $X \wedge Y$ , получаемое факторизацией произведения  $X \times Y$  по вложенному букету  $X \vee Y$ :

$$X \wedge Y = (X \times Y) / (X \vee Y) = (X \times Y) / (X \times y_0 \cup x_0 \times Y).$$

**2.3. Пространства путей и петель.** *Путём* в пространстве  $X$  называется отображение  $\varphi: I \rightarrow X$ ; точка  $\varphi(0)$  называется *началом*, а  $\varphi(1)$  — *концом* пути  $\varphi$ . *Петлёй* называется путь  $\varphi$ , начинающийся и заканчивающийся в одной точке, т. е.  $\varphi(0) = \varphi(1)$ .

Пространство  $X$ , любые две точки которого можно соединить путём, называется *линейно связным*. Линейно связное пространство связно, но обратное верно не всегда. Примером связного, но не линейно связного пространства является объединение вертикального отрезка  $[-1, 1]$  на оси ординат и положительной части графика функции  $y = \sin \frac{1}{x}$  с топологией, индуцированной из  $\mathbb{R}^2$ .

Пусть  $X = (X, x_0)$  — пространство с отмеченной точкой. *Пространством путей* на  $X$  называется пространство  $PX = \mathcal{C}_*(I, X)$ , состоящее из путей, начинающихся в отмеченной точке  $x_0$  (отмеченной точкой отрезка считается 0). *Пространством*

петель на  $X$  называется подпространство  $\Omega X \subset PX$ , состоящее из путей, начинаяющихся и заканчивающихся в отмеченной точке  $x_0$ . Пространство петель  $\Omega X$  можно также определить как пространство отображений  $C_*(S^1, X)$ , сохраняющих отмеченные точки. Отмеченной точкой пространства  $\Omega X$  является постоянная петля  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon(t) = x_0$ .

**Теорема 2.2.** Для пространств с отмеченными точками  $X$  и  $Y$ , где  $X$  хаусдорфово, имеет место естественный гомеоморфизм

$$C_*(\Sigma X, Y) \xrightarrow{\cong} C_*(X, \Omega Y),$$

переводящий отображение  $f: \Sigma X \rightarrow Y$ ,  $(x, t) \mapsto f(x, t)$ , в отображение  $X \rightarrow \Omega Y$ ,  $x \mapsto \varphi_x$ , где  $\varphi_x$  — петля  $I \rightarrow Y$ ,  $t \mapsto f(x, t)$ .

*Доказательство.* Согласно экспоненциальному закону (задача 1.45), имеем гомеоморфизм

$$C(X \times I, Y) \xrightarrow{\cong} C(X, C(I, Y)).$$

При этом подпространство  $C_*(\Sigma X, Y) \subset C(X \times I, Y)$ , состоящее из отображений  $f: X \times I \rightarrow Y$ , для которых  $f(x, 0) = f(x, 1) = f(x_0, t) = y_0$ , переходит в подпространство  $C_*(X, \Omega Y) \subset C(X, C(I, Y))$  отображений, переводящих  $X$  в петли с началом  $y_0$  и переводящих  $x_0$  в постоянную петлю.

Естественность по  $X$  и  $Y$  означает, что для отображений  $X' \rightarrow X$  и  $Y \rightarrow Y'$ , сохраняющих отмеченные точки, существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C_*(\Sigma X, Y) & \xrightarrow{\cong} & C_*(X, \Omega Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_*(\Sigma X', Y') & \xrightarrow{\cong} & C_*(X', \Omega Y') \end{array}$$

Детали остаются в качестве упражнения. □

### Задачи и упражнения.

**2.3.** Докажите, что  $S^k * S^l \cong S^{k+l+1}$  и  $S^k \wedge S^l \cong S^{k+l}$ .

**2.4.** Докажите, что букет является копроизведением в категории пространств с отмеченными точками, т. е. для него имеет место универсальное свойство

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & & \downarrow i_X & & \\ Y & \xrightarrow{i_Y} & X \vee Y & \xrightarrow{f} & Z \\ & \searrow g & \swarrow h & & \end{array}$$

где все стрелки являются отображениями пространств с отмеченными точками.

**2.5.** Докажите, что линейно связное пространство связно. Приведите пример связного, но не линейно связного пространства.

### 3. ГОМОТОПИИ И ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Два отображения  $f, g: X \rightarrow Y$  между пространствами  $X$  и  $Y$  называются *гомотопными* (обозначается  $f \simeq g$ ), если существует отображение  $F: X \times I \rightarrow Y$ , такое, что  $F(x, 0) = f(x)$  и  $F(x, 1) = g(x)$  для любого  $x \in X$ . Отображение  $F$  называется *гомотопией* между  $f$  и  $g$ . Для каждого  $t \in I$  будем обозначать через  $F_t$  отображение  $X \rightarrow Y$ ,  $x \mapsto F(x, t)$ .

**Предложение 3.1.** *Гомотопия является отношением эквивалентности между отображениями.*

*Доказательство.* Для отображений  $f, g, h: X \rightarrow Y$  мы имеем  $f \simeq f$  посредством гомотопии  $F(x, t) = f(x)$ . Если  $f \simeq g$  посредством гомотопии  $F$ , то  $g \simeq f$  посредством гомотопии  $\bar{F}$ , где  $\bar{F}(x, t) = F(x, 1-t)$ . Наконец, если  $f \simeq g$  посредством гомотопии  $F$  и  $g \simeq h$  посредством гомотопии  $G$ , то  $f \simeq h$  посредством гомотопии  $H$ , где

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(x, 2t-1) & \text{при } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

□

Множество классов гомотопных отображений из  $X$  в  $Y$  обозначается  $[X, Y]$ .

Мы также будем использовать термин *гомотопия отображения*  $f: X \rightarrow Y$  для отображения  $F: X \times I \rightarrow Y$ , удовлетворяющего  $F(x, 0) = f(x)$ . В этом случае для каждого  $t \in I$  мы будем использовать обозначение  $f_t$  для отображения  $X \rightarrow Y$ ,  $x \mapsto F(x, t)$ . При этом  $f_0 = f$ . Таким образом, гомотопия отображения  $f$  — это его деформация с параметром  $t \in [0, 1]$ .

*Замечание.* Если пространство  $X$  хаусдорфово и локально компактно, то имеем гомеоморфизм

$$\mathcal{C}(I \times X, Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(I, \mathcal{C}(X, Y)).$$

Таким образом, в этом случае гомотопию можно рассматривать как путь в пространстве отображений  $\mathcal{C}(X, Y)$ , а множество классов гомотопных отображений  $[X, Y]$  является множеством классов линейной связности пространства  $\mathcal{C}(X, Y)$ .

Два пространства  $X$  и  $Y$  *гомотопически эквивалентны* (обозначается  $X \simeq Y$ ), если существуют отображения  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: Y \rightarrow X$ , такие, что композиции  $g \circ f$  и  $f \circ g$  гомотопны тождественным отображениям  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  и  $\text{id}_Y: Y \rightarrow Y$ , соответственно. Гомотопическая эквивалентность является отношением эквивалентности на пространствах, и *гомотопическим типом* пространства  $X$  называется класс пространств, гомотопически эквивалентных  $X$ .

Пространство  $X$  *стягиваемо*, если оно гомотопически эквивалентно точке.

**Пример 3.2.** Единичный шар  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$  стягиваем. Действительно, рассмотрим отображение в точку  $f: D^n \rightarrow pt$  и отображение  $g: pt \rightarrow D^n$ , переводящее точку в  $\mathbf{0} \in D^n$ . Тогда  $f \circ g: pt \rightarrow pt$  есть тождественное отображение, а  $g \circ f: D^n \rightarrow D^n$  переводит каждую точку  $x \in D^n$  в  $\mathbf{0}$ . Гомотопия между  $g \circ f$  и  $\text{id}: D^n \rightarrow D^n$  задаётся отображением  $F: D^n \times I \rightarrow D^n$ ,  $(x, t) \mapsto tx$ .

**Задачи и упражнения.**

**3.3.** Докажите, что пространство  $\mathbb{R}^n$  стягиваемо, а  $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}$  гомотопически эквивалентно сфере  $S^{n-1}$ .

**3.4.** Докажите, что надстройка над тором  $S^1 \times S^1$  гомотопически эквивалентна букуetu сфер и опишите этот букет.

**3.5.** Пусть  $X$  — дополнение к 3 координатным осям в  $\mathbb{R}^3$ . Докажите, что  $X$  гомотопически эквивалентно букету окружностей и найдите число окружностей в букете.

**3.6.** Пусть  $X$  — дополнение к 3 координатным осям в  $\mathbb{C}^3$ . Докажите, что  $X$  гомотопически эквивалентно букету сфер  $S^3 \vee S^3 \vee S^3 \vee S^4 \vee S^4$ .

#### 4. КЛЕТОЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

**4.1. Определение и примеры.** Клеточным пространством (клеточным комплексом, CW-комплексом) называется хаусдорфово топологическое пространство  $X$ , представленное в виде объединения  $\bigcup_{q=0}^{\infty} \bigcup_{i \in \mathcal{I}} e_i^q$  попарно непересекающихся подмножеств  $e_i^q$ , называемых клетками, таким образом, что для каждой клетки  $e_i^q$  существует отображение  $\Phi_i: D^q \rightarrow X$ , называемое характеристическим отображением клетки  $e_i^q$ , ограничение которого на внутренность шара  $\text{int } D^q$  есть гомеоморфизм на  $e_i^q$ . При этом предполагаются выполненные следующие аксиомы:

- (C) граница  $\bar{e}_i^q \setminus e_i^q$  клетки  $e_i^q$  содержится в объединении конечного числа клеток размерности  $< q$ ;
- (W) подмножество  $Y \subset X$  замкнуто тогда и только тогда, когда для любой клетки  $e_i^q$  замкнуто пересечение  $Y \cap \bar{e}_i^q$ .

Объединение клеток размерности  $\leq n$  в клеточном пространстве  $X$  называется  $n$ -м остовом пространства  $X$  и обозначается через  $\text{sk}^n X$  или  $X^n$ .

Можно проверить (задача) эквивалентность следующих свойств для подмножества клеточного пространства  $X$ :

- подмножество  $A \subset X$  замкнуто (соответственно, открыто);
- пересечение  $A \cap X^n$  замкнуто (соответственно, открыто) для любого  $n$ ;
- прообраз  $\Phi_i^{-1}(A)$  при характеристическом отображении  $\Phi_i: D^q \rightarrow X$  любой клетки  $e_i^q$  замкнут (соответственно, открыт) в  $D^q$ .

Отсюда вытекает, что отображение  $X \rightarrow Y$  из клеточного пространства  $X$  непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все его ограничения  $X^n \rightarrow Y$  на остовы.

*Замечание.* Буквы «C» и «W» происходят из английской терминологии «closure finite» и «weak topology», восходящей к Дж. Уайтхеду. Последнее свойство выше означает, что топология, описываемая аксиомой (W), является самой тонкой (самой слабой в терминологии Уайтхеда) из топологий на  $X$ , по отношению к которым все характеристические отображения непрерывны.

**Конструкция 4.1** (приклеивание клеток). Скажем, что клеточное пространство  $Z$  получается из клеточного пространства  $Y$  приклеиванием  $n$ -мерной клетки при помощи отображения  $\varphi: S^{n-1} \rightarrow Y^{n-1}$ , если  $Z$  входит в кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & Z \end{array}$$

где левая вертикальная стрелка вкладывает сферу в границу  $\partial D^n$  шара. Таким образом,  $Z$  — факторпространство объединения  $Y \sqcup D^n$  при отождествлениях  $x \sim \varphi(x)$  для  $x \in S^{n-1} = \partial D^n$ . Как множество,  $Z$  представляет собой объединение  $Y$  и внутренности шара  $D^n$  —  $n$ -мерной клетки. Мы будем использовать обозначение  $Z = Y \cup_{\varphi} D^n$ .

Имеется другой, индуктивный подход к определению клеточного пространства. Клеточное пространство  $X$  определяется как результат последовательного приклеивания клеток к дискретному пространству  $X^0$  (или пустому множеству  $X^{-1} = \emptyset$ ). На  $n$ -м шаге этой индуктивной процедуры мы получаем  $n$ -мерный остов  $X^n$  из  $(n-1)$ -мерного  $X^{n-1}$ , приклеивая  $n$ -мерные клетки  $e_i^n$  посредством отображений  $\varphi_i: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ . Топология на объединении  $X = \bigcup_n X^n$  вводится следующим образом: подмножество  $Y \subset X$  замкнуто тогда и только тогда, когда пересечение  $Y \cap X^n$  замкнуто для любого  $n$ . Это обеспечивает выполнение аксиомы (W) для пространства  $X$ . Необходимо также проверить хаусдорфость и выполнение аксиомы (C). Это остаётся в качестве задач.

*Клеточным подпространством* клеточного пространства  $X$  называется замкнутое подмножество, которое является объединением клеток из  $X$ . Каждый остов  $X^n$  клеточного пространства  $X$  является клеточным подпространством.

Клеточное пространство называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа клеток, и *локально конечным*, если каждая его точка вместе с некоторой окрестностью принадлежит конечному подпространству.

Отображение  $f: X \rightarrow Y$  клеточных пространств называется *клеточным*, если  $f(X^n) \subset Y^n$  для всех  $n$ .

Приведём примеры разбиений на клетки, которые не являются клеточными пространствами из-за невыполнения одной из аксиом (C) или (W).

#### Пример 4.2.

1. Конечное разбиение на клетки может не быть хаусдорфовым. Действительно, рассмотрим нехаусдорфово пространство  $X$ , получаемое из двух экземпляров единичного отрезка отождествлением точек с одинаковыми координатами, за исключением нулевых концов:

$$X = (I_1 \sqcup I_2) / \sim, \quad \text{где } t_1 \sim t_2, \text{ если } t_1 = t_2 > 0.$$

При этом неотождествлённые нулевые концы  $0_1$  и  $0_2$  не имеют непересекающихся окрестностей в  $X$ . Разобьём  $X$  на клетки: концы  $0_1, 0_2, 1$  и внутренность отрезка. В качестве характеристического отображения одномерной клетки возьмём вложение  $I_1 \hookrightarrow X$ . Это конечное разбиение удовлетворяет аксиоме (W). При этом подмножество  $I_1 = X \setminus 0_2$  незамкнуто, но его прообразы при всех характеристических отображениях клеток замкнуты. Поэтому данная топология на  $X$  не является самой тонкой из топологий, по отношению к которым все характеристические отображения непрерывны.

2. Разбиение диска  $D^2$  на его внутренность и отдельные точки граничной окружности удовлетворяет аксиоме (W), но не удовлетворяет аксиоме (C).

3. Пусть  $X$  — множество, получаемое из счётного семейства единичных отрезков  $\{I_k: k = 1, 2, \dots\}$  отождествлением всех их нулевых концов. На  $X$  естественным образом вводится топология, происходящая из метрики: расстояние между точками  $t \in I_k$  и  $s \in I_l$  равно  $|s - t|$ , если  $k = l$  и равно  $t + s$ , если  $k \neq l$ . Разбиение пространства  $X$  на внутренности отрезков и оставшиеся точки удовлетворяет (C), но

не (W): последовательность точек  $\frac{1}{k} \in I_k$  сходится к 0, т. е. является незамкнутым множеством, но её пересечение с замыканием любой клетки состоит из одной точки и потому замкнуто.

Другой способ введения топологии на том же множестве — топология бесконечного букета  $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$ , т. е. топология факторпространства бесконечного объединения  $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k$  по объединению нулевых концов  $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} 0_k$ . Букет  $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$  является клеточным пространством относительно разбиения на внутренности отрезков и оставшиеся точки; аксиома (W) здесь следует из определения фактортопологии. Однако в этой топологии больше замкнутых множеств (она слабее в терминологии Уайтхеда), чем в метрической топологии на том же множестве, описанной выше. Можно доказать (задача), что топология бесконечного букета  $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$  не проходит ни из какой метрики. В частности,  $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$  нельзя вложить в  $\mathbb{R}^n$  ни для какого  $n$ .

**Конструкция 4.3** (факторпространства и произведения). Пусть  $X, Y$  — клеточные пространства. Рассмотрим разбиение произведения  $X \times Y$  на клетки вида  $e \times e'$ , где  $e$  — клетка в  $X$ , а  $e'$  — клетка в  $Y$ . Если хотя бы одно из пространств  $X, Y$  локально конечно, то это разбиение на клетки задаёт на  $X \times Y$  структуру клеточного пространства. Если же пространства  $X$  и  $Y$  не являются локально конечными, то данное разбиение произведения  $X \times Y$  на клетки может не удовлетворять аксиоме (W) относительно топологии произведения. Эта проблема возникает, например, в случае бесконечных букетов отрезков (задача). В этом случае топологию произведения  $X \times Y$  необходимо ослабить (сделать тощие).

Факторпространство клеточного пространства по клеточному подпространству само является клеточным пространством (задача). В частности, цилиндр, конус и надстройка над клеточным пространством — клеточные пространства.

#### Пример 4.4.

1. Сфера  $S^n$  имеет клеточное разбиение из двух клеток: точки  $e^0 = (1, 0, \dots, 0)$  и множества  $e^n = S^n \setminus e^0$ . Характеристическое отображение  $D^n \rightarrow S^n$ , соответствующее второй клетке, переводит границу шара в точку  $e^0$ . Например, можно взять отображение

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{cases} (-\cos \pi r, \frac{x_1}{r} \sin \pi r, \dots, \frac{x_n}{r} \sin \pi r), & \text{если } r \neq 0, \\ (-1, 0, \dots, 0), & \text{если } r = 0. \end{cases}$$

где  $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .

2. Другое клеточное разбиение сферы  $S^n$  состоит из  $2n + 2$  клеток  $e_{\pm}^0, e_{\pm}^1, \dots, e_{\pm}^n$ : клетка  $e_{\pm}^k$  состоит из точек  $(x_0, \dots, x_n) \in S^n$ , у которых  $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$  и  $\pm x_k > 0$ . Здесь замыкание каждой клетки гомеоморфно шару.

3. *Вещественное проективное пространство*  $\mathbb{R}P^n$  определяется как множество проходящих через  $\mathbf{0}$  прямых в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Топология в  $\mathbb{R}P^n$  вводится как фактортопология пространства  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbf{0}$  по отношению эквивалентности, при котором отождествляются точки, лежащие на одной прямой, проходящей через  $\mathbf{0}$ . Эта топология эквивалентна топологии, происходящей из угловой метрики: расстояние между прямыми равно углу между ними (задача).

Координаты  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  направляющего вектора прямой (определенные с точностью до пропорциональности) называются *однородными координатами* точки из  $\mathbb{R}P^n$ ; при этом используется обозначение  $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ . Точки, у которых

*i*-я координата отлична от 0 составляют *i*-ю аффинную карту

$$U_i = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n : x_i \neq 0\}.$$

Отображение

$$U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

определяет гомеоморфизм аффинной карты на  $\mathbb{R}^n$  и задаёт в ней координаты.

Имеется отображение  $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ , которое переводит точку сферы в прямую, проходящую через эту точку и  $\mathbf{0}$ . При этом диаметрально противоположные точки сферы переходят в одну прямую. Таким образом,  $\mathbb{R}P^n$  получается из  $S^n$  отождествлением диаметрально противоположных точек. Верхняя полусфера  $S_{\geqslant}^n = \{x \in S^n : x_n \geqslant 0\}$  гомеоморфна шару  $D^n$  (посредством отображения проекции, забывающего последнюю координату). Сужение отображения  $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  на  $S_{\geqslant}^n$  задаёт отображение  $D^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ , при котором в одну точку отображаются только диаметрально противоположные точки граничной сферы  $S^{n-1} \subset D^n$ .

При отображении  $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  клетки  $e_+^k$  и  $e_-^k$  разбиения сферы  $S^n$  из предыдущего примера склеиваются и получается разбиение пространства  $\mathbb{R}P^n$  на  $n+1$  клетку, по одной клетке  $e^k$  в каждой размерности  $k \leqslant n$ . Мы имеем

$$e^k = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n : x_k \neq 0, x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

Другими словами,  $e^k = \mathbb{R}P^k \setminus \mathbb{R}P^{k-1}$ , где пространства  $\mathbb{R}P^k$  образуют цепочку вложений  $pt = \mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \dots \subset \mathbb{R}P^n$ . Характеристическим отображением для клетки  $e^k$  является композиция  $D^k \rightarrow \mathbb{R}P^k \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$  проекции и вложения.

4. Рассмотрим множество  $\mathbb{R}^\infty$  финитных (т. е. нулевых, начиная с некоторого места) последовательностей  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$  вещественных чисел. Множество  $\mathbb{R}^\infty$  можно отождествить с бесконечным объединением  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n$  вложенных пространств  $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \dots$ , где  $\mathbb{R}^n$  вкладывается в  $\mathbb{R}^\infty$  при помощи отображения

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots).$$

Топология в  $\mathbb{R}^\infty$  вводится правилом: подмножество  $A \subset \mathbb{R}^\infty$  замкнуто тогда и только тогда, когда все пересечения  $A \cap \mathbb{R}^n$  замкнуты в своих пространствах  $\mathbb{R}^n$ . Это — самая тонкая топология, в которой все вложения  $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$  непрерывны, она называется *топологией прямого предела*.

*Бесконечномерная сфера*  $S^\infty$  определяется как единичная сфера в пространстве  $\mathbb{R}^\infty$ . Мы имеем  $S^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$  — бесконечное объединение вложенных сфер  $S^1 \subset S^2 \subset S^3 \subset \dots$

*Бесконечномерное вещественное проективное пространство*  $\mathbb{R}P^\infty$  — это объединение вложенных проективных пространств  $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3 \subset \dots$ . Эквивалентно,  $\mathbb{R}P^\infty$  — это множество проходящих через  $\mathbf{0}$  прямых в  $\mathbb{R}^\infty$ . Пространство  $\mathbb{R}P^\infty$  получается из  $S^\infty$  отождествлением диаметрально противоположных точек.

Клеточные разбиения сфер  $S^n$  и проективных пространств  $\mathbb{R}P^n$  из двух предыдущих примеров дают клеточные разбиения  $S^\infty$  и  $\mathbb{R}P^\infty$ . Первое разбиение имеет по две клетки  $e_+^k$  и  $e_-^k$ , а второе — по одной клетке  $e^k$  в каждой размерности  $k \geqslant 0$ . При этом аксиома (W) для каждого из этих клеточных разбиений вытекает из определения топологии прямого предела.

5. *Комплексное проективное пространство*  $\mathbb{C}P^n$  определяется как множество проходящих через  $\mathbf{0}$  прямых в  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Как и в случае  $\mathbb{R}P^n$ , на пространстве  $\mathbb{C}P^n$  имеются

однородные координаты  $[z_0 : z_1 : \dots : z_n]$  (определенные с точностью до умножения на ненулевое комплексное число), и  $\mathbb{C}P^n$  покрывается  $n + 1$  аффинными картами, каждая из которых гомеоморфна пространству  $\mathbb{C}^n$ .

Рассмотрим единичную сферу

$$S^{2n+1} = \{(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}.$$

Мы имеем отображение  $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ ,  $(z_0, z_1, \dots, z_n) \mapsto [z_0 : z_1 : \dots : z_n]$ , при котором прообразом точки  $[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}P^n$  является окружность в  $S^{2n+1}$ , состоящая из точек  $(z_0 z, z_1 z, \dots, z_n z)$  с  $|z| = 1$ .

Рассмотрим также шар

$$D^{2n} = \{(z_0, z_1, \dots, z_n) \in S^{2n+1} : z_n \in \mathbb{R}, z_n \geq 0\}.$$

Тогда отображение  $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  ограничивается до отображения  $D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ , которое взаимно однозначно на внутренности шара, а на границе  $S^{2n-1}$  происходит отождествление как описано выше (окружности переходят в точки).

Это даёт разбиение  $\mathbb{C}P^n$  на клетки

$$e^{2k} = \{[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}P^n : z_k \neq 0, z_{k+1} = \dots = z_n = 0\},$$

по одной в каждой чётной размерности  $2k \leq 2n$ , с характеристическими отображениями  $D^{2k} \rightarrow \mathbb{C}P^k \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ .

6. Классические двумерные поверхности (сфера с ручками, проективные плоскости с ручками, бутылки Клейна с ручками) получаются путём отождествления ребёр на границе многоугольника. Это приводит к клеточным разбиениям поверхностей с одной двумерной клеткой.

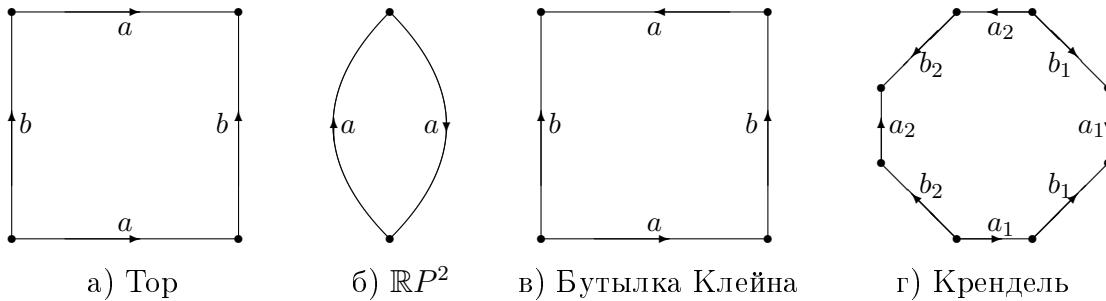


Рис. 1.

На рис. 1 а) изображено клеточное разбиение тора, получаемое отождествлением ребёр квадрата в соответствии с буквами и направлением стрелок. Это разбиение имеет одну 0-мерную клетку (в которую склеиваются все вершины), две 1-мерных клетки  $a$  и  $b$  и одну 2-мерную клетку (внутренность квадрата).

На рис. 1 б) изображено клеточное разбиение проективной плоскости с одной 0-мерной, одной 1-мерной и одной 2-мерной клетками. Это разбиение совпадает с разбиением из примера 3 при  $n = 2$ .

На рис. 1 в) изображено клеточное разбиение бутылки Клейна с одной 0-мерной, двумя 1-мерными и одной 2-мерной клетками.

На рис. 1 г) изображено клеточное разбиение сферы с двумя ручками (кренделя), получаемое отождествлением ребёр восьмиугольника. Оно содержит одну 0-мерную, четыре 1-мерные и одну 2-мерную клетками. Аналогично, разбиение сферы

с  $g$  ручками (также называемой *ориентируемой поверхностью рода  $g$* ) можно получить отождествлением рёбер  $4g$ -угольника. Такое разбиение имеет  $2g$  одномерных клеток  $a_1, \dots, a_g$  и  $b_1, \dots, b_g$ . Разбиение проективной плоскости с  $g$  ручками можно получить отождествлением рёбер  $(4g+2)$ -угольника, а разбиение бутылки Клейна с  $g$  ручками — отождествлением рёбер  $(4g+4)$ -угольника.

**4.2. Свойство продолжения гомотопии.** Подпространство  $A$  пространства  $X$  называется его *ретрактом*, если существует отображение  $r: X \rightarrow X$ , такое, что  $r(X) = A$  и  $r|_A = \text{id}$  (т.е.  $r(a) = a$  для любого  $a \in A$ ). Отображение  $r$  называется *ретракцией  $X$  на  $A$* ; оно удовлетворяет соотношению  $r^2 = r$  и является топологическим аналогом проектора.

Если ретракция  $r: X \rightarrow X$ ,  $r(X) = A$ , гомотопна тождественному отображению, то  $A$  называется *деформационным ретрактом* пространства  $X$ . Если, сверх того, гомотопию  $F: X \times I \rightarrow X$  между  $r$  и  $\text{id}$  можно сделать тождественной на  $A$  (т.е.  $F(a, t) = a$  для любого  $t \in I$ ), то  $A$  называется *строгим деформационным ретрактом* пространства  $X$ .

#### Пример 4.5.

1. Для любой точки  $x_0 \in X$  подпространство  $x_0 \times Y \cong Y$  является ретрактом произведения  $X \times Y$ . Ретракция  $r: X \times Y \rightarrow X \times Y$  задаётся формулой  $r(x, y) = (x_0, y)$ .

2. Единичная окружность  $S^1$  является строгим деформационным ретрактом пространства  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$ . Ретракция  $r: \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$  задаётся формулой  $r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ , а гомотопия между  $r$  и  $\text{id}$  — формулой  $F(\mathbf{x}, t) = t\mathbf{x} + (1-t)\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ .

*Парой* пространств называется пара  $(X, A)$ , где  $X$  — пространство, а  $A$  — его подпространство. *Отображением пар*  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  называется непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$ , такое, что  $f(A) \subset B$ . Например, отображение пространств с отмеченными точками является отображением пар  $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ .

Говорят, что пара  $(X, A)$  обладает *свойством продолжения гомотопии* (homotopy extension property, НЕР), если для любого отображения  $f: X \rightarrow Z$  и гомотопии  $F: A \times I \rightarrow Z$ , такой, что  $F_0 = f|_A$ , существует гомотопия  $\widehat{F}: X \times I \rightarrow Z$ , для которой  $\widehat{F}_0 = f$  и  $\widehat{F}|_{A \times I} = F$ . Таким образом,  $(X, A)$  обладает свойством продолжения гомотопии, если любое отображение  $X \times 0 \cup A \times I \rightarrow Z$  можно продолжить до отображения  $X \times I \rightarrow Z$ . Пара  $(X, A)$ , удовлетворяющая свойству продолжения гомотопии, также называется *парой Борсукова*, а отображение  $A \rightarrow X$  — *корасслоением* (смысл последнего термина будет объяснён позже, в разделе 8).

**Предложение 4.6.** *Пара  $(X, A)$  обладает свойством продолжения гомотопии тогда и только тогда, когда  $X \times 0 \cup A \times I$  — ретракт пространства  $X \times I$ .*

*Доказательство.* Свойство продолжения гомотопии влечёт, что тождественное отображение  $\text{id}: X \times 0 \cup A \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$  продолжается до отображения  $X \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$ , а потому  $X \times 0 \cup A \times I$  является ретрактом пространства  $X \times I$ .

Пусть теперь дана ретракция  $r: X \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$ . Отображения  $f: X \times 0 \rightarrow Z$  и  $F: A \times I \rightarrow Z$  согласованы на  $A \times 0$ , а потому склеиваются в отображение  $X \times 0 \cup_{A \times 0} A \times I \rightarrow Z$  (см. упражнение 1.39). Трудность может заключаться в том, что топология склейки  $X \times 0 \cup_{A \times 0} A \times I$  (фактор-топология несвязного объединения  $X \times 0 \sqcup A \times I$ ) может отличаться от топологии, индуцированной вложением  $X \times 0 \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$ .

Если подмножество  $A \subset X$  замкнуто, то топология склейки совпадает с индуцированной топологией. (Заметим, что подмножество  $B \subset X \times 0 \cup A \times I$  замкнуто в топологии склейки тогда и только тогда, когда замкнуты  $B \cap X \times 0$  и  $B \cap A \times I$ , а то же подмножество замкнуто в индуцированной топологии тогда и только тогда, когда найдётся замкнутое  $B' \subset X \times I$ , для которого  $B = B' \cap (X \times 0 \cup A \times I)$ .) Далее нам понадобится только этот случай. В общем случае можно доказать, что при наличии ретракции  $r: X \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$  топология склейки грубее индуцированной топологии, поэтому непрерывное отображение  $X \times 0 \cup_{A \times 0} A \times I \rightarrow Z$  из склейки будет также непрерывно в индуцированной топологии. В результате получаем композицию

$$X \times I \xrightarrow{r} X \times 0 \cup A \times I \xrightarrow{f \cup F} Z,$$

которая задаёт требуемое продолжение гомотопии.  $\square$

*Клеточной парой* называется пара  $(X, A)$ , где  $X$  — клеточное пространство, а  $A$  — его клеточное подпространство.

**Теорема 4.7.** *Клеточная пара  $(X, A)$  обладает свойством продолжения гомотопии.*

*Доказательство.* Мы докажем, что  $X \times 0 \cup A \times I$  является ретрактом пространства  $X \times I$ ; тогда результат будет следовать из предложения 4.6.

Ретракция  $X \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$  будет построена как композиция ретракций  $r_n: X^n \times I \rightarrow X^n \times 0 \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$ . Композиция здесь понимается в следующем смысле. Так как  $X \times I = \bigcup_{n \geq 0} X^n \times I$ , каждая точка  $x \in X \times I$  лежит в  $X^n \times I$  для некоторого  $n$ . Применив к  $x$  ретракцию  $r_n$ , мы попадём либо в  $X^n \times 0 \cup A^n \times I \subset X \times 0 \cup A \times I$ , либо в  $X^{n-1} \times I$ . В последнем случае мы применяем ретракцию  $r_{n-1}: X^{n-1} \times I \rightarrow X^{n-1} \times 0 \cup (X^{n-2} \cup A^{n-1}) \times I$ , в результате чего попадём либо в  $X \times 0 \cup A \times I$ , либо в  $X^{n-2} \times I$ , и так далее. В результате, последовательно применяя к  $x \in X^n \times I$  ретракции  $r_n, r_{n-1}, \dots, r_0$ , мы попадём в  $X \times 0 \cup A \times I$ , так как  $X^{-1} = \emptyset$ . Получаемое отображение  $X \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$  будет непрерывно, так как оно непрерывно на каждом осте  $X^n \times I$ , где оно устроено как композиция конечного числа непрерывных ретракций. Этот процесс соответствует тому, что мы продолжаем гомотопию  $A \times I \rightarrow Z$  до  $X \times I \rightarrow Z$  последовательно по осткам, на  $n$ -шаге продолжая гомотопию  $(X^{n-1} \cup A) \times I \rightarrow Z$  до гомотопии  $(X^n \cup A) \times I \rightarrow Z$ .

Осталось построить ретракцию  $r_n: X^n \times I \rightarrow X^n \times 0 \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$ . Пространство  $X^n$  получается из  $X^{n-1} \cup A^n$  добавлением всех  $n$ -мерных клеток, не лежащих в  $A$ . Таким образом,  $X^n \times I$  получается из  $X^n \times 0 \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$  приклеиванием экземпляров  $D^n \times I$  вдоль  $D^n \times 0 \cup \partial D^n \times I$  при помощи характеристических отображений  $n$ -мерных клеток. Так как характеристическое отображение  $D^n \rightarrow X^n$  является гомеоморфизмом на внутренности шара, требуемая ретракция  $r_n: X^n \times I \rightarrow X^n \times 0 \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$  получается применением отдельно для каждой  $n$ -мерной клетки стандартной ретракции  $r: D^n \times I \rightarrow D^n \times 0 \cup \partial D^n \times I$  (цилиндр ретрагируется на объединение дна и стенки). Эту стандартную ретракцию можно задать центральной проекцией из точки  $(0, 2) \in D^n \times \mathbb{R}$ .  $\square$

**Теорема 4.8.** *Если пара  $(X, A)$  удовлетворяет свойству продолжения гомотопии (например, если  $(X, A)$  — клеточная пара) и  $A$  стягивается, то отображение факторизации  $q: X \rightarrow X/A$  является гомотопической эквивалентностью.*

*Доказательство.* Стягивание пространства  $A$  — это гомотопия между отображениями  $\text{id}: A \rightarrow A$  и  $A \rightarrow pt$ . Пусть  $F_t: X \rightarrow X$  — продолжение этой гомотопии, причём  $F_0 = \text{id}$ . Так как  $F_t(A) \subset A$ , определена гомотопия фактор-отображений  $\widehat{F}_t: X/A \rightarrow X/A$ , входящая в коммутативную диаграмму слева:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F_t} & X \\ \downarrow q & & \downarrow q \\ X/A & \xrightarrow{\widehat{F}_t} & X/A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F_1} & X \\ \downarrow q & \nearrow g & \downarrow q \\ X/A & \xrightarrow{\widehat{F}_1} & X/A \end{array}$$

При  $t = 1$  мы имеем  $F_1(A) = pt$ , а значит  $F_1$  индуцирует отображение  $g: X/A \rightarrow X$ , причём  $gq = F_1$ , как на диаграмме справа. Кроме того,  $qg = \widehat{F}_1$ , так как  $qg(\widehat{x}) = qgq(x) = qF_1(x) = \widehat{F}_1q(x) = \widehat{F}_1(\widehat{x})$ . Отображения  $g: X/A \rightarrow X$  и  $q: X \rightarrow X/A$  являются взаимно обратными гомотопическим эквивалентностями, так как  $gq = F_1 \simeq F_0 = \text{id}$  посредством  $F_t$  и  $qg = \widehat{F}_1 \simeq \widehat{F}_0 = \text{id}$  посредством  $\widehat{F}_t$ .  $\square$

**Предложение 4.9.** *Если пара  $(X, A)$  удовлетворяет свойству продолжения гомотопии, то  $X/A \simeq X \cup CA$ , где  $CA$  — конус над  $A$ .*

*Доказательство.* Если  $(X, A)$  удовлетворяет НЕР, то пара  $(X \cup CA, CA)$  также удовлетворяет НЕР. Мы имеем  $X/A = (X \cup CA)/CA \simeq X \cup CA$ , где последняя гомотопическая эквивалентность вытекает из теоремы 4.8.  $\square$

**4.3. Теорема о клеточной аппроксимации.** Если  $A \subset X$  — подпространство, то гомотопией относительно  $A$  называется гомотопия  $F_t: X \rightarrow Y$ , такая, что  $F_t(a) = F_{t'}(a)$  для любых  $t, t' \in I$  и  $a \in A$  (т.е. гомотопия неподвижна на  $A$ ).

Напомним, что отображение  $f: X \rightarrow Y$  клеточных пространств называется клеточным, если  $f(X^n) \subset Y^n$  для всех  $n$ .

**Теорема 4.10.** *Любое отображение  $f: X \rightarrow Y$  клеточных пространств гомотопно клеточному отображению. Если  $f$  уже является клеточным на клеточном подпространстве  $A \subset X$ , то можно выбрать гомотопию относительно  $A$ .*

*Доказательство.* Предположим по индукции, что  $f: X \rightarrow Y$  уже клеточно на основе  $X^{n-1}$ , и пусть  $e^n$  — клетка в  $X$ . Замыкание  $\bar{e}^n$  компактно в  $X$ , так как оно является образом характеристического отображения  $D^n \rightarrow X$ . Тогда  $f(\bar{e}^n) \subset Y$  также компактно, а значит  $f(e^n)$  пересекает только конечное число клеток в  $Y$  (упражнение 4.13). Пусть  $\varepsilon^k$  — клетка самой высокой размерности, с которой пересекается  $f(e^n)$ . Можно считать, что  $k > n$ , так как иначе  $f$  уже клеточно на  $e^n$ . Ниже мы покажем, что существует деформация (гомотопия) отображения  $f|_{X^{n-1} \cup e^n}$  относительно  $X^{n-1}$ , такая, что образ клетки  $e^n$  при деформированном отображении не содержит некоторую точку  $y \in \varepsilon^k$ . Тогда можно деформировать отображение  $f|_{X^{n-1} \cup e^n}$  относительно  $X^{n-1}$  так, чтобы образ клетки  $e^n$  вообще не пересекал клетку  $\varepsilon^k$ . Для этого нужно композицию с деформационной ретракцией пространства  $Y^k \setminus y$  на  $Y^k \setminus \varepsilon^k$ . Такая деформационная ретракция существует, так как существует деформационная ретракция  $D^k \setminus x \rightarrow \partial D^k$  для  $x \in \text{int } D^k$ , а характеристическое отображение  $D^k \rightarrow Y$  клетки  $\varepsilon^k$  является гомеоморфизмом на  $\text{int } D^k$ . Повторяя этот процесс конечное число раз, мы добьёмся того, чтобы множество  $f(e^n)$  не пересекало ни одну клетку размерности больше  $n$ . Делая это для всех  $n$ -мерных клеток и оставляя при

этом отображение неподвижными на  $n$ -мерных клетках из  $A$ , где оно уже клеточное, мы получим гомотопию отображения  $f|_{X^n}$  относительно  $X^{n-1} \cup A^n$  в клеточное отображение. Далее мы пользуемся теоремой 4.7, чтобы продолжить эту гомотопию  $X^n \times I \rightarrow Y$ , вместе с постоянной гомотопией на  $A$ , до гомотопии на всём пространстве  $X$ , т. е. применим свойство продолжения гомотопии к паре  $(X, X^n \cup A)$ . В результате получим гомотопию исходного отображения  $f: X \rightarrow Y$  в отображение, которое клеточно на  $X^n$  и совпадает на  $X^{n-1}$  с отображением из предыдущего шага.

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем, возможно, бесконечную последовательность гомотопий, которую можно реализовать как одну гомотопию, выполняя гомотопию с номером  $n$  в течение времени  $t$  из интервала  $[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}]$ . Более подробно, сначала за время  $t \in [0, \frac{1}{2}]$  мы деформируем исходное отображение  $f: X \rightarrow Y$  в отображение, которое является клеточным на  $X^0$ . Затем за время  $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$  мы деформируем это отображение в отображение, которое является клеточным на  $X^1$  и совпадает с предыдущим на  $X^0$ . И так далее. Непрерывность всей гомотопии обеспечивается аксиомой (W): для каждой клетки  $e$  из  $X$  гомотопия будет неподвижной, начиная с некоторого  $t_e < 1$ .

Чтобы заполнить недостающий шаг в рассуждении, нам понадобится «лемма о свободной точке»:

**Лемма 4.11.** *Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  — открытое множество и  $\varphi: U \rightarrow \text{int } D^k$  — такое непрерывное отображение, что для некоторого замкнутого шара  $B^k \subset \text{int } D^k$  подмножество  $V = \varphi^{-1}(B^k) \subset U$  компактно. Если  $k > n$ , то существует непрерывное отображение  $\psi: U \rightarrow \text{int } D^k$ , гомотопное  $\varphi$ , совпадающее с  $\varphi$  вне  $V$  и такое, что его образ не покрывает всего шара  $B^k$ .*

Доказательство леммы приводится ниже, а пока завершим доказательство теоремы. Из леммы о свободной точке и свойств характеристических отображений  $h: D^n \rightarrow X$  и  $g: D^k \rightarrow Y$  клеток  $e^n$  и  $\varepsilon^k$  вытекает, что отображение  $f|_{A \cup X^{n-1} \cup e^n}$  гомотопно относительно  $A \cup X^{n-1}$  отображению  $f': A \cup X^{n-1} \cup e^n \rightarrow Y$ , такому, что  $f'(e^n)$  пересекает те же клетки, что и  $f(e^n)$ , но не содержит всю клетку  $\varepsilon^k$ . Действительно, применим лемму к подмножеству  $U = h^{-1}(f^{-1}(\varepsilon^k) \cap e^n)$  и отображению  $\varphi = g^{-1} \circ f \circ h: U \rightarrow \text{int } D^k$  (тогда для любого замкнутого шара  $B^k \subset \text{int } D^k$  подмножество  $V = \varphi^{-1}(B^k) \subset U$  компактно как замкнутое подмножество шара  $D^n$ ). Лемма даёт нам отображение  $\psi: U \rightarrow \text{int } D^k$ . Тогда мы определим отображение  $f'$  по формуле

$$f'(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \notin h(U), \\ g \circ \psi \circ h^{-1}(x), & \text{если } x \in h(U). \end{cases}$$

Это отображение непрерывно, так как отображения  $f$  и  $g \circ \psi \circ h^{-1}$  совпадают на множестве  $h(U \setminus V)$ . Кроме того, гомотопия между  $\varphi$  и  $\psi$  даёт гомотопию между  $f$  и  $f'$ , а  $f'(e^n)$  не покрывает  $\varepsilon^k$ , так как  $\psi(U)$  не покрывает всего шара  $B^k$ .  $\square$

Для доказательства леммы о свободной точке мы используем кусочно-линейную аппроксимацию.

Напомним, что  $k$ -мерный симплекс  $\Delta^k$  — это выпуклая оболочка набора из  $k + 1$  точек  $x_0, x_1, \dots, x_k$  в  $\mathbb{R}^n$ , не лежащих на одной  $(k - 1)$ -мерной плоскости. Эти  $k + 1$  точек называются *вершинами* симплекса, а выпуклые оболочки поднаборов множества вершин называются *гранями*. Границы являются симплексами размерности  $\leq k$ .

*Симплексиальный комплекс* — это такой набор симплексов произвольной размерности в некотором  $\mathbb{R}^n$ , что любые два симплекса из этого набора либо не пересекаются, либо пересекаются по целой грани. Здесь мы будем рассматривать только конечные симплексиальные комплексы. Говорят, что некоторое подмножество пространства  $\mathbb{R}^n$  *триангулировано*, если оно представлено в виде объединения симплексов, которые образуют симплексиальный комплекс.

*Барицентром* симплекса  $\Delta^k$  с вершинами  $x_0, x_1, \dots, x_k$  называется точка  $\frac{1}{k+1}(x_0 + x_1 + \dots + x_k)$ . *Барицентрическим подразбиением* симплекса  $\Delta^k$  называется симплексиальный комплекс, вершинами которого являются барицентры всех граней симплекса  $\Delta^k$ ; при этом набор барицентров граней является множеством вершин симплекса в барицентрическом подразбиении только тогда, когда эти грани образуют цепочку вложенных друг в друга. По-другому барицентрическое подразбиение симплекса можно определить индуктивно: барицентрическое подразбиение 0-мерного симплекса (точки) есть сама эта точка, а при  $k > 0$  барицентрическое подразбиение  $k$ -мерного симплекса получается взятием конусов над барицентрическими подразбиениями всех его граней. Аналогично, индуктивным образом определяется барицентрическое подразбиение произвольного симплексиального комплекса.

Эти конструкции обладают следующими двумя свойствами. Во-первых, линейное (аффинное) отображение симплекса  $\Delta^k$  в любое  $\mathbb{R}^n$  определяется своими значениями на вершинах. Во-вторых, если диаметр симплекса  $\Delta^k$  (максимальное расстояние между его точками) равен  $r$ , то диаметры симплексов его барицентрического подразбиения не превосходят  $\frac{k}{k+1}r$ . Таким образом, многократно применяя барицентрическое подразбиение, можно получать сколь угодно мелкие триангуляции.

*Доказательство леммы 4.11.* Прежде всего заметим, что отображение  $\psi: U \rightarrow \text{int } D^k$ , совпадающее с  $\varphi$  вне  $V$ , будет автоматически гомотопно  $\varphi$  относительно  $U \setminus V$ ; достаточно взять «прямолинейную» гомотопию, при которой точка  $\varphi(u)$  движется к точке  $\psi(u)$  по отрезку, соединяющему  $\varphi(u)$  с  $\psi(u)$ .

Теперь построим в шаре  $B \subset \text{int } D^k$  концентрические шары  $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset B_4$  радиусов  $r/5, 2r/5, 3r/5, 4r/5$ , где  $r$  — радиус шара  $B$ . Компактное подмножество  $V = \varphi^{-1}(B) \subset U$  содержится в некотором  $n$ -мерном симплексе в  $\mathbb{R}^n$ . Многократно применяя к этому симплексу барицентрическое подразбиение, мы можем выбрать в нём симплексиальный подкомплекс  $K$  (триангулированное множество), удовлетворяющие условиям:  $V \subset K \subset U$  и для любого симплекса  $\Delta \subset K$  имеем  $\text{diam } \varphi(\Delta) < r/5$ . Пусть  $K_1$  — объединение симплексов построенной триангуляции множества  $K$ ,  $\varphi$ -образы которых пересекаются с  $B_4$ . Тогда  $B_4 \cap \varphi(U) \subset \varphi(K_1) \subset B$ , где последнее включение следует из того, что  $\text{diam } \varphi(\Delta) < r/5$  для  $\Delta \subset K_1$ . Рассмотрим отображение  $\varphi': K_1 \rightarrow B$ , совпадающее с  $\varphi$  на вершинах триангуляции и линейное на каждом симплексе. Отображения  $\varphi|_{K_1}$  и  $\varphi'$  гомотопны — они соединяются прямолинейной гомотопией

$$\varphi_t: K_1 \rightarrow B, \quad \varphi_0 = \varphi|_{K_1}, \quad \varphi_1 = \varphi'.$$

Теперь «сошьём» отображения  $\varphi$  и  $\varphi'$  в отображение  $\psi: U \rightarrow \text{int } D^k$ :

$$\psi(u) = \begin{cases} \varphi(u), & \text{если } \varphi(u) \notin B_3, \\ \varphi'(u), & \text{если } \varphi(u) \in B_2, \\ \varphi_{3-5r(u)}(u), & \text{если } \varphi(u) \in B_3 \setminus B_2. \end{cases}$$

Здесь  $r(u)$  — расстояние от  $\varphi(u)$  до центра шара  $B$ . Отображение  $\psi$  определено и непрерывно для всех  $u \in U$  (отображение  $\varphi_t$  определено только на подмножестве  $K_1 \subset U$ , но если  $\varphi(u) \in B_3$ , то  $u \in K_1$ ). При этом  $\psi$  совпадает с  $\varphi$  на  $U \setminus V$  (если  $u \in U \setminus V$ , то  $\varphi(u) \notin B_3$ ) и  $\psi(U) \cap B_1 = \varphi'(K_1) \cap B_1$  (если  $\varphi(u) \in B_3 \setminus B_2$ , то  $\psi(u) = \varphi_{3-5r(u)}(u) \notin B_1$  из-за условия на диаметры). Так как  $\varphi'$  линейно на симплексах триангуляции,  $\varphi'(K_1) \cap B_1$  представляет собой конечное число кусков  $n$ -плоскостей и не может совпадать со всем  $k$ -мерным шаром  $B_1$  ( $k > n$ ). Поэтому  $\psi(U)$  не покрывает всего шара  $B_1$ , а значит и всего шара  $B$ .  $\square$

**Предложение 4.12.** *Любое отображение  $S^k \rightarrow S^n$  при  $k < n$  гомотопно отображению в точку.*

*Доказательство.* Применим теорему о клеточной аппроксимации к клеточным разбиениям сфер с двумя клетками. При  $k < n$  клеточное отображение есть отображение в точку.  $\square$

### Задачи и упражнения.

**4.13.** Докажите, что любое компактное подмножество клеточного пространства принадлежит некоторому конечному подпространству.

**4.14.** Докажите эквивалентность следующих свойств для подмножества клеточного пространства  $X$ :

- подмножество  $Y \subset X$  замкнуто (соответственно, открыто);
- пересечение  $Y \cap X^n$  замкнуто (соответственно, открыто) для любого  $n$ ;
- прообраз  $\Phi_i^{-1}(Y)$  при характеристическом отображении  $\Phi_i: D^q \rightarrow X$  любой клетки  $e_i^q$  замкнут (соответственно, открыт) в  $D^q$ .

**4.15.** Докажите, что отображение клеточного пространства в топологическое пространство непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно на любом осте.

**4.16.** Докажите, что пространство, получаемое в результате приклеивания клетки к хаусдорфовому пространству, хаусдорфово.

**4.17.** Докажите, что для пространства, получаемого конечной итерацией операции приклеивания клетки из пустого множества, аксиомы (C) и (W) выполнены автоматически.

**4.18.** Докажите, что бесконечный букет отрезков  $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$  не метризуем.

**4.19.** Докажите, что клеточное пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно локально конечно.

**4.20.** Ведите разбиение на клетки факторпространства  $X/Y$  клеточного пространства  $X$  по клеточному подпространству  $Y$  и докажите, что  $X/Y$  является клеточным пространством.

**4.21.** Докажите, что стандартное разбиение на клетки произведения  $X \times Y$  с топологией произведения не удовлетворяет аксиоме (W) в случае  $X = \bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$  (букет чётного числа отрезков) и  $Y = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} I_{\alpha}$  (букет континуального числа отрезков).

**4.22.** Бесконечномерная сфера  $S^{\infty}$  стягивается.

**4.23.** Докажите, что  $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$  и  $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ .

**4.24.** Определите кватернионное проективное пространство  $\mathbb{H}P^n$  и докажите, что  $\mathbb{H}P^1 \cong S^4$ .

**4.25.** Докажите, что свойство продолжения гомотопии не выполнено для пар  $(I, A)$ , где  $A = (0, 1]$  или  $A = \{0, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$ .

**4.26.** Докажите, что если  $X$  хаусдорфово и  $X \times 0 \cup A \times I$  является ретрактом пространства  $X \times I$ , то  $A$  замкнуто в  $X$ .

**4.27.** Факторпространство  $S^2/S^0$  гомотопически эквивалентно букету  $S^1 \vee S^2$ .

**4.28.** Докажите, что если пара  $(X, A)$  удовлетворяет свойству продолжения гомотопии и вложение  $A \hookrightarrow X$  гомотопно отображению в точку, то имеется гомотопическая эквивалентность  $X/A \simeq X \vee \Sigma A$ .

**4.29.** Симметрическим квадратом пространства  $X$  называется факторпространство  $(X \times X)/\sim$  по отношению эквивалентности  $(x, y) \sim (y, x)$ . Докажите, что симметрический квадрат окружности  $S^1$  гомеоморфен листу Мёбиуса (односторонней поверхности, получаемой склейкой одной пары противоположных сторон квадрата с обращением ориентации, т.е.  $I^2/\sim$ , где  $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$ .)

**4.30.** Докажите, что симметрический квадрат двумерной сферы  $S^2$  гомеоморфен комплексной проективной плоскости  $\mathbb{C}P^2$ .

**4.31.** Рассмотрим клеточное разбиение окружности  $S^1$  с двумя клетками. Убедитесь, что диагональное отображение  $\Delta: S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ ,  $t \mapsto (t, t)$ , не является клеточным. Постройте явно его клеточную аппроксимацию.

**4.32.** Докажите, что топология на проективном пространстве  $\mathbb{R}P^n$ , определяемая как фактортопология пространства  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbf{0}$ , совпадает с топологией, происходящей из угловой метрики (расстояние между прямыми равно углу между ними).

## 5. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА

**5.1. Определение и основные свойства.** Напомним, что петлёй в точке  $x_0$  пространства  $X$  называется отображение (путь)  $\varphi: I \rightarrow X$ ,  $t \mapsto \varphi(t)$ , для которого  $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$ . Петли  $\varphi$  и  $\varphi'$  называются *гомотопными* (обозначение:  $\varphi \sim \varphi'$ ), если существует такая гомотопия  $\varphi_s: I \rightarrow X$ , что  $\varphi_0 = \varphi$ ,  $\varphi_1 = \varphi'$  и  $\varphi_s(0) = \varphi_s(1) = x_0$  при  $0 \leq s \leq 1$  (последнее условие означает, что гомотопия постоянна на концах путей). *Произведение*  $\varphi\psi$  петель  $\varphi$  и  $\psi$  — это петля  $\chi$ , у которой  $\chi(t) = \varphi(2t)$  при  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$  и  $\chi(t) = \psi(2t - 1)$  при  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ . Другими словами, произведение двух петель — это петля, составленная из двух петель, которые проходятся последовательно (с удвоенной скоростью).

**Предложение 5.1.** *Произведение петель (в точке  $x_0$ ) обладает свойствами:*

- а) если  $\varphi \sim \varphi'$  и  $\psi \sim \psi'$ , то  $\varphi\psi \sim \varphi'\psi'$ ,
- б)  $(\varphi\psi)\chi \sim \varphi(\psi\chi)$  для любых петель  $\varphi, \psi, \chi$ ,
- в) если  $\varepsilon$  — постоянная петля, т.е.  $\varepsilon(t) = x_0$  при  $0 \leq t \leq 1$ , то  $\varphi\varepsilon \sim \varepsilon\varphi \sim \varphi$  для любой петли  $\varphi$ ,
- г) для петли  $\varphi$  определим петлю  $\bar{\varphi}$  как  $\bar{\varphi}(t) = \varphi(1 - t)$ ; тогда  $\varphi\bar{\varphi} \sim \bar{\varphi}\varphi \sim \varepsilon$ .

*Доказательство.* Проверим свойство а). Пусть  $\varphi_s$  — гомотопия между  $\varphi$  и  $\varphi'$ , а  $\psi_s$  — гомотопия между  $\psi$  и  $\psi'$ . Тогда гомотопия  $\chi_s$  между  $\chi = \varphi\psi$  и  $\chi' = \varphi'\psi'$  задаётся формулой

$$\chi_s(t) = \begin{cases} \varphi_s(2t) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \psi_s(2t-1) & \text{при } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Проверим свойство б). Пусть  $\xi = (\varphi\psi)\chi$  и  $\xi' = \varphi(\psi\chi)$ , т. е.

$$\xi(t) = \begin{cases} \varphi(4t) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ \psi(4t-1) & \text{при } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \chi(2t-1) & \text{при } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \quad \xi'(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \psi(4t-2) & \text{при } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ \chi(4t-3) & \text{при } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Тогда гомотопия  $\xi_s$  ( $0 \leq s \leq 1$ ) между  $\xi$  и  $\xi'$  задаётся формулой

$$\xi_s(t) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{4t}{1+s}\right) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4}, \\ \psi\left(4t-1-\frac{s}{1+s}\right) & \text{при } \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4}, \\ \chi\left(\frac{4t-2-s}{2-s}\right) & \text{при } \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

(см. рис. 2).

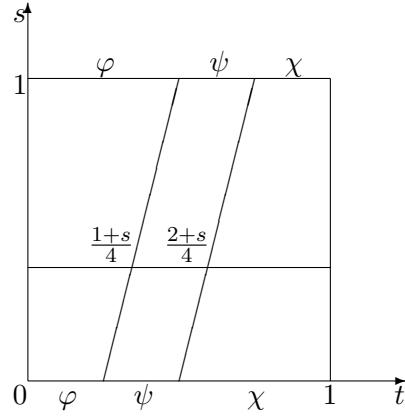


Рис. 2.

Проверим свойство в). Гомотопия между  $\varphi\varepsilon$  и  $\varphi$  задаётся формулой

$$\xi_s(t) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{2t}{1+s}\right) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{s+1}{2}, \\ \varepsilon(t) = x_0 & \text{при } \frac{s+1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Проверим свойство г). Гомотопия между  $\chi = \varphi\bar{\varphi}$  и  $\varepsilon$  задаётся формулой

$$\varphi_s(t) = \begin{cases} \varphi(2t(1-s)) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \varphi(2(1-t)(1-s)) & \text{при } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Другими словами, в момент  $s$  гомотопии мы проходим по петле  $\varphi$  от  $x_0$  до точки  $\varphi(1-s)$ , а затем проходим по ней обратно до  $x_0$ .  $\square$

Мы будем обозначать через  $[\varphi]$  класс эквивалентности петли  $\varphi$  относительно гомотопии петель. Из предложения 5.1 следует, что множество классов гомотопных петель в точке  $x_0 \in X$  образует группу относительно произведения  $[\varphi][\psi] = [\varphi\psi]$ , с

единицей  $[\varepsilon]$  и обратным элементом  $[\varphi]^{-1} = [\bar{\varphi}]$ . Эта группа обозначается  $\pi_1(X, x_0)$  и называется *фундаментальной группой* пространства  $X$  с отмеченной точкой  $x_0$ .

Скажем, что гомотопия  $\varphi_s$  отображения  $\varphi: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  пространств с отмеченными точками *сохраняет отмеченные точки*, если  $\varphi_s(x_0) = y_0$  при  $0 \leq s \leq 1$ .

### Предложение 5.2.

- а) Отображение  $f: X \rightarrow Y$ , такое, что  $f(x_0) = y_0$ , индуцирует гомоморфизм группы  $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ .
- б) Тождественное отображение  $\text{id}: X \rightarrow X$  индуцирует тождественный гомоморфизм фундаментальных групп, а композиция отображений  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: Y \rightarrow Z$ ,  $f(x_0) = y_0$ ,  $g(y_0) = z_0$ , индуцирует композицию гомоморфизмов фундаментальных групп, т. е.  $(gf)_* = g_*f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Z, z_0)$ .
- в) Если отображения  $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  гомотопны с сохранением отмеченных точек, то гомоморфизмы  $f_*$  и  $g_*$  совпадают.

*Доказательство.* а) Определим отображение  $f_*$ , переводящее петлю  $\varphi: I \rightarrow X$  в петлю  $f \circ \varphi: I \rightarrow Y$ . Если петли  $\varphi$  и  $\varphi'$  гомотопны при помощи гомотопии  $F: I \times I \rightarrow X$ , то петли  $f \circ \varphi$  и  $f \circ \varphi'$  гомотопны при помощи гомотопии  $f \circ F$ . Поэтому отображение  $f_*$  корректно определено на классах гомотопии петель,  $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ . Далее,  $f_*$  есть гомоморфизм, так как

$$f_*([\varphi][\psi]) = f_*([\varphi\psi]) = [f \circ (\varphi\psi)] = [(f \circ \varphi)(f \circ \psi)] = [f \circ \varphi][f \circ \psi] = f_*([\varphi])f_*([\psi]).$$

$$\text{б)} (gf)_*[\varphi] = [g \circ f \circ \varphi] = g_*[f \circ \varphi] = g_*f_*[\varphi].$$

в) Пусть  $G: X \times I \rightarrow Y$  — гомотопия между  $f$  и  $g$ , сохраняющая отмеченные точки, т. е.  $G(x_0, s) = y_0$  при  $0 \leq s \leq 1$ . Тогда, для любой петли  $\varphi: I \rightarrow X$ , петли  $f \circ \varphi$  и  $g \circ \varphi$  гомотопны: гомотопия задаётся формулой  $H: I \times I \rightarrow Y$ ,  $H(t, s) = G(\varphi(t), s)$ . Следовательно,  $f_*[\varphi] = [f \circ \varphi] = [g \circ \varphi] = g_*[\varphi]$  и  $f_* = g_*$ .  $\square$

### 5.2. Зависимость от отмеченной точки.

**Теорема 5.3.** Если пространство  $X$  линейно связно, то  $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$  (изоморфны) для любых точек  $x_0, x_1 \in X$ .

*Доказательство.* Пусть  $\alpha: I \rightarrow X$  — путь из  $x_0$  в  $x_1$ , т. е.  $\alpha(0) = x_0$  и  $\alpha(1) = x_1$ . Для каждой петли  $\varphi$  в точке  $x_0$  мы положим  $b_\alpha(\varphi) = (\bar{\alpha}\varphi)\alpha$ . Здесь  $\bar{\alpha}$  — «обратный» путь,  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ , а умножение путей определяется так же, как и умножение петель, при условии, что второй путь начинается там, где кончается первый. Тогда  $b_\alpha(\varphi)$  — петля в точке  $x_1$ , причём её гомотопический класс зависит только от гомотопических классов петли  $\varphi$  и пути  $\alpha$  (где в последнем случае подразумеваются гомотопии с закреплёнными концами). Получаем отображение «замены отмеченной точки»

$$b_\alpha: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1),$$

которое зависит только от гомотопического класса пути  $\alpha$ .

Отображение  $b_\alpha$  является гомоморфизмом, так как

$$b_\alpha([\varphi\psi]) = [\bar{\alpha}\varphi\psi\alpha] = [\bar{\alpha}\varphi\alpha\bar{\alpha}\psi\alpha] = [\bar{\alpha}\varphi\alpha][\bar{\alpha}\psi\alpha] = b_\alpha([\varphi])b_\alpha([\psi]).$$

Кроме того, формула  $b_\alpha^{-1}([\chi]) = [\alpha\chi\bar{\alpha}]$  задаёт обратный гомоморфизм, так что  $b_\alpha$  — изоморфизм.  $\square$

Изоморфизм  $b_\alpha$  зависит от гомотопического класса пути  $\alpha$ . Если  $\beta$  — другой путь из  $x_0$  в  $x_1$ , то  $\gamma = \bar{\alpha}\beta$  — петля в точке  $x_1$ , и мы имеем

$$b_\beta([\varphi]) = [\bar{\beta}\varphi\beta] = [\bar{\beta}\alpha\bar{\alpha}\varphi\alpha\bar{\alpha}\beta] = [\bar{\beta}\alpha][\bar{\alpha}\varphi\alpha][\bar{\alpha}\beta] = [\gamma]^{-1}b_\alpha([\varphi])[\gamma].$$

В частности, если фундаментальная группа коммутативна, то изоморфизм  $b_\alpha$  вообще не зависит от  $\alpha$ . В этом случае мы можем говорить о фундаментальной группе, не фиксируя отмеченной точки. В общем случае о фундаментальной группе линейно связного пространства без отмеченной точки можно говорить только как об абстрактной группе (т. е. можно сказать, что она, например, конечна или нильпотентна, но нельзя фиксировать в ней определённый элемент).

Далее мы часто будем использовать сокращённое обозначение  $\pi_1(X)$  для фундаментальной группы  $\pi_1(X, x_0)$  в случае, когда выбор отмеченной точки  $x_0$  не влияет на результат или ясен из контекста.

**Предложение 5.4.** *Если  $f: X \rightarrow Y$  — гомотопическая эквивалентность, то  $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$  является изоморфизмом для любой точки  $x_0 \in X$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим отображения  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: Y \rightarrow X$ , такие, что композиции  $g \circ f$  и  $f \circ g$  гомотопны тождественным отображениям  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  и  $\text{id}_Y: Y \rightarrow Y$ , соответственно. Если бы эти гомотопии сохраняли отмеченные точки, то согласно предложению 5.2 мы бы получили  $g_*f_* = \text{id}$  и  $f_*g_* = \text{id}$  — тождественные изоморфизмы, откуда бы следовало, что  $f_*$  — изоморфизм.

В общем случае гомотопия  $F: X \times I \rightarrow X$  между  $\text{id}_X$  и  $gf$  может не сохранять отмеченную точку. Рассмотрим путь  $\alpha(t) = F(x_0, t)$ , который проходит отмеченная точка  $x_0$  при этой гомотопии. Тогда  $\alpha(0) = x_0$  и  $\alpha(1) = g(f(x_0))$ . Легко видеть, что  $g_*f_* = b_\alpha: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, gf(x_0))$  — изоморфизм, построенный при доказательстве предложения 5.2. Отсюда следует, что  $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$  инъективно для любой точки  $x_0 \in X$  (а  $g_*$  сюръективно). Аналогично рассматривая гомотопию между  $\text{id}_Y$  и  $fg$  получим, что  $f_*g_*: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Y, fg(y_0))$  — изоморфизм. Отсюда получаем, что  $f_*$  сюръективно, а значит  $f_*$  — изоморфизм.  $\square$

Напомним, что пространство  $X$  называется стягиваемым, если оно гомотопически эквивалентно точке.

**Следствие 5.5.** *Пусть  $X$  — стягиваемое пространство. Тогда  $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$  для любой точки  $x_0 \in X$ . В частности,  $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \pi_1(D^n) = \{1\}$ .*

**Предложение 5.6.**  $\pi_1(S^n) = \{1\}$  при  $n \geq 2$ .

*Доказательство.* Это вытекает из теоремы о клеточной аппроксимации (теорема 4.10). Действительно, любая петля  $\varphi: I \rightarrow S^n$ ,  $\varphi(0) = \varphi(1) = s_0$ , рассматривается как отображение клеточных пространств, гомотопна клеточному отображению. Если на отрезке  $I$  ввести стандартную клеточную структуру, а на  $S^n$  — клеточную структуру с двумя клетками  $s_0$  и  $S^n \setminus \{s_0\}$ , то единственным клеточным отображением  $I \rightarrow S^n$  при  $n \geq 2$  будет отображение в точку  $s_0$ , т. е. постоянная петля.  $\square$

### 5.3. Фундаментальная группа окружности.

**Теорема 5.7.** *Группа  $\pi_1(S^1)$  изоморфна группе  $\mathbb{Z}$  целых чисел.*

*Доказательство.* Доказательство использует построение «универсального накрытия» над окружностью; этот метод будет развит и обобщён в разделе 7.

Рассмотрим отображение  $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ . Рассматривая прообразы, мы можем отождествлять точки окружности с вещественными числами, определёнными с точностью до слагаемых вида  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . В качестве отмеченной точкой окружности мы возьмём точку  $(1, 0)$ , соответствующую  $t = 0$ .

Таким образом, петлю  $\varphi: I \rightarrow S^1$  можно считать многозначной функцией на отрезке  $I$ , значение которой в каждой точке определено с точностью до слагаемого  $2\pi k$  и значением которой в точках 0 и 1 служит само множество чисел вида  $2\pi k$ . У этой многозначной функции существует непрерывная однозначная ветвь — непрерывная функция на отрезке  $I$ , значение которой в каждой точке принадлежит множеству значений многозначной функции  $\varphi$  в этой точке. Такая однозначная функция  $\tilde{\varphi}: I \rightarrow \mathbb{R}$  будет определена единственным образом, если наложить условие  $\tilde{\varphi}(0) = 0$ .

Для построения функции  $\tilde{\varphi}: I \rightarrow \mathbb{R}$  мы выберем такое  $n$ , что при  $|t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n}$  точки  $\varphi(t_1)$  и  $\varphi(t_2)$  не диаметрально противоположны (нужно рассмотреть открытое покрытие отрезка  $I$ , состоящее из всевозможных множеств вида  $\varphi^{-1}(A)$ , где  $A$  — открытая полуокружность, и выделить конечное подпокрытие). Положив  $\tilde{\varphi}(0) = 0$ , при  $0 \leq t \leq \frac{1}{n}$  мы берём в качестве  $\tilde{\varphi}(t)$  то из значений функции  $\varphi$  в точке  $t$ , которое отличается от 0 меньше, чем на  $\pi$ . Далее, при  $\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{2}{n}$  мы берём в качестве  $\tilde{\varphi}(t)$  то из значений функции  $\varphi$  в точке  $t$ , которое отличается от  $\tilde{\varphi}(\frac{1}{n})$  меньше, чем на  $\pi$ . И так далее.

По построению,  $f(\tilde{\varphi}(t)) = \varphi(t)$ ; в частности,  $\tilde{\varphi}(1) = 2\pi k$  для некоторого  $k \in \mathbb{Z}$ . Кроме того, всякая непрерывная функция  $\chi: I \rightarrow \mathbb{R}$ , такая, что  $\chi(0) = 0$  и  $\chi(1) = 2\pi k$ , имеет вид  $\tilde{\varphi}$  для некоторой петли  $\varphi$ , а именно, для петли  $\varphi(t) = f(\chi(t))$ .

Теперь построим отображение  $g: \pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ , положив  $g([\varphi]) = \tilde{\varphi}(1)/2\pi$ . Чтобы убедиться, что  $g$  — изоморфизм групп, заметим следующее. Во-первых, число  $\tilde{\varphi}(1)/2\pi$  не меняется при гомотопии, поскольку область возможных значений  $\tilde{\varphi}(1)$  дискретна. Таким образом, число  $\tilde{\varphi}(1)/2\pi$  зависит только от гомотопического класса  $[\varphi]$  и отображение  $g$  определено корректно. Во-вторых, отображение  $g$  сюръективно, т.е. любое число  $k \in \mathbb{Z}$  лежит в его образе. Действительно, достаточно взять  $\varphi = \psi_k$ , где  $\psi_k(t) = 2\pi kt$ . В-третьих, если  $\tilde{\varphi}_1(1) = \tilde{\varphi}_2(1)$ , то  $\varphi_1 \sim \varphi_2$ , а потому потому  $g$  инъектививно. Действительно, функции  $\tilde{\varphi}_1(t)$  и  $\tilde{\varphi}_2(t)$  гомотопны в классе функций с заданными значениями в 0 и 1 (если  $\tilde{\varphi}(1) = 2\pi k$ , то  $\tilde{\varphi} \sim \psi_k$ ; гомотопия задаётся формулой  $\tilde{\varphi}_s(t) = (1-s)\tilde{\varphi}(t) + s2\pi kt$ ). Наконец, в-четвёртых,  $g$  является гомоморфизмом, так как  $g([\varphi]) = g([\psi_k])$  для некоторого  $k$ , а  $\psi_k \psi_l \sim \psi_{k+l}$ , так как  $\widetilde{\psi_k \psi_l}(1) = \widetilde{\psi}_{k+l}(1)$ .  $\square$

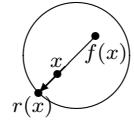
**Предложение 5.8.** Окружность  $S^1 \subset D^2$  не является ретрактом диска  $D^2$ .

*Доказательство.* Допустим, существует ретракция  $r: D^2 \rightarrow S^1$ , т.е. композиция  $S^1 \xrightarrow{i} D^2 \xrightarrow{r} S^1$  есть тождественное отображение. Тогда, согласно предложению 5.2, композиция  $\pi_1(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2) \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1)$  есть тождественный изоморфизм. Но это невозможно, так как  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ , а  $\pi_1(D^2) = \{1\}$ .  $\square$

В качестве следствия мы получаем классический результат, доказательство которого было одним из первых триумфов алгебраической топологии.

**Теорема 5.9** (Брауэр). Любое непрерывное отображение  $f: D^2 \rightarrow D^2$  имеет неподвижную точку, т.е. точку  $x$ , для которой  $f(x) = x$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $f(x) \neq x$  для всех  $x \in D^2$ . Тогда можно определить отображение  $r: D^2 \rightarrow S^1$ , взяв в качестве  $r(x)$  точку окружности  $S^1$ , в которой луч, идущий из точки  $f(x)$  в точку  $x$ , пересекает диск  $D^2$ . При этом, очевидно,  $r(x) = x$ , если  $x \in S^1$ , т. е.  $r$  — ретракция. Это противоречит предложению 5.8.  $\square$



Фундаментальная группа окружности используется в следующем топологическом доказательстве «основной теоремы алгебры».

**Теорема 5.10.** Любой непостоянный многочлен  $p(z)$  с коэффициентами в  $\mathbb{C}$  имеет комплексный корень.

*Доказательство.* Можно считать, что  $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ . Предположим, что  $p(z)$  не имеет корней в  $\mathbb{C}$ . Тогда для каждого вещественного  $r \geq 0$  можно определить следующую петлю с началом в точке 1 на единичной окружности  $S^1 \subset \mathbb{C}$ :

$$(3) \quad \varphi_r: I \rightarrow S^1, \quad \varphi_r(s) = \frac{p(re^{2\pi is})/p(r)}{|p(re^{2\pi is})/p(r)|}.$$

При изменении  $r$  получаем гомотопию петель с началом и концом в точке 1. Петля  $\varphi_0$  тривиальна, поэтому  $[\varphi_r] = [\varphi_0] = 0$  в  $\pi_1(S^1)$  для всех  $r$ .

Теперь выберем  $r > \max\{|a_{n-1}| + \dots + |a_0|, 1\}$ . Тогда при  $|z| = r$  получаем

$$|z^n| = r^n = r \cdot r^{n-1} > (|a_{n-1}| + \dots + |a_0|)|z^{n-1}| > |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0|.$$

Отсюда следует, что при  $0 \leq t \leq 1$  многочлен  $p_t(z) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)$  не имеет корней на окружности  $|z| = r$ . Заменив  $r$  на  $p_t$  в формуле (3), мы получим функцию  $\varphi_r(s, t)$ . При изменении  $t$  от 1 до 0 эта функция задаёт гомотопию петли  $\varphi_r(s) = \varphi_r(s, 1)$  в петлю  $\varphi_r(s, 0) = \psi_n(s) = e^{2\pi ins}$ , которая представляет собой  $n$ -ю степень образующей группы  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ . Так как  $[\psi_n] = [\varphi_r] = 0$ , мы получаем  $n = 0$ . Таким образом, единственныые многочлены без корней в  $\mathbb{C}$  — это константы.  $\square$

### Задачи и упражнения.

**5.11.** Докажите, что если отображения  $f, f': X \rightarrow Y$  гомотопны посредством гомотопии  $F: X \times I \rightarrow Y$ , то индуцированные гомоморфизмы  $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$  и  $f'_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f'(x_0))$  удовлетворяют соотношению  $f'_* = b_\alpha f_*$ , где  $\alpha(t) = F(x_0, t)$  — путь из  $f(x_0)$  в  $f'(x_0)$ .

**5.12.** Если  $X$  и  $Y$  линейно связны, то  $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ .

**5.13.** Докажите, что если  $X \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклое множество, то  $\pi_1(X) = \{1\}$ .

**5.14.** Докажите, что если  $X$  — дискретное пространство, то  $\pi_1(X) = \{1\}$ .

**5.15.** Докажите, что пространство  $\mathbb{R}^2$  не гомеоморфно  $\mathbb{R}^n$  при  $n \neq 2$ .



**5.16.** Докажите, любое непрерывное отображение пространства (три отрезка с отождествлённым началом) в себя имеет неподвижную точку.

**5.17.** Топологической группой называется пространство  $G$  с заданной на нём структурой группы, для которой отображения умножения  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(g, h) \mapsto gh$ , и взятия обратного  $G \rightarrow G$ ,  $g \mapsto g^{-1}$ , являются непрерывными. Докажите, что фундаментальная группа  $\pi_1(G)$  топологической группы абелева.

## 6. ТЕОРЕМА ВАН КАМПЕНА

Теорема ван Кампена позволяет вычислять фундаментальную группу пространства, представленного в виде объединения своих подмножеств, по фундаментальным группам этих подмножеств.

Нам понадобится ряд алгебраических понятий.

**6.1. Свободное произведение групп.** Пусть дан конечный или бесконечный набор групп  $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ . *Свободное произведение*  $*_\alpha G_\alpha$  (если групп конечное число, то используется обозначение  $G_1 * G_2 * \dots * G_k$ ) состоит из всех конечных слов  $g_1 g_2 \dots g_m$  произвольной длины  $m \geq 0$ , где  $g_i \in G_{\alpha_i}$ ,  $g_i \neq e$ , причём соседние буквы  $g_i$  и  $g_{i+1}$  лежат в разных группах, т. е.  $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ . Слова, удовлетворяющие этим условиям, называются *приведёнными*; неприведённое слово всегда можно преобразовать в приведённое, заменив соседние буквы, которые лежат в одной и той же группе  $G_{\alpha_i}$ , на их произведение в  $G_{\alpha_i}$  и удалив тривиальные буквы. Слову разрешается быть пустым; пустое слово будет единицей в группе  $*_\alpha G_\alpha$ . Умножение в группе  $*_\alpha G_\alpha$  — это представление, т. е. запись одного слова за другим:  $(g_1 \dots g_m)(h_1 \dots h_n) = g_1 \dots g_m h_1 \dots h_n$ , с последующим преобразованием в приведённое слово. Например, в произведении  $(g_1 \dots g_m)(g_m^{-1} \dots g_1^{-1})$  всё сокращается, и мы получаем единицу группы  $*_\alpha G_\alpha$ , т. е. пустое слово. Это даёт существование обратного элемента для любого слова. Нетривиальной является проверка ассоциативности умножения в  $*_\alpha G_\alpha$ .

**Лемма 6.1.** *Определённая выше операция умножения приведённых слов (приставление с последующим приведением) ассоциативна.*

*Доказательство.* Пусть  $W$  — множество приведённых слов  $g_1 \dots g_m$ , включая пустое слово. Каждому элементу  $g \in G_\alpha$  сопоставим отображение  $L_g: W \rightarrow W$ , задаваемое умножением слева,  $L_g(g_1 \dots g_m) = gg_1 \dots g_m$ , с последующим приведением. При этом мы имеем  $L_{gg'} = L_g L_{g'}$  для любых  $g, g' \in G_\alpha$ , т. е.  $g(g'(g_1 \dots g_m)) = (gg')(g_1 \dots g_m)$ ; это следует из ассоциативности умножения в  $G_\alpha$ . Из формулы  $L_{gg'} = L_g L_{g'}$  вытекает, что отображение  $L_g$  обратимо, с обратным отображением  $L_{g^{-1}}$ . Поэтому сопоставление  $g \mapsto L_g$  задаёт гомоморфизм группы  $G_\alpha$  в группу  $P(W)$  всех перестановок множества  $W$ . Теперь определим отображение  $L: W \rightarrow P(W)$  формулой  $L(g_1 \dots g_m) = L_{g_1} \dots L_{g_m}$ . Отображение  $L$  инъективно, так как перестановка  $L(g_1 \dots g_m)$  отображает пустое слово в  $g_1 \dots g_m$  и поэтому не является тождественной, если само слово  $g_1 \dots g_m$  не является пустым. Операция умножения в  $W$  при отображении  $L$  переходит в композицию в  $P(W)$ , так как  $L_{gg'} = L_g L_{g'}$ . Так как композиция перестановок ассоциативна, мы получаем, что умножение в  $W$  ассоциативно.  $\square$

Каждая группа  $G_\alpha$  отождествляется с подгруппой свободного произведения  $*_\alpha G_\alpha$ , состоящей из пустого слова и однобуквенных слов  $g \in G_\alpha$ .

Любой набор гомоморфизмов  $\varphi_\alpha: G_\alpha \rightarrow H$  единственным образом продолжается до гомоморфизма  $\varphi: *_\alpha G_\alpha \rightarrow H$ . А именно, значение гомоморфизма  $\varphi$  на слове  $g_1 \dots g_m$ , где  $g_i \in G_{\alpha_i}$ , полагается равным  $\varphi_{\alpha_1}(g_1) \dots \varphi_{\alpha_m}(g_m)$ . Таким образом, свободное произведение является *контрольным* в категории групп.

Например, включения  $G \hookrightarrow G \times H$  и  $H \hookrightarrow G \times H$  индуцируют эпиморфизм  $G * H \rightarrow G \times H$ .

**Пример 6.2.** Если каждая из групп  $G_\alpha$  есть бесконечная циклическая группа  $\mathbb{Z}$  (группа целых чисел), то свободное произведение  $*_\alpha G_\alpha$  называется *свободной группой*. Элементами свободной группы являются слова вида  $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m}$ , где  $a_i \in G_{\alpha_i} \cong \mathbb{Z}$  — образующая,  $n_i \neq 0$  — целые числа и  $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$  для любого  $i$ . Набор  $\{a_\alpha : \alpha \in A\}$ , в который входит по одной образующей  $a_\alpha$  каждой из групп  $G_\alpha = \mathbb{Z}$ , называется *базисом* свободной группы, а мощность  $|A|$  базиса называется *рангом* свободной группы. При этом базис свободной группы определён неоднозначно, и тот факт, что все базисы имеют одинаковую мощность, нуждается в доказательстве, которое мы здесь не приводим. Свободная группа конечного ранга  $k$  будет обозначаться  $F_k$  или  $F(a_1, \dots, a_k)$ , если необходимо явно указать образующие. Заметим, что  $F_1 \cong \mathbb{Z}$ , а группа  $F_2$  неабелева.

Всякую группу  $G$  можно получить как факторгруппу свободной группы. Для этого надо выбрать набор образующих группы  $G$ , т. е. такой набор элементов  $g_i, i \in I$ , что любой другой элемент  $g \in G$  представляется в виде произведения элементов  $g_i$  и  $g_i^{-1}$  (например, в качестве набора образующих можно взять все элементы группы  $G$ ). Тогда мы имеем эпиморфизм  $f: F \rightarrow G$  из свободной группы  $F$  с базисом  $a_i, i \in I$ , в группу  $G$ , переводящий  $i$ -ю образующую  $a_i$  группы  $F$  в  $g_i$ . Ядро гомоморфизма является нормальной подгруппой  $R \subset F$ ; мы имеем  $G \cong F/R$ . Далее в теореме 7.16 мы покажем, что любая подгруппа свободной группы является свободной. Элементы группы  $R$  называются *соотношениями* между образующими  $g_i$ . При гомоморфизме  $f$  элемент  $r \in R$  переходит в произведение элементов  $g_i, g_i^{-1}$ , которое равно 1 в группе  $G$ . Погруппа  $R \subset F$  является нормальной, как ядро гомоморфизма, т. е. вместе с каждым элементом  $r \in R$  содержит все его сопряжённые  $ara^{-1}, a \in F$ .

Пусть задан набор  $r_j, j \in J$ , где каждое  $r_j$  является конечным произведением элементов  $g_i, g_i^{-1}, i \in I$ . Говорят, что группа  $G$  задана *образующими*  $g_i$  и *соотношениями*  $r_j$ , если она представлена в виде факторгруппы свободной группы с образующими  $g_i$  по её минимальной нормальной подгруппе, содержащей все элементы  $r_j$ . Используется запись:

$$G = \langle g_i, i \in I \mid r_j, j \in J \rangle.$$

Если  $G$  произвольная группа и  $r_j, j \in J$ , — набор её элементов, то *факторгруппой группы  $G$  по соотношениям  $r_j = 1$*  называется факторгруппа группы  $G$  по минимальной нормальной подгруппе, содержащей элементы  $r_j, j \in J$ .

*Абеленизацией* группы  $G$  называется факторгруппа группы  $G$  по всем соотношениям  $ghg^{-1}h^{-1} = 1, g, h \in G$ , т. е. факторгруппа по нормальной подгруппе, порождённой всеми коммутаторами  $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}, g, h \in G$ . Эта подгруппа называется *коммутантом* группы  $G$  и обозначается  $[G, G]$  или  $G'$ . Абеленизация свободной группы  $F = *_\alpha \mathbb{Z}$  — это свободная абелева группа  $\oplus_\alpha \mathbb{Z}$ , базисом которой служит то же самое множество образующих.

**6.2. Формулировка и доказательство теоремы.** Пусть пространство  $X$  представлено в виде объединения линейно связных открытых подмножеств  $A_\alpha$ , каждое из которых содержит отмеченную точку  $x_0 \in X$ . Гомоморфизмы  $i_\alpha: \pi_1(A_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$ , индуцированные включениями, продолжаются до гомоморфизма

$$\Phi: *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \rightarrow \pi_1(X).$$

Если

$$i_{\alpha\beta}: \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \rightarrow \pi_1(A_\alpha)$$

— гомоморфизм, индуцированный включением  $A_\alpha \cap A_\beta \rightarrow A_\alpha$ , то  $i_\alpha i_{\alpha\beta} = i_\beta i_{\beta\alpha}$ , так как обе эти композиции индуцированы включением  $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow X$ . Таким образом, ядро гомоморфизма  $\Phi$  содержит элементы вида  $i_{\alpha\beta}(\omega)i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$ , где  $\omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$ .

**Теорема 6.3** (ван Кампен). *Пусть  $X$  — объединение линейно связных открытых множеств  $A_\alpha$ , каждое из которых содержит отмеченную точку  $x_0 \in X$ .*

- a) *Если каждое пересечение  $A_\alpha \cap A_\beta$  линейно связно, то  $\Phi: *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$  является эпиморфизмом.*
- b) *Если, кроме того, каждое пересечение  $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$  линейно связно, то ядро гомоморфизма  $\Phi$  — это нормальная подгруппа  $N$ , порождённая всеми элементами вида  $i_{\alpha\beta}(\omega)i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$ , а потому  $\Phi$  индуцирует изоморфизм*

$$\pi_1(X) \cong *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N.$$

*Доказательство.* Докажем утверждение а), т. е. сюръективность отображения  $\Phi$ . Мы утверждаем, что для данной петли  $f: I \rightarrow X$  в отмеченной точке  $x_0$  существует такое разбиение  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$  отрезка  $I$ , что образ каждого отрезка  $[s_{i-1}, s_i]$  при отображении  $f$  целиком содержится в одном из множеств  $A_\alpha$ . Действительно, так как  $f$  непрерывно, каждая точка  $s \in I$  имеет окрестность  $U(s) \subset I$ , для которой  $f(U(s))$  лежит в одном из множеств  $A_\alpha$ . Из компактности отрезка следует, что конечное число таких интервалов покрывает  $I$ . Тогда концы этих интервалов задают требуемое разбиение отрезка  $I$ .

Пусть  $f([s_{i-1}, s_i]) \subset A_i$  и обозначим  $f_i = f|_{[s_{i-1}, s_i]}$ . Тогда  $f = f_1 \cdot \dots \cdot f_m$ , где  $f_i \subset A_i$ . Так как каждое пространство  $A_i \cap A_{i+1}$  линейно связно, мы можем соединить  $x_0$  с  $f(s_i) \in A_i \cap A_{i+1}$  путём  $g_i$  в  $A_i \cap A_{i+1}$ . Теперь рассмотрим петлю

$$(f_1 \cdot \bar{g}_1) \cdot (g_1 \cdot f_2 \cdot \bar{g}_2) \cdot (g_2 \cdot f_3 \cdot \bar{g}_3) \cdot \dots \cdot (g_{m-1} \cdot f_m),$$

гомотопную  $f$ . Эта петля является композицией петель, каждая из которых расположена в одном из множеств  $A_\alpha$ ; такие петли заключены в скобки. Следовательно,  $[f]$  лежит в образе отображения  $\Phi$ , а потому  $\Phi$  сюръективно.

Теперь докажем утверждение б), т. е., что при описанном там условии ядро гомоморфизма  $\Phi$  совпадает с  $N$ . Мы будем рассматривать *факторизации* элементов  $[f] \in \pi_1(X)$ , т. е. формальные разложения вида  $[f] = [f_1] \dots [f_k]$ , где

- каждый множитель  $f_i$  — это петля с началом и концом в  $x_0$ , целиком содержащаяся в одном из множеств  $A_\alpha$ , с гомотопическим классом  $[f_i] \in \pi_1(A_\alpha)$ ;
- петля  $f$  гомотопна  $f_1 \cdot \dots \cdot f_k$  в  $X$ .

Таким образом, факторизация гомотопического класса  $[f]$  — это слово в  $*_\alpha \pi_1(A_\alpha)$ , возможно, приводимое, которое переходит в  $[f]$  при отображении  $\Phi$ . Утверждение а) показывает, что у каждого элемента  $[f] \in \pi_1(X)$  есть факторизация.

Назовём две факторизации класса  $[f]$  *эквивалентными*, если они связаны последовательностью преобразований следующих двух видов или обратных к ним:

- 1) соседние члены  $[f_i][f_{i+1}]$  объединяются в один член  $[f_i \cdot f_{i+1}]$ , если  $[f_i]$  и  $[f_{i+1}]$  лежат в одной группе  $\pi_1(A_\alpha)$ ;
- 2) член  $[f_i] \in \pi_1(A_\alpha)$  рассматривается как лежащий в группе  $\pi_1(A_\beta)$ , а не в  $\pi_1(A_\alpha)$ , если  $f_i$  — петля в  $A_\alpha \cap A_\beta$ .

Первое преобразование не изменяет элемент группы  $*_\alpha \pi_1(A_\alpha)$ , задаваемый факторизацией. Второе преобразование не изменяет образ этого элемента в факторгруппе

$Q = *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N$  согласно определению подгруппы  $N$ . Таким образом, эквивалентные факторизации дают один и тот же элемент группы  $Q$ .

Мы покажем, что любые две факторизации класса  $[f]$  эквивалентны. Отсюда будет следовать, что отображение  $Q \rightarrow \pi_1(X)$ , индуцированное отображением  $\Phi$ , инъективно. Тем самым утверждение б) будет доказано.

Пусть  $[f_1] \dots [f_k]$  и  $[f'_1] \dots [f'_{\ell}]$  — две факторизации класса  $[f]$ . Пусть  $F: I \times I \rightarrow X$  — гомотопия, связывающая  $f_1 \cdot \dots \cdot f_k$  с  $f'_1 \cdot \dots \cdot f'_{\ell}$ . Существуют такие разбиения  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$  и  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ , что образ каждого из прямоугольников  $R_{ij} = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$  при отображении  $F$  лежит в одном множестве  $A_\alpha$ , которое мы обозначим  $A_{ij}$ . Эти разбиения можно получить, покрыв  $I \times I$  конечным числом прямоугольников  $[a, b] \times [c, d]$ , каждый из которых отображается в одно множество  $A_\alpha$ , используя рассуждения с компактностью, а затем разделив  $I \times I$  всеми горизонтальными и вертикальными прямыми, содержащими стороны этих прямоугольников. Можно считать, что  $s$ -разбиение является подразбиением тех разбиений, которые дают произведения  $f_1 \cdot \dots \cdot f_k$  и  $f'_1 \cdot \dots \cdot f'_{\ell}$ . Так как  $F$  отображает окрестность прямоугольника  $R_{ij}$  в  $A_{ij}$ , мы можем пошевелить вертикальные стороны прямоугольников  $R_{ij}$  так, чтобы каждая точка квадрата  $I \times I$  принадлежала не более чем трём прямоугольникам  $R_{ij}$ . Можно считать, что есть по крайней мере три ряда прямоугольников, поэтому мы можем шевелить только прямоугольники в промежуточных рядах, оставляя верхний и нижний ряд без изменений. Занумеруем теперь прямоугольники  $R_1, R_2, \dots, R_{mn}$  как показано на рисунке.

|   |    |    |    |
|---|----|----|----|
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 5 | 6  | 7  | 8  |
| 1 | 2  | 3  | 4  |

Если  $\gamma$  — путь в  $I \times I$ , идущий из точки левой стороны в точку правой стороны, то  $F|_\gamma$  является петлёй с началом и концом в отмеченной точке  $x_0$ , так как  $F$  отображает левую и правую стороны квадрата  $I \times I$  в  $x_0$ . Пусть  $\gamma_r$  — путь, отделяющий первые  $r$  прямоугольников  $R_1, \dots, R_r$  от остальных прямоугольников. Тогда  $\gamma_0$  — нижняя сторона квадрата  $I \times I$ , а  $\gamma_{mn}$  — его верхняя сторона. Будем переходить от  $\gamma_r$  к  $\gamma_{r+1}$ , протаскивая этот путь по прямоугольнику  $R_{r+1}$ .

Будем называть вершины прямоугольников  $R_r$  *вершинами*. Для каждой вершины  $v$ , для которой  $F(v) \neq x_0$ , рассмотрим путь  $g_v$  из  $x_0$  в  $F(v)$ . Мы можем выбрать путь  $g_v$  так, чтобы он принадлежал пересечению двух или трёх множеств  $A_{ij}$  в соответствии с тем, сколько прямоугольников  $R_r$  содержат вершину  $v$ , так как мы предполагаем, что двойные и тройные пересечения множеств  $A_{ij}$  линейно связаны. Вставим в  $F|_{\gamma_r}$  пути вида  $\bar{g}_v g_v$  в последовательных вершинах  $v$ , как при доказательстве сюръективности отображения  $\Phi$ . В результате мы получим факторизацию класса  $[F|_{\gamma_r}]$ . Петли в этой факторизации соответствуют вертикальным и горизонтальным отрезкам между соседними вершинами, через которых проходит путь  $\gamma_r$ . Петлю, соответствующую отрезку между соседними вершинами, можно рассматривать, как лежащую в  $A_{ij}$  для любого из прямоугольников  $R_s$ , содержащих этот отрезок. Если мы выберем другой из этих прямоугольников  $R_s$ , то факторизация класса  $[F|_{\gamma_r}]$  заменится на эквивалентную факторизацию. При протаскивании пути по прямоугольнику  $R_{r+1}$  факторизация  $F|_{\gamma_r}$  заменяется на  $F|_{\gamma_{r+1}}$  посредством гомотопии в пределах множества  $A_{ij}$ , соответствующего  $R_{r+1}$ . Это множество  $A_{ij}$  можно выбрать одним и тем же для всех отрезков путей  $\gamma_r$  и  $\gamma_{r+1}$ , лежащих в  $R_{r+1}$ . Таким образом, факторизаций, соответствующие последовательным путям  $\gamma_r$  и  $\gamma_{r+1}$ , эквивалентны.

Мы можем добиться, чтобы факторизация, соответствующая  $\gamma_0$ , была эквивалентна факторизации  $[f_1] \dots [f_k]$ , выбирая путь  $g_v$  для каждой вершины  $v$  вдоль нижней стороны квадрата  $I \times I$  так, чтобы он принадлежал не только двум множествам  $A_{ij}$ , соответствующим прямоугольнику  $R_s$ , содержащему  $v$ , но также принадлежал и множеству  $A_\alpha$ , соответствующему пути  $f_i$ , в области определения которого лежит точка  $v$ . В случае, когда  $v$  — общий конец областей определения двух последовательных путей  $f_i$ , выполняется равенство  $F(v) = x_0$ , т. е. путь  $g_v$  выбирать не нужно. Аналогично мы можем считать, что факторизация, соответствующая последнему пути  $\gamma_{mn}$ , эквивалентна  $[f'_1] \dots [f'_{\ell}]$ . Так как факторизации, соответствующие всем путям  $\gamma_r$ , эквивалентны, мы получаем, что факторизации  $[f_1] \dots [f_k]$  и  $[f'_1] \dots [f'_{\ell}]$  эквивалентны.  $\square$

Сформулируем отдельно частный случай теоремы ван Кампена, когда покрытие пространства  $X$  состоит всего из двух множеств,  $X = A \cup B$ . В этом случае условие пункта б) теоремы выполнено автоматически. Кроме того, не нужно требовать, чтобы каждое из множеств  $A$  и  $B$  содержало отмеченную точку, так как можно выбрать новую отмеченную точку в пересечении  $A \cap B$ :

**Следствие 6.4.** *Пусть  $X = A \cup B$ , где множества  $A$  и  $B$ , а также их пересечение  $A \cap B$ , открыты и линейно связны. Тогда*

$$\pi_1(X) \cong (\pi_1(A) * \pi_1(B))/N,$$

где  $N$  — нормальная подгруппа, порождённая элементами вида  $i_{AB}(\omega)i_{BA}(\omega)^{-1}$ ,  $\omega \in \pi_1(A \cap B)$ , а  $i_{AB}: \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(A)$  и  $i_{BA}: \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(B)$  — гомоморфизмы, индуцированные включениями  $A \cap B \hookrightarrow A$  и  $A \cap B \hookrightarrow B$ .

Группа  $(\pi_1(A) * \pi_1(B))/N$  называется *амальгамированным произведением* групп  $\pi_1(A)$  и  $\pi_1(B)$  над  $\pi_1(A \cap B)$ , см. упражнение 6.13.

*Замечание.* В случае, когда покрытие пространства  $X$  состоит из более двух множеств  $A_\alpha$ , условие того, что каждое  $A_\alpha$  содержит отмеченную точку  $x_0$ , существенно. Это условие влечёт, что все тройные пересечения непусты.

В качестве ещё одного следствия мы получаем описание фундаментальной группы букета  $\bigvee_\alpha X_\alpha$  пространств  $X_\alpha$  с отмеченными точками  $x_\alpha$ :

**Следствие 6.5.** *Если каждая точка  $x_\alpha \in X_\alpha$  является деформационным ретрактом своей окрестности  $U_\alpha \subset X_\alpha$ , то имеет место изоморфизм*

$$\pi_1\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \cong *_\alpha \pi_1(X_\alpha).$$

В частности, для букета окружностей  $\bigvee_\alpha S^1$  группа  $\pi_1(\bigvee_\alpha S^1)$  свободная.

*Доказательство.* Каждое пространство  $X_\alpha$  является деформационным ретрактом своей окрестности  $A_\alpha = X_\alpha \vee \bigvee_{\beta \neq \alpha} U_\beta \subset \bigvee_\alpha X_\alpha$ . Пересечение двух и более различных множеств  $A_\alpha$  — это пространство  $\bigvee_\alpha U_\alpha$ , которое стягиваемо. Тогда из теоремы ван Кампена следует, что  $\Phi: *_\alpha \pi_1(X_\alpha) \rightarrow \pi_1(\bigvee_\alpha X_\alpha)$  — изоморфизм.  $\square$

**6.3. Фундаментальная группа клеточного пространства.** Здесь мы научимся задавать фундаментальные группы клеточных пространств образующими и соотношениями. Это позволит нам явно вычислять фундаментальную группу, задав клеточную структуру.

Вначале выведем ещё одно важное следствие теоремы о клеточной аппроксимации:

**Предложение 6.6.** *Всякое линейно связное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с единственной 0-мерной клеткой.*

*Доказательство.* Выберем в  $X$  нульмерную клетку  $e_0$  и соединим её путями с остальными нульмерными клетками (пути могут пересекаться). Используя теорему о клеточной аппроксимации, мы можем добиться того, чтобы эти пути лежали в одномерном осте  $X^1$ . Пусть  $\gamma_i$  — путь, соединяющий нульмерную клетку  $e_0$  с нульмерной клеткой  $e_i$ . Для каждого  $i$  приклеим к  $X$  двумерный диск по отображению нижней полуокружности в  $X$  при помощи пути  $\gamma_i$ . Получим новое клеточное пространство  $\tilde{X}$ , которое содержит  $X$  и, кроме того, клетки  $e_i^1, e_i^2$  (верхние полуокружности и внутренности приклеенных дисков).

Ясно, что  $X$  есть деформационный ретракт в  $\tilde{X}$ : каждый приклеенный диск можно стянуть на нижнюю полуокружность. Обозначим через  $Y$  объединение замыкаций клеток  $e_i^1$  (верхних полуокружностей). Очевидно,  $Y$  стягивается. Следовательно,  $\tilde{X}/Y \simeq \tilde{X} \simeq X$ . Но у  $\tilde{X}/Y$  всего одна нульмерная клетка.  $\square$

Пусть  $X$  — линейно связное пространство с отмеченной точкой  $x_0$ . Отображение  $\varphi: S^1 \rightarrow X$ , переводящее отмеченную точку 0 окружности в  $x_0$ , можно рассматривать как петлю в  $(X, x_0)$ , и поэтому оно задаёт элемент  $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$ . Если же отображение  $\varphi: S^1 \rightarrow X$  переводит 0 в какую-то другую точку  $\varphi(0)$ , то мы получаем элемент группы  $\pi_1(X, \varphi(0))$ , которая связана с  $\pi_1(X, x_0)$  неканоническим изоморфизмом (см. обсуждение после теоремы 5.3). Таким образом, произвольное отображение  $\varphi: S^1 \rightarrow X$  задаёт элемент группы  $\pi_1(X, x_0)$ , заданный с точностью до сопряжения.

Пусть  $X$  — клеточное пространство с единственной 0-мерной клеткой  $e^0 = x_0$ , одномерными клетками  $e_i^1, i \in I$ , и двумерными клетками  $e_j^2, j \in J$ . Характеристические отображения  $D^2 \rightarrow X$  двумерных клеток определяют отображения приклеивания  $f_j: S^1 \rightarrow X^1$  (см. раздел 4), которые задают элементы  $\beta_j \in \pi_1(X^1)$  с точностью до сопряжения. При этом  $X^1$  — это букет окружностей  $\bar{e}_i^1$  и группа  $\pi_1(X^1, x_0)$  есть свободная группа с множеством образующих  $I$  в силу следствия 6.5.

**Теорема 6.7.** *Пусть  $(X, x_0)$  — линейно связное клеточное пространство с единственной нульмерной клеткой в отмеченной точке  $x_0$ . Группа  $\pi_1(X, x_0)$  изоморфна факторгруппе свободной группы  $\pi_1(X^1, x_0)$  с образующими, отвечающими 1-мерным клеткам, по соотношениям  $\beta_j = 1, j \in J$ , отвечающим 2-мерным клеткам.*

*Доказательство.* Проведём доказательство по индукции по приклеиваемым клеткам размерности  $n \geq 2$ . Если таких клеток нет, то пространство  $X = X^1$  — букет сфер и  $\pi_1(X)$  — свободная группа с образующими, отвечающими 1-мерным клеткам.

Пусть  $X' = X \cup_f D^n$  получено из  $X$  приклеиванием  $n$ -мерной клетки  $e^n$  при помощи отображения  $f: S^{n-1} \rightarrow X$ , т. е. мы имеем кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & X' \end{array}$$

Внутри клетки  $e^n$  выберем точку  $y$ . Пусть  $A = X' \setminus \{y\}$  и  $B = X' \setminus X$ . Тогда  $A$  деформационно ретрагируется на  $X$ , а  $B$  стягивается. Теперь применим теорему ван Кампена к покрытию  $X' = A \cup B$ . Так как  $\pi_1(A) = \pi_1(X)$ , а  $\pi_1(B) = \{1\}$ , мы получаем, что  $\pi_1(X')$  изоморфно факторгруппе группы  $\pi_1(A) * \pi_1(B) = \pi_1(X)$  по нормальной подгруппе, порождённой образом отображения  $\pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(A)$ .

Далее сначала рассмотрим случай приклеивания двумерной клетки  $e^2$ , т. е.  $n = 2$ . В этом случае  $A \cap B$  деформационно ретрагируется на окружность в  $e^2 \setminus \{y\}$ , и мы получаем, что образ группы  $\pi_1(A \cap B)$  в  $\pi_1(A)$  — это нормальная подгруппа, порождённая классом петли, задаваемой отображением  $f: S^1 \rightarrow X^1$ . Таким образом, при приклеивании новой двумерной клетки  $e^2$  к соотношениям в группе  $\pi_1(X) = \pi_1(A)$  добавляется ещё одно соотношение  $\beta = 1$ , отвечающее этой двумерной клетке.

После того как мы приклеили все двумерные клетки, дальнейшее приклеивание клеток  $e^n$  размерности  $n \geq 3$  не меняет группу  $\pi_1(X)$ . Это следует из того, что  $A \cap B$  деформационно ретрагируется на  $(n-1)$ -мерную сферу в  $e^n \setminus \{y\}$ ; таким образом,  $\pi_1(A \cap B) = \pi_1(S^{n-1}) = \{1\}$  при  $n \geq 3$  согласно предложению 5.6.  $\square$

**Пример 6.8.** Вычислим фундаментальную группу ориентируемой поверхности  $S_g$  рода  $g$  (сферы с  $g$  ручками). Она имеет клеточную структуру с одной нульмерной клеткой,  $2g$  одномерными клетками  $a_1, \dots, a_g$  и  $b_1, \dots, b_g$  и одной двумерной клеткой, см. пример 4.4.6 и рис. 1 г). Одномерный остов — это букет  $2g$  окружностей; его фундаментальная группа — свободная группа  $F_{2g}$  с образующими  $a_1, \dots, a_g$  и  $b_1, \dots, b_g$ . Двумерная клетка приклена по петле, заданной произведением коммутаторов этих образующих. Поэтому  $\pi_1(S_g)$  — факторгруппа свободной группы  $F_{2g}$  по одному соотношению, заданному произведением коммутаторов:

$$\pi_1(S_g) \cong \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdot a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle.$$

В частности, фундаментальная группа тора  $T^2 = S_1$  изоморфна факторгруппе группы  $F_2$  по соотношению  $aba^{-1}b^{-1} = 1$ , т. е.  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Это, конечно, следует из простой формулы  $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$  (см. упражнение 5.12).

**Предложение 6.9.** Поверхность  $S_g$  не гомеоморфна и даже не гомотопически эквивалентна поверхности  $S_{g'}$ , если  $g \neq g'$ .

*Доказательство.* Группа  $\pi_1(S_g)$  получается из свободной группы  $F_{2g}$  факторизацией по одному соотношению, которое представляет собой произведение коммутаторов, а значит лежит в коммутанте  $F'_{2g}$ . Поэтому абеленизация группы  $\pi_1(S_g)$  совпадает с абеленизацией свободной группы  $F_{2g}$  и представляет собой группу  $\mathbb{Z}^{2g}$  — свободную абелеву группу ранга  $2g$ . Если  $S_g \simeq S_{g'}$ , то  $\pi_1(S_g) \cong \pi_1(S_{g'})$ , а значит и абеленизации этих групп изоморфны, что влечёт равенство  $g = g'$ .  $\square$

**Пример 6.10.** Используя клеточное разбиение проективной плоскости  $\mathbb{RP}^2$  (см. пример 4.4.6 и рис. 1 б)), мы получаем, что фундаментальная группа  $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$  изоморфна

факторгруппе группы  $\mathbb{Z}$  (свободной группы с одной образующей  $a$ ) по одному соотношению  $a^2 = 1$ . Таким образом,  $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \langle a \mid a^2 \rangle = \mathbb{Z}_2$ .

Отсюда следует, что проективная плоскость не гомеоморфна ни одной из поверхностей  $S_g$ .

### Задачи и упражнения.

**6.11.** Докажите, что абеленизацией группы  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$  является  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , и опишите ядро гомоморфизма абеленизации  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

**6.12.** Покажите, что гомоморфизм  $\Phi: *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$  может быть не сюръективным, если не все пересечения  $A_\alpha \cap A_\beta$  линейно связны.

**6.13.** Пусть даны гомоморфизмы групп  $f_1: H \rightarrow G_1$  и  $f_2: H \rightarrow G_2$ . Определим *амальгамированное произведение*  $G_1 *_H G_2$  групп  $G_1$  и  $G_2$  над  $H$  как факторгруппу свободного произведения  $G_1 * G_2$  по нормальной подгруппе, порождённой всеми элементами вида  $f_1(h)f_2(h)^{-1}$ , где  $h \in H$ .

Докажите, что  $G_1 *_H G_2$  входит в кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f_1} & G_1 \\ \downarrow f_2 & & \downarrow \\ G_2 & \longrightarrow & G_1 *_H G_2, \end{array}$$

т. е. обладает соответствующим универсальным свойством, см. (2).

**6.14.** Пусть  $X = A_1 \cup A_2$ , где  $X$  — клеточное пространство,  $A_1, A_2$  — клеточные подпространства, причём пересечение  $B = A_1 \cap A_2$  связно и содержит отмеченную точку  $x_0 \in X$ , которая является нульмерной клеткой. Мы имеем кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i_1} & A_1 \\ \downarrow i_2 & & \downarrow j_1 \\ A_2 & \xrightarrow{j_2} & X, \end{array}$$

Вычисляя фундаментальные группы всех пространств в этой диаграмме и применяя универсальное свойство амальгамированного произведения (см. предыдущее упражнение), мы получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(B) & \xrightarrow{(i_1)_*} & \pi_1(A_1) & & \\ \downarrow (i_2)_* & & \downarrow & & \\ \pi_1(A_2) & \longrightarrow & \pi_1(A_1) *_{\pi_1(B)} \pi_1(A_2) & \searrow^{(j_1)_*} & \\ & \swarrow & & \searrow h & \\ & & \pi_1(X) & & \end{array}$$

Используя теорему ван Кампена, докажите, что гомоморфизм

$$h: \pi_1(A_1) *_{\pi_1(B)} \pi_1(A_2) \rightarrow \pi_1(A_1 \cup_B A_2)$$

является изоморфизмом (мы имеем  $X = A_1 \cup_B A_2$ ). Таким образом, функтор  $\pi_1$  переводит амальгамы клеточных пространств в амальгамы групп.

**6.15.** Найти фундаментальную группу дополнения окружности в  $\mathbb{R}^3$ .

**6.16.** Докажите, что дополнение двух незацепленных окружностей в  $\mathbb{R}^3$  не гомеоморфно дополнению двух зацепленных окружностей.

**6.17.** Найти фундаментальную группу дополнения трёх координатных осей в  $\mathbb{R}^3$ .

**6.18.** Линейно связное пространство  $X$  называется *односвязным*, если  $\pi_1(X) = 0$ . Докажите, что всякое односвязное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с одной 0-мерной клеткой и без 1-мерных клеток.

**6.19.** Опишите фундаментальную группу бутылки Клейна  $K$ , используя клеточное разбиение из примера 4.4.6 и рис. 1 в). Докажите, что

$$\pi_1(K) \cong \langle c_1, c_2 \mid c_1^2 c_2^2 \rangle.$$

Опишите абеленизацию группы  $\pi_1(K)$  и выведите отсюда, что бутылка Клейна не гомеоморфна проективной плоскости и не гомеоморфна ни одной из поверхностей  $S_g$ .

**6.20.** Пусть  $P_g$  — проективная плоскость с  $g$  ручками, а  $K_g$  — бутылка Клейна с  $g$  ручками (см. пример 4.4.6). Докажите, что фундаментальная группа поверхности  $P_g$  или  $K_g$  изоморфна факторгруппе свободной группы с образующими  $c_1, \dots, c_k$  по одному соотношению  $c_1^2 \cdot \dots \cdot c_k^2 = 1$ , где  $k = 2g + 1$  для  $P_g$  и  $k = 2g + 2$  для  $K_g$ . Докажите, что поверхности  $S_g$ ,  $P_g$ ,  $K_g$  попарно не гомеоморфны.

**6.21.** Вычислите фундаментальные группы пространств  $\mathbb{R}P^n$  и  $\mathbb{C}P^n$ .

**6.22.** Постройте клеточное пространство с фундаментальной группой  $\mathbb{Z}_3$  (циклическая группа из трёх элементов).

**6.23.** Докажите, что всякая группа является фундаментальной группой некоторого клеточного пространства.

## 7. НАКРЫТИЯ

**7.1. Определение и примеры.** Линейно связное пространство  $\tilde{X}$  называется *накрывающим пространством* для линейно связного пространства  $X$ , если задано отображение  $p: \tilde{X} \rightarrow X$ , такое, что у любой точки  $x \in X$  имеется окрестность  $U \subset X$ , для которой  $p^{-1}(U)$  гомеоморфно  $U \times \Gamma$ , где  $\Gamma$  — дискретное множество, причём диаграмма

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\cong} & U \times \Gamma \\ & \searrow p & \swarrow \\ & U & \end{array}$$

коммутативна. Другими словами,  $p^{-1}(U)$  является объединением непересекающихся открытых множеств в  $\tilde{X}$ , каждое из которых  $p$  гомеоморфно отображает на  $U$ . Отображение  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  называется *накрытием*.

**Пример 7.1.**

1.  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ . Это накрытие использовалось при доказательстве изоморфизма  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$  (теорема 5.7).

2.  $q_k: S^1 \rightarrow S^1$ ,  $z \mapsto z^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , где окружность  $S^1$  задана как  $\{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ .

3. Отображение  $p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ , которое переводит точку сферы в прямую в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , проходящую через эту точку и  $\mathbf{0}$  (см. пример 4.4.3).

Ясно, что если  $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X_1$  и  $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X_2$  — накрытия, то и  $p_1 \times p_2: \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \rightarrow X_1 \times X_2$  — накрытие. В частности, квадрат накрытия из примера 7.1.1 даёт накрытие  $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$  тора  $T^2 = S^1 \times S^1$  плоскостью.

**7.2. Свойство поднятия гомотопии.** Говорят, что отображение  $p: Y \rightarrow X$  обладает *свойством поднятия гомотопии* (covering homotopy property, CHP) по отношению к пространству  $Z$ , если для любого отображения  $f: Z \rightarrow Y$  и гомотопии  $F: Z \times I \rightarrow X$ , такой, что  $p \circ f = F_0$ , существует *накрывающая гомотопия*  $\tilde{F}: Z \times I \rightarrow Y$ , для которой  $\tilde{F}_0 = f$  и  $p \circ \tilde{F} = F$ . Это описывается следующей диаграммой:

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & Y \\ i_0 \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{F} & X \end{array}$$

где  $i_0$  — вложение  $z \mapsto (z, 0)$ .

Ниже мы покажем, что накрытия  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  обладают свойством поднятия гомотопии, причём накрывающая гомотопия единственна. При  $Z = pt$  свойство поднятия гомотопии (4) превращается в *свойство поднятия путей*:

**Лемма 7.2.** Для любого пути  $\gamma: I \rightarrow X$  и любой точки  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , такой, что  $p(\tilde{x}) = \gamma(0)$ , существует единственный путь  $\tilde{\gamma}: I \rightarrow \tilde{X}$ , такой, что  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$  и  $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ .

*Доказательство.* Окрестности из определения накрытия мы будем называть *элементарными*. Для каждого  $t \in I$  найдём элементарную окрестность  $U(t) \subset X$  точки  $\gamma(t)$ . В силу компактности отрезка  $I$  из этих окрестностей можно выбрать последовательность  $U_1, \dots, U_N$  таким образом, что  $U_i \supset \gamma(t_i, t_{i+1})$ , где  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{N+1} = 1$ . Прообраз  $p^{-1}(U_1)$  гомеоморфен дискретному набору таких же окрестностей. Пусть  $\tilde{U}_1$  — та из них, которая содержит точку  $\tilde{x}$ . Определим  $\tilde{\gamma}: [0, t_2] \rightarrow \tilde{U}_1$  как прообраз куска  $\gamma|_{[0, t_2]}$  пути  $\gamma$  от  $0 = t_1$  до  $t_2$ , который попадает в  $U_1$ . Затем проделаем то же самое с окрестностью  $U_2$ , точкой  $\tilde{\gamma}(t_2)$  и куском пути  $\gamma|_{[t_2, t_3]}$  и т.д. Так как число окрестностей конечно, то процесс конечен, а так как для каждой окрестности он однозначен, то путь с нужными свойствами существует только один.  $\square$

**Теорема 7.3** (о поднятии гомотопии). Накрытие  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  обладает свойством поднятия гомотопии по отношению к любому пространству  $Z$ , причём накрывающая гомотопия  $\tilde{F}: Z \times I \rightarrow \tilde{X}$  (см. (4)) единственна.

*Доказательство.* Пусть даны отображение  $f: Z \rightarrow \tilde{X}$  и гомотопия  $F: Z \times I \rightarrow X$ . Перейдя к сопряжённому, получаем отображение  $F': Z \rightarrow X^I$ , переводящее точку  $z \in Z$  в путь  $t \mapsto F(z, t)$  в пространстве  $X$ . В силу леммы 7.2, этот путь единственным образом поднимается до пути в  $\tilde{X}$ , который начинается в точке  $f(z) \in \tilde{X}$ . Таким

образом, существует единственное отображение  $\tilde{F}' : Z \rightarrow \tilde{X}^I$ , входящее в диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{p_0} & \tilde{X}^I \\ f \uparrow & \swarrow \tilde{F}' & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{F'} & X^I, \end{array}$$

где  $p_0$  — отображение, сопоставляющее пути его начальную точку. Переходя обратно от сопряжённых отображений к исходным, получим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & \tilde{X} \\ i_0 \downarrow & \swarrow \tilde{F} & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{F} & X, \end{array}$$

которая и выражает требуемое свойство поднятия гомотопии с единственной накрывающей гомотопией. Необходимо проверить непрерывность построенных отображений  $\tilde{F}'$  и  $\tilde{F}$ ; это будет следовать из более общей теоремы 7.6 о поднятии отображения, доказываемой ниже.  $\square$

### 7.3. Накрытия и фундаментальная группа.

**Теорема 7.4.** Гомоморфизм

$$p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0),$$

индуцированный накрытием  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ , является мономорфизмом. Подгруппа  $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  в  $\pi_1(X, x_0)$  состоит из гомотопических классов петель в  $X$  с началом в  $x_0$ , поднятых в  $\tilde{X}$  с началом в  $\tilde{x}_0$  являются петлями.

*Доказательство.* Надо доказать, что если петля  $\tilde{\varphi} : I \rightarrow \tilde{X}$  с началом  $\tilde{x}_0$  проектируется в петлю  $\varphi : I \rightarrow X$ , гомотопную нулю (т. е. гомотопную постоянной петле), то и сама петля  $\tilde{\varphi}$  гомотопна нулю. Фиксируем гомотопию  $\varphi_t : I \rightarrow X$ , такую, что  $\varphi_0 = \varphi$ ,  $\varphi_t(0) = \varphi_t(1) = x_0$ ,  $\varphi_1(I) = x_0$ . По теореме о поднятии гомотопии существует гомотопия  $\tilde{\varphi}_t : I \rightarrow \tilde{X}$ , такая, что  $\tilde{\varphi}_0 = \tilde{\varphi}$  и  $p \circ \tilde{\varphi}_t = \varphi_t$ . Таким образом, для любого  $t \in [0, 1]$  петля  $\varphi_t : I \rightarrow X$  поднимается до пути  $\tilde{\varphi}_t : I \rightarrow \tilde{X}$ . При изменении  $t$  начало  $\tilde{\varphi}_t(0)$  поднятого пути проходит некоторый путь в слое  $p^{-1}(x_0)$  над  $x_0$ . Но так как слой — дискретное пространство, этот путь в слое постоянен (непрерывное отображение из связного пространства  $I$  в дискретное пространство является постоянным). Поэтому  $\tilde{\varphi}_t(0) = \tilde{\varphi}(0) = \tilde{x}_0$ . Аналогично  $\tilde{\varphi}_t(1) = \tilde{\varphi}(1) = \tilde{x}_0$ . Наконец,  $\tilde{\varphi}_1(I) = \tilde{x}_0$  по тем же соображениям ( $\tilde{\varphi}_1$  есть непрерывное отображение из  $I$  в  $p^{-1}(x_0)$ ). Таким образом,  $\tilde{\varphi}_t : I \rightarrow \tilde{X}$  есть гомотопия петли  $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_0$  в постоянную петлю  $\tilde{\varphi}_1$ .

Докажем теперь второе утверждение. Петли с началом и концом в  $x_0$ , поднимающиеся до петель с началом и концом в  $\tilde{x}_0$ , очевидно, представляют элементы образа отображения  $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ . Наоборот, петля, представляющая элемент образа отображения  $p_*$ , гомотопна петле, у которой есть такое поднятие, поэтому согласно свойству поднятия гомотопии и у неё самой должно быть такое поднятие.  $\square$

Напомним, что индексом подгруппы  $H \subset G$  называется называется мощность множества смежных классов  $Hg$ ,  $g \in G$ . Если  $H$  — нормальная подгруппа, то индекс  $H$  в  $G$  — это порядок фактор-группы  $G/H$ .

**Предложение 7.5.** Число точек в прообразе  $p^{-1}(x_0)$  при накрытии  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  равно индексу подгруппы  $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  в  $\pi_1(X, x_0)$ .

*Доказательство.* Пусть  $H = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ . Для петли  $\varphi$  в  $X$  с началом и концом в  $x_0$ , пусть  $\tilde{\varphi}$  — её поднятие в  $\tilde{X}$ , начинающееся в точке  $\tilde{x}_0$ . Определим отображение  $\Phi$  из множества смежных классов  $\{H[\varphi], [\varphi] \in \pi_1(X, x_0)\}$  в  $p^{-1}(x_0)$ , переводящее  $H[\varphi]$  в  $\tilde{\varphi}(1)$ . Это отображение определено корректно, так как произведение  $\psi \cdot \varphi$ , где  $[\psi] \in H$ , имеет поднятие  $\tilde{\psi} \cdot \tilde{\varphi}$ , заканчивающееся в то же точке, что и  $\tilde{\varphi}$ , так как  $\tilde{\psi}$  — петля.

Из линейной связности пространства  $\tilde{X}$  следует, что  $\Phi$  сюръективно, так как точку  $\tilde{x}_0$  можно соединить с любой точкой в  $p^{-1}(x_0)$  путём  $\tilde{\varphi}$ , проектирующимся в петлю  $\varphi$  с началом и концом в  $x_0$ . Кроме того,  $\Phi$  инъективно: из равенства  $\Phi(H[\varphi]) = \Phi(H[\varphi'])$  следует, что  $\varphi \cdot \varphi'$  поднимается до петли в  $\tilde{X}$  с началом и концом в  $\tilde{x}_0$ , поэтому  $[\varphi][\varphi']^{-1} \in H$ , а значит,  $H[\varphi] = H[\varphi']$ . Итак,  $\Phi$  — биекция.  $\square$

**7.4. Теорема о поднятии отображений.** Выясним, как обстоит дело с поднятием произвольных отображений, а не только гомотопий.

Пространство  $X$  называется локально линейно связным, если для любой точки  $x \in X$  и любой окрестности  $U$  точки  $x$  найдётся линейно связная окрестность  $V \subset U$ .

**Теорема 7.6** (о поднятии отображения). *Пусть  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  — накрытие и  $f: (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$  — отображение из линейно связного пространства  $Z$  с отмеченной точкой  $z_0$ .*

- a) Существует не более одного отображения  $\tilde{f}: (Z, z_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ , такого, что  $p \circ \tilde{f} = f$  (поднятия).
- б) Если  $Z$  локально линейно связно, то для существования поднятия необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение

$$f_*\pi_1(Z, z_0) \subset p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

*Доказательство.* Докажем а). Пусть  $\tilde{f}$  и  $\tilde{f}'$  — два поднятия. Если  $z \in Z$  — произвольная точка и  $\gamma: I \rightarrow Z$  — путь из  $z_0$  в  $z$ , то пути  $\tilde{f}\gamma$  и  $\tilde{f}'\gamma$  накрывают путь  $f\gamma$  и имеют общее начало, вследствие чего они совпадают. Поэтому  $\tilde{f}(z) = (\tilde{f}\gamma)(1) = (\tilde{f}'\gamma)(1) = \tilde{f}'(z)$ .

Теперь докажем б). Мы можем попытаться построить отображение  $\tilde{f}$  следующим образом. Пусть  $z \in Z$ . Возьмём путь  $\gamma: I \rightarrow Z$  из  $z_0$  в  $z$  и для пути  $f\gamma: I \rightarrow X$  построим поднятие  $\tilde{f}\gamma: I \rightarrow \tilde{X}$  с началом в точке  $\tilde{x}_0$ . Затем положим  $\tilde{f}(z) = \tilde{f}\gamma(1)$ . Для того, чтобы эта конструкция была корректной, необходимо и достаточно, чтобы для любого другого пути  $\gamma': I \rightarrow Z$  из  $z_0$  в  $z$ , соответствующий путь  $\tilde{f}\gamma'$  заканчивался в той же точке, что и  $\tilde{f}\gamma$ , т.е. чтобы петля  $f \circ (\gamma\bar{\gamma}')$  накрывалась в  $\tilde{X}$  петлёй. Это равносильно условию, указанному в части б) теоремы.

Кроме того, необходимо проверить непрерывность отображения  $\tilde{f}$ . Пусть  $\tilde{U} \subset \tilde{X}$  — окрестность точки  $\tilde{f}(z)$ . Переходя, если необходимо, к меньшей окрестности, мы можем считать, что  $p: \tilde{U} \rightarrow U$  — гомеоморфизм на некоторую окрестность  $U$  точки  $f(z) \subset X$ . Выберем линейно связную окрестность  $V$  точки  $z$ , для которой  $f(V) \subset U$ . В качестве путей из  $z_0$  в разные точки  $z' \subset V$  можно взять фиксированный путь  $\gamma$  из  $z_0$  в  $z$ , который продолжается разными путями  $\eta$  в  $V$  из точки  $z$  в  $z'$ . Тогда пути  $(f\gamma) \cdot (f\eta)$  в  $X$  имеют поднятия  $(\tilde{f}\gamma) \cdot (\tilde{f}\eta)$ , где  $\tilde{f}\eta = p^{-1}(f\eta)$ .

и  $p^{-1}: U \rightarrow \tilde{U}$  — отображение, обратное к  $p: \tilde{U} \rightarrow U$ . Таким образом,  $\tilde{f}(V) \subset \tilde{U}$ , поэтому отображение  $\tilde{f}$  непрерывно в точке  $z$ .  $\square$

**7.5. Универсальное накрытие.** Так как отображение  $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  является мономорфизмом, возникает вопрос, любая ли подгруппа в  $\pi_1(X, x_0)$  реализуется в виде  $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  для некоторого накрытия  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ . Ниже мы увидим, что ответ на этот вопрос положителен. Вначале рассмотрим вопрос о реализуемости тривиальной подгруппы  $\{1\}$ . Так как  $p_*$  — мономорфизм, это сводится к вопросу о существовании односвязного накрывающего пространства для  $X$ .

Пространство  $X$  называется *полулокально односвязным*, если для любой точки  $x \in X$  и её окрестности  $V \ni x$  существует меньшая окрестность  $U \subset V$ , такая, что индуцированное включением отображение  $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  тривиально. Открытые множества  $U$  с этим свойством образуют базу топологии полулокально односвязного пространства  $X$ .

**Теорема 7.7.** *Пусть  $X$  — линейно связное, локально линейно связное и полулокально односвязное пространство. Тогда существует накрытие  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  с односвязным  $\tilde{X}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  — накрытие с односвязным  $\tilde{X}$ . Тогда любую точку  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  можно соединить путём с  $\tilde{x}_0$ , и этот путь единствен с точностью до гомотопии, сохраняющей концы путей. Поэтому  $\tilde{X}$  можно отождествить с множеством гомотопических классов путей в  $\tilde{X}$  с фиксированным началом  $\tilde{x}_0$ . С другой стороны, такие гомотопические классы — это в точности гомотопические классы путей в  $X$  с фиксированным началом  $x_0$ , в силу единственности поднятия путей. Мы приходим к следующему определению:

$$\tilde{X} = \{[\gamma]: \gamma \text{ путь в } X, \text{ выходящий из точки } x_0\},$$

где, как обычно,  $[\gamma]$  обозначает гомотопический класс пути  $\gamma$  относительно гомотопий, которые оставляют начало и конец пути неподвижными. Мы имеем отображение

$$p: \tilde{X} \rightarrow X, \quad [\gamma] \mapsto \gamma(1).$$

Так как  $X$  линейно связно, конец  $\gamma(1)$  может быть любой точкой в  $X$ , поэтому отображение  $p$  сюръективно. Ниже мы введём топологию на  $\tilde{X}$ , докажем, что  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  — накрытие, а  $\tilde{X}$  односвязно.

Рассмотрим  $\mathcal{U}$  — набор всех таких линейно связных открытых подмножеств  $U \subset X$ , что отображение  $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$  тривиально. Так как  $X$  локально линейно связно и полулокально односвязно,  $\mathcal{U}$  — база топологии на  $X$  (т.е. любое открытое множество из  $X$  представляется в виде объединения множеств из  $\mathcal{U}$ ).

Пусть даны  $U \subset \mathcal{U}$  и путь  $\gamma$  в  $X$  из точки  $x_0$  в некоторую точку в  $U$ . Положим

$$U_{[\gamma]} = \{[\gamma \cdot \eta]: \eta \text{ — путь в } U, \text{ для которого } \eta(0) = \gamma(1)\}.$$

Отображение  $p: U_{[\gamma]} \rightarrow U$  сюръективно, так как  $U$  линейно связно, и инъективно, так как все пути  $\eta$  из  $\gamma(1)$  в  $x \in U$  гомотопны в  $X$ , поскольку отображение  $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$  тривиально. Имеется следующее свойство:

- (\*)  $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$ , если  $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$ . Действительно, если  $\gamma' = \gamma \cdot \eta$ , то элементы множества  $U_{[\gamma']}$  имеют вид  $[\gamma \cdot \eta \cdot \mu]$  и потому лежат в  $U_{[\gamma]}$ . Аналогично, элементы множества  $U_{[\gamma']}$  имеют вид  $[\gamma \cdot \mu] = [\gamma \cdot \eta \cdot \bar{\eta} \cdot \mu] = [\gamma' \cdot \bar{\eta} \cdot \mu]$  и потому лежат в  $U_{[\gamma']}$ .

Мы зададим топологию на  $\tilde{X}$ , взяв в качестве базы набор множеств  $U_{[\gamma]}$ . Чтобы проверить, что этот набор можно взять в качестве базы, нужно доказать, что в любом пересечении  $U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$  содержится множество такого вида. Пусть  $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$ . Тогда  $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma'']}$  и  $V_{[\gamma']} = V_{[\gamma'']}$ . Пусть  $W \in \mathcal{U}$  содержится в  $U \cap V$  и содержит  $\gamma''(1)$ . Тогда  $W_{[\gamma'']} \subset U_{[\gamma'']} \cap V_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$ .

Взаимно однозначное отображение  $p: U_{[\gamma]} \rightarrow U$  является гомеоморфизмом, так как оно задаёт взаимно однозначное соответствие между множествами  $V_{[\gamma']} \subset U_{[\gamma']}$  и множествами  $V \in \mathcal{U}$ , содержащимися в  $U$ . Следовательно, отображение  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  непрерывно. Оно является накрытием, так как для фиксированного  $U \in \mathcal{U}$  множества  $U_{[\gamma]}$  для разных  $[\gamma]$  задают разбиение  $p^{-1}(U)$  на непересекающиеся множества, потому что если  $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']}$ , то  $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']} = U_{[\gamma'']}$  по свойству (\*).

Остаётся показать, что  $\tilde{X}$  односвязно. Для данной точки  $[\gamma] \in \tilde{X}$  пусть  $\gamma_t$  — путь в  $X$ , который совпадает с  $\gamma$  на  $[0, t]$  и остаётся в одной и той же точке  $\gamma(t)$  на  $[t, 1]$ . Тогда отображение  $t \mapsto [\gamma_t]$  есть путь в  $\tilde{X}$ , который является поднятием пути  $\gamma$ , начинается в  $[x_0]$  (гомотопическом классе постоянного пути в  $x_0$ ) и заканчивается в  $[\gamma]$ . Так как  $[\gamma] \in \tilde{X}$  — произвольная точка, это показывает, что  $\tilde{X}$  линейно связно. Чтобы проверить, что  $\pi_1(\tilde{X}, [x_0]) = 0$ , достаточно показать, что  $p_*\pi_1(\tilde{X}, [x_0]) = 0$ . Элементы в образе гомоморфизма  $p_*$  представлены петлями  $\gamma$  в  $(X, x_0)$ , которые поднимаются до петель в  $(\tilde{X}, [x_0])$ . Мы уже отметили, что путь  $t \mapsto [\gamma_t]$  является поднятием пути  $\gamma$  и начинается в  $[x_0]$ . То, что этот путь является петлёй, означает, что  $[\gamma] = [x_0]$ . Следовательно, петля  $\gamma$  стягивается и образ гомоморфизма  $p_*$  тривиален.  $\square$

**Предложение 7.8.** *Пусть  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  — накрытие с односвязным  $\tilde{X}$ . Тогда для любого другого накрытия  $q: Y \rightarrow X$  имеется накрытие  $r: \tilde{X} \rightarrow Y$ , такое, что  $q \circ r = p$ .*

*Доказательство.* Это следует из теоремы 7.6 (о поднятии отображения).  $\square$

Благодаря этому свойству накрытие  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  с односвязным  $\tilde{X}$  называется *универсальным* накрытием над  $X$ . Из теоремы классификации ниже (теорема 7.11) следует, что универсальное накрытие единственно с точностью до изоморфизма.

**Пример 7.9.** Накрытие  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ , из примера 7.1.1 универсально, так как  $\mathbb{R}$  односвязно. Рассмотрим  $k$ -листное накрытие  $q_k: S^1 \rightarrow S^1$  из примера 7.1.2. Тогда поднятие  $r_k: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  имеет вид  $t \mapsto (\cos \frac{2\pi t}{k}, \sin \frac{2\pi t}{k})$ ,  $q_k \circ r_k = p$ .

**Пример 7.10.** Отображение  $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  из примера 4.4.3 является универсальным накрытием при  $n \geq 2$ . Так как это накрытие двулистно, из предложения 7.5 следует, что тривиальная подгруппа имеет индекс 2 в  $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$ . Поэтому  $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$ ,  $n \geq 2$ .

**7.6. Классификация накрытий.** *Изоморфизмом* накрытий  $p_1: Y_1 \rightarrow X$  и  $p_2: Y_2 \rightarrow X$  называется гомеоморфизм  $f: Y_1 \rightarrow Y_2$ , такой что  $p_1 = p_2 f$ . Аналогично определяется изоморфизм  $f: (Y_1, y_1) \rightarrow (Y_2, y_2)$  накрытий  $p_1: (Y_1, y_1) \rightarrow (X, x_0)$  и  $p_2: (Y_2, y_2) \rightarrow (X, x_0)$  над пространством с отмеченной точкой.

**Теорема 7.11.** Пусть  $X$  — линейно связное, локально линейно связное и полулокально односвязное пространство. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством классов изоморфных накрытий  $p: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  (с сохранением отмеченной точки) и множеством подгрупп в  $\pi_1(X, x_0)$ . При этом соответствию накрытие  $p$  переходит в подгруппу  $p_*\pi_1(Y, y_0)$ .

*Доказательство.* Сначала покажем, что соответствие сюръективно, т. е. для любой подгруппы  $H \subset \pi_1(X, x_0)$  существует такое накрытие  $p: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ , что  $p_*\pi_1(Y, y_0) = H$ . Зададим следующее отношение эквивалентности на односвязном (универсальном) накрывающем пространстве  $\tilde{X}$ , введённом в теореме 7.7:

$$[\gamma] \sim [\gamma'], \text{ если } \gamma(1) = \gamma'(1) \text{ и } [\gamma][\gamma']^{-1} \in H.$$

Положим  $Y = \tilde{X}/\sim$ . Заметим, что если  $\gamma(1) = \gamma'(1)$ , то  $[\gamma] \sim [\gamma']$  тогда и только тогда, когда  $[\gamma\eta] \sim [\gamma'\eta]$ . Это означает, что если какие-либо две точки в базовых открытых множествах  $U_{[\gamma]}$  и  $U_{[\gamma']}$  отождествляются в  $Y$ , то эти открытые множества отождествляются целиком. Следовательно, проекция  $p: \tilde{X}/\sim = Y \rightarrow X$ ,  $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$ , является накрытием.

Возьмём в качестве отмеченной точки  $y_0 \in Y$  класс эквивалентности  $[x_0]$  постоянного пути в точке  $x_0$ . Тогда  $p_*\pi_1(Y, y_0) = H$ . Действительно, для петли  $\gamma$  в  $(X, x_0)$  её поднятие в  $\tilde{X}$ , начинающееся в  $[x_0]$ , заканчивается в  $[\gamma]$ , поэтому образ этого поднятого пути в  $Y = \tilde{X}/\sim$  будет петлёй тогда и только тогда, когда  $[\gamma] \sim [x_0]$ , а это эквивалентно тому, что  $[\gamma] \in H$ .

Теперь покажем, что соответствие инъективно, т. е. накрытия  $p_1: (Y_1, y_1) \rightarrow (X, x_0)$  и  $p_2: (Y_2, y_2) \rightarrow (X, x_0)$ , для которых  $p_{1*}(\pi_1(Y_1, y_1)) = p_{2*}(\pi_1(Y_2, y_2))$ , изоморфны. Действительно, по теореме о поднятии отображения мы можем поднять  $p_1$  до отображения  $\tilde{p}_1: (Y_1, y_1) \rightarrow (Y_2, y_2)$ , для которого  $p_2\tilde{p}_1 = p_1$ . Аналогично получаем  $\tilde{p}_2: (Y_2, y_2) \rightarrow (Y_1, y_1)$ , для которого  $p_1\tilde{p}_2 = p_2$ . Отсюда  $p_2\tilde{p}_1\tilde{p}_2 = p_2$ . Тогда согласно единственности поднятия мы имеем  $\tilde{p}_1\tilde{p}_2 = \text{id}$ . Аналогично,  $\tilde{p}_2\tilde{p}_1 = \text{id}$ . Таким образом,  $\tilde{p}_1$  и  $\tilde{p}_2$  — обратные изоморфизмы.  $\square$

**7.7. Графы, свободные группы и теорема Нильсена–Шрайера.** В качестве приложения теории накрытий мы докажем важную алгебраическую теорему о том, что подгруппа свободной группы свободна. Доказательство будет использовать ряд фактов из теории графов, которые мы легко докажем, используя результаты о клеточных пространствах.

*Графом* называется одномерное клеточное пространство  $X$ . Нулемерные клетки называются *вершинами* графа  $X$ , а одномерные клетки — его *ребрами*. *Подграф* графа  $X$  — это клеточное подпространство  $Y \subset X$  (замкнутое подмножество, которое является объединением вершин и ребер). *Дерево* — это стягиваемый граф. Подграф дерево в  $X$  называют *максимальным*, если оно содержит все вершины графа  $X$ .

**Предложение 7.12.** Любой связный граф  $X$  содержит максимальное дерево, и любое дерево в графе содержится в некотором максимальном дереве.

*Доказательство.* Мы опишем конструкцию, которая для каждого подграфа  $X_0 \subset X$  даёт подграф  $Y \subset X$ , содержащий все вершины графа  $X$ , и деформационную ретракцию  $Y \xrightarrow{\sim} X_0$ . В частности, взяв в качестве  $X_0$  одну вершину или любое поддерево, мы получим требуемое утверждение.

Вначале построим последовательность подграфов  $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots$ , где  $X_{i+1}$  получается из  $X_i$  добавлением замыканий  $\bar{e}_\alpha$  всех рёбер  $e_\alpha \subset X \setminus X_i$ , имеющих по крайней мере один конец в  $X_i$ . Объединение  $\bigcup_i X_i$  открыто в  $X$ , так как каждая точка из  $X_i$  имеет окрестность, содержащуюся в  $X_{i+1}$ . Более того, множество  $\bigcup_i X_i$  замкнуто по аксиоме ( $W$ ) клеточного пространства, как объединение замыканий клеток. Поэтому  $X = \bigcup_i X_i$ , так как граф  $X$  связан.

Теперь, чтобы построить  $Y$ , положим вначале  $Y_0 = X_0$ . Предположим по индукции, что уже построен граф  $Y_i \subset X_i$ , содержащий все вершины графа  $X_i$ . Рассмотрим граф  $Y_{i+1}$ , который получается из  $Y_i$  путём добавления для каждой вершины из  $X_{i+1} \setminus X_i$  одного ребра, соединяющего эту вершину с  $Y_i$ . Очевидно, что имеется деформационная ретракция  $Y_{i+1} \xrightarrow{\sim} Y_i$ . Теперь положим  $Y = \bigcup_i Y_i$ . Тогда можно получить деформационную ретракцию графа  $Y$  на  $Y_0 = X_0$ , деформируя  $Y_{i+1}$  на  $Y_i$  в течение времени из промежутка  $[\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i}]$ . Тогда точка  $x \in Y_{i+1} \setminus Y_i$  остаётся неподвижной до этого промежутка, во время которого она перемещается в  $Y_i$ , а после этого продолжает перемещаться, пока не достигнет  $Y_0$ . Полученная гомотопия  $h_t: Y \rightarrow Y$  непрерывна, так как она непрерывна на замыкании каждого ребра.  $\square$

**Предложение 7.13.** *Пусть  $X$  — связный граф с максимальным деревом  $T$ . Тогда  $\pi_1(X)$  — свободная группа с базисом, элементы которого соответствуют ребрам из  $X \setminus T$ .*

*Доказательство.* Проекция  $X \rightarrow X/T$  является гомотопической эквивалентностью согласно следствию 4.8. Факторпространство  $X/T$  является графом с одной вершиной, а потому является букетом окружностей. Поэтому  $\pi_1(X) \cong \pi_1(X/T)$  — свободная группа с базисом, элементы которого соответствуют рёбрам, не попавшим в  $T$ .  $\square$

**Следствие 7.14.** *Граф является деревом тогда и только тогда, когда он односвязен.*

**Лемма 7.15.** *Любое накрывающее пространство графа  $X$  также является графом.*

*Доказательство.* Пусть  $p: Y \rightarrow X$  — накрытие. В качестве вершин графа  $Y$  мы берём дискретное множество  $Y^0 = p^{-1}(X^0)$ . В качестве ребёр графа  $Y$  мы берём все возможные поднятия характеристических отображений  $I_\alpha \rightarrow X$  одномерных клеток  $e_\alpha$  пространства  $X$  (т. е. ребёр графа  $X$ ). Такие поднятия начинаются и заканчиваются в точках из  $Y^0$ , причём для каждой точки из  $p^{-1}(x)$ , где  $x \in e_\alpha$ , существует единственное поднятие, проходящее через эту точку. Это задаёт структуру графа на  $Y$ . Получающаяся при этом топология на  $Y$  — та же самая, что и исходная топология, так как обе топологии имеют одни и те же базовые открытые множества, поскольку проекция  $p: Y \rightarrow X$  является локальным гомеоморфизмом.  $\square$

**Теорема 7.16** (Нильсен–Шрайер). *Любая подгруппа свободной группы  $F$  свободна.*

*Доказательство.* Пусть  $X$  — граф, для которого  $\pi_1(X) = F$ , например, букет окружностей. Для каждой подгруппы  $G \subset F$  согласно теореме 7.11 существует накрытие  $p: Y \rightarrow X$ , для которого  $p_*\pi_1(Y) = G$ , т. е.  $\pi_1(Y) \cong G$ , так как  $p_*$  инъективно. По предыдущей лемме  $Y$  — граф, поэтому группа  $G \cong \pi_1(Y)$  свободна согласно предложению 7.13.  $\square$

В отличие от ситуации со свободными абелевыми группами, подгруппа  $G \subset F$  свободной группы  $F$  может иметь больший ранг, чем группа  $F$ . Примеры приведены в задачах ниже.

### Задачи и упражнения.

**7.17.** Постройте накрытие букета 2 окружностей пространством, гомотопически эквивалентным букету  $n$  окружностей при  $n \geq 2$ . Постройте накрытие поверхности  $S_2$  (кренделя) поверхностью  $S_g$  (сферой с  $g$  ручками) при  $g \geq 2$ .

**7.18.** Докажите, что для накрытия  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  и любых точек  $x, x' \in X$  имеется взаимно однозначное соответствие между дискретными множествами  $p^{-1}(x)$  и  $p^{-1}(x')$ . Мощность множества  $p^{-1}(x)$  называется *числом листов накрытия*  $p$ .

**7.19.** Накрытие  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  называется *регулярным*, если  $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  — нормальная подгруппа в  $\pi_1(X, x_0)$ . Докажите, что накрытие  $p$  регулярно тогда и только тогда, когда никакая петля в  $X$  не является образом одновременно замкнутого пути и незамкнутого пути в  $\tilde{X}$ .

**7.20.** Докажите, что если  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  — регулярное накрытие, то существует свободное действие группы  $G = \pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  на пространстве  $\tilde{X}$ , такое, что  $X = \tilde{X}/G$  (точнее, орбиты действия совпадают с множествами  $p^{-1}(x)$ ). Определение действия группы  $G$  на пространстве  $X$  и пространства орбит  $X/G$  см. в примере 1.10. Действие группы  $G$  на  $X$  называется *свободным*, если для любого  $g \neq e$  и  $x \in X$  выполнено  $gx \neq x$ .

**7.21.** Действие группы  $G$  на пространстве  $Y$  называется *дискретным*, если каждая точка  $y \in Y$  обладает такой окрестностью  $U$ , что множества  $gU$ ,  $g \in G$ , попарно не пересекаются. Докажите, что если группа  $G$  действует на  $Y$  свободно и дискретно, то естественная проекция  $p: Y \rightarrow X = Y/G$  является регулярным накрытием. Более того, в этом случае  $\pi_1(X)/p_*\pi_1(Y) = G$ .

**7.22.** Докажите, что двулистные накрытия регулярны. Постройте пример нерегулярного трёхлистного накрытия над букетом двух окружностей и над кренделем.

**7.23.** Докажите, что условие полулокальной односвязности пространства  $X$  необходимо для существования односвязного накрывающего пространства  $\tilde{X}$ .

**7.24.** Постройте пример не полулокально односвязного пространства.

**7.25.** Пространство  $X$  называется *локально односвязным*, если для любой точки  $x \in X$  и её окрестности  $V \ni x$  существует меньшая окрестность  $U \subset V$ , такая, что  $\pi_1(U, x) = 0$ . Постройте пример полулокально односвязного, но не локально односвязного пространства.

**7.26.** Постройте универсальное накрытие над букетом  $S^1 \vee S^2$ .

**7.27.** Постройте универсальное накрытие над букетом  $S^1 \vee S^1$ .

**7.28.** Докажите следующую версию теоремы 7.11, в которой не учитываются отмеченные точки: имеется взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных накрытий  $p: Y \rightarrow X$  и классами сопряжённости подгрупп в  $\pi_1(X, x_0)$ .

**7.29.** Докажите, что максимальное дерево максимально в том смысле, что оно не содержится ни в каком большем дереве.

**7.30.** Пусть  $G \subset F_2$  — подгруппа свободной группы ранга 2 (с образующими  $a$  и  $b$ ), состоящая из слов чётной длины. Найдите ранг группы  $G$ . Опишите накрытие над букетом  $S^1 \vee S^1$ , реализующие подгруппу  $G$  в  $\pi_1(S^1 \vee S^1) = F_2$ .

**7.31.** Пусть  $G = [F_2, F_2] \subset F_2$  — коммутант свободной группы ранга 2. Докажите, что  $G$  — свободная группа бесконечного ранга. Опишите накрытие над букетом  $S^1 \vee S^1$ , реализующие подгруппу  $G$  в  $\pi_1(S^1 \vee S^1) = F_2$ .

## 8. РАССЛОЕНИЯ

Накрытие локально устроено как произведение на дискретное множество  $\Gamma$ . Обобщение понятия накрытия, при котором дискретное множество заменяется на произвольное топологическое пространство  $F$ , приводит к понятию расслоения.

**8.1. Локально тривиальные расслоения. Свойство поднятия гомотопии.** *Локально тривиальным расслоением* называется четвёрка  $(E, B, F, p)$ , где  $E, B, F$  — пространства, а  $p$  — такое отображение  $E \rightarrow B$ , что любая точка  $x \in B$  имеет окрестность  $U \subset B$ , для которой существует гомеоморфизм  $\varphi: p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F$ , замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & U \times F \\ & \searrow p & \swarrow \\ & U & \end{array}$$

Пространство  $E$  называется *тотальным пространством*,  $B$  *базой*, а  $F$  *слоем* локально тривиального расслоения. Локально тривиальным расслоением также называют отображение  $p: E \rightarrow B$ . Прообраз  $p^{-1}(x)$  точки  $x \in B$  называется *слоем расслоения над точкой  $x$* ; очевидно, этот слой гомеоморфен  $F$ .

Локально тривиальное расслоение называется *тривиальным*, если в диаграмме выше можно положить  $U = B$ ; это в частности означает, что  $E \cong B \times F$ .

### Пример 8.1.

1. Накрытие является локально тривиальным расслоением с дискретным слоем  $F$ .
2. Проекция ленты Мёбиуса на её среднюю линию представляет собой нетривиальное расслоение над окружностью со слоем отрезок.
3. Пусть  $E = S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 : |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$ ,  $B = \mathbb{CP}^1 = S^2$ ,  $p(z_0, z_1) = [z_0 : z_1]$ . Получаем локально тривиальное расслоение  $p: S^3 \rightarrow S^2$  со слоем  $F = S^1$ , которое называется *расслоением Хопфа*. В качестве множеств  $U$  из определения расслоения можно взять  $U_0 = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{CP}^1 : z_0 \neq 0\}$  и  $U_1 = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{CP}^1 : z_1 \neq 0\}$ .

Как и накрытия, локально тривиальные расслоения обладают свойством поднятия гомотопии (см. теорему 7.3). Однако, во-первых, накрывающая гомотопия, вообще говоря, не единственна, а во-вторых, необходимо наложить некоторые дополнительные условия на отображаемое пространство  $Z$  или на базу расслоения  $B$ . Мы докажем следующую теорему.

**Теорема 8.2.** Локально тривиальное расслоение  $p: E \rightarrow B$  обладает свойством поднятия гомотопии по отношению к любым клеточным пространствам  $Z$ :

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & E \\ i_0 \downarrow & \swarrow \tilde{G} & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

*Доказательство.* Вначале мы сведём свойство поднятия гомотопии по отношению к любым клеточным пространствам  $Z$  к случаю  $Z = D^k$ .

Свойство поднятия гомотопии является частным случаем более общего свойства поднятия для пары  $(X, A)$ , которое описывается следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & \swarrow \tilde{g} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

где  $i: A \hookrightarrow X$  — вложение. Тогда свойство поднятия гомотопии — это свойство поднятия для пары  $(Z \times I, Z)$ . Для проведения индукции по клеткам нам понадобится относительная версия свойства поднятия гомотопии, когда требуется поднять гомотопию  $G: Z \times I \rightarrow B$  до гомотопии  $\tilde{G}: Z \times I \rightarrow E$ , начинающейся с данного отображения  $f: Z \rightarrow E$  и продолжающей поднятие  $\tilde{G}: A \times I \rightarrow E$ , уже заданное на подпространстве  $A \subset Z$ . Это не что иное как свойство поднятия для пары  $(Z \times I, Z \times 0 \cup A \times I)$ :

$$\begin{array}{ccc} Z \times 0 \cup A \times I & \xrightarrow{\tilde{G}} & E \\ i \downarrow & \swarrow \tilde{G} & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

Теперь будем вести индукцию по клеткам пространства  $Z$ . Предположим, что поднятие гомотопии  $\tilde{G}: Z \times I \rightarrow E$  уже задано на  $Z$ , а мы хотим продолжить его на пространство  $Z' = Z \cup e^k$ , получаемое из  $Z$  приклеиванием одной клетки  $e^k$  при помощи отображения  $\partial D^k \rightarrow Z$ . Так как характеристическое отображение  $D^k \rightarrow Z \cup e^k$  этой клетки является гомеоморфизмом на внутренности шара, свойство поднятия для пары  $(Z' \times I, Z' \times 0 \cup Z \times I)$  эквивалентно свойству поднятия для пары  $(D^k \times I, D^k \times 0 \cup \partial D^k \times I)$ :

$$\begin{array}{ccc} D^k \times 0 \cup \partial D^k \times I & \longrightarrow & (Z \cup e^k) \times 0 \cup Z \times I \xrightarrow{\tilde{G}} E \\ i \downarrow & & i \downarrow & \swarrow \tilde{G} & \downarrow p \\ D^k \times I & \longrightarrow & (Z \cup e^k) \times I \xrightarrow{G} B \end{array}$$

Вместо шара  $D^k$  нам будет удобнее рассматривать куб  $I^k$ ; соответствующее свойство поднятия выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} I^k \times 0 \cup \partial I^k \times I & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & \swarrow \tilde{G} & \downarrow p \\ I^k \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

Выберем открытое покрытие  $\{U_\alpha\}$  пространства  $B$  вместе с локальными тривиализациями  $\varphi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times F$ . Так как  $I^k \times I$  компактно, мы можем разбить  $I^k$  на меньшие кубы  $C$ , а  $I$  — на отрезки  $I_j = [t_j, t_{j+1}]$  так, чтобы отображение  $G$  переводило каждое произведение  $C \times I_j$  в одно множество  $U_\alpha$ . Применяя индукцию по  $k$ , мы можем предположить, что гомотопия  $\tilde{G} = \tilde{g}_t$  уже построена на  $\partial C$  для каждого из малых кубов  $C$ . Чтобы продолжить эту гомотопию  $\tilde{g}_t$  на куб  $C$ , мы можем строить  $\tilde{g}_t$  последовательно на каждом отрезке  $I_j$ . Этот аргумент позволяет нам свести всё к случаю, когда отображение  $G$  переводит весь куб  $I^k \times I$  в одно множество  $U_\alpha$ . Тогда нам уже дано поднятие  $\tilde{G}: I^k \times 0 \cup \partial I^k \times I \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$ , которое необходимо продолжить до поднятия  $\tilde{G}: I^k \times I \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$ . Взяв композицию с локальной тривиализацией  $\varphi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times F$ , мы сводим всё к случаю тривиального расслоения:

$$\begin{array}{ccc} I^k \times 0 \cup \partial I^k \times I & \xrightarrow{f} & U_\alpha \times F \\ i \downarrow & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\ I^k \times I & \xrightarrow{G} & U_\alpha \end{array}$$

Требуемое поднятие  $\tilde{G}: I^k \times I \rightarrow U_\alpha \times F$  задаётся парой отображений  $I^k \times I \rightarrow U_\alpha$  и  $I^k \times I \rightarrow F$ . Первое из этих отображений определим как данное нам отображение  $G$ , а второе — как композицию

$$I^k \times I \longrightarrow I^k \times 0 \cup \partial I^k \times I \xrightarrow{f} U_\alpha \times F \longrightarrow F,$$

где первое отображение — ретракция, а последнее — проекция.  $\square$

**8.2. Расслоения в смысле Гуревича и Серра.** Отображение  $p: E \rightarrow B$  называется *расслоением в смысле Гуревича*, если оно удовлетворяет свойству поднятия гомотопии (5) по отношению к любому пространству  $Z$ .

Отображение  $p: E \rightarrow B$  называется *расслоением в смысле Серра*, если оно удовлетворяет свойству поднятия гомотопии (5) по отношению к любому клеточному пространству  $Z$ .

Согласно теореме 8.2, локально тривиальное расслоение является расслоением в смысле Серра. (Имеет место более общая теорема Гуревича–Хюбша, согласно которой локально тривиальное расслоение является расслоением в смысле Гуревича, если база  $B$  паракомпактна.) Вот важный пример расслоения в смысле Гуревича, которое, вообще говоря, не является локально тривиальным.

**Пример 8.3** (расслоение путей). Пусть  $X$  — линейно связное пространство с отмеченной точкой  $x_0$ . Напомним, что пространством путей на  $X$  называется подпространство  $PX \subset \mathcal{C}(I, X)$ , состоящее из путей  $\gamma: I \rightarrow X$  с  $\gamma(0) = x_0$ . Рассмотрим отображение

$$p: PX \rightarrow X, \quad \gamma \mapsto \gamma(1).$$

Тогда  $p$  является расслоением в смысле Гуревича. В самом деле, пусть даны  $f: Z \rightarrow PX$  и  $G: Z \times I \rightarrow X$ , см. (5). Тогда накрывающая гомотопия  $\tilde{G}: Z \times I \rightarrow PX$  может быть задана следующей формулой «продолжения путей»:

$$\tilde{G}(z, t)(s) = \begin{cases} (f(z))(s(1+t)) & \text{при } s(1+t) \leq 1, \\ G(z, s(1+t)-1) & \text{при } s(1+t) \geq 1 \end{cases}$$

(сначала проходим путь  $f(z)$  от отмеченной точки до точки  $f(z)(1) = G(z, 0)$ , а затем путь  $G(z, I)$ ). Расслоение  $p: PX \rightarrow X$  называется *расслоением путей* для  $X$ . Его слоем  $p^{-1}(x_0)$  над отмеченной точкой  $x_0 \in X$  является пространство петель  $\Omega X$ . Слой  $p^{-1}(x_1)$  над любой другой точкой представляет собой пространство путей из  $x_0$  в  $x_1$ ; легко видеть, что это пространство гомотопически эквивалентно пространству петель  $\Omega X$ .

Согласно одной из задач в конце этого раздела, все слои расслоения в смысле Гуревича гомотопически эквивалентны.

**8.3. Расслоения и корасслоения. Теорема факторизации.** До конца этого раздела под расслоением мы будем понимать расслоение в смысле Гуревича, т.е. отображение  $p: E \rightarrow B$ , удовлетворяющее свойству поднятия гомотопии (5) для любого  $Z$ .

Двойственное понятие *корасслоения* определяется как отображение  $i: A \rightarrow X$ , удовлетворяющее свойству продолжения гомотопии. Мы определяли последнее для пар  $(X, A)$  в разделе 4. В более общей ситуации, говорят, что отображение  $i: A \rightarrow X$  обладает *свойством продолжения гомотопии* по отношению к пространству  $Z$ , если для любого отображения  $f: X \rightarrow Z$  и гомотопии  $F: A \times I \rightarrow Z$ , такой, что  $f \circ i = F_0$ , существует гомотопия  $\widehat{F}: X \times I \rightarrow Z$ , для которой  $\widehat{F}_0 = f$  и  $\widehat{F} \circ (i \times \text{id}) = F$ . Это описывается коммутативной диаграммой

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F'} & Z^I \\ i \downarrow & \nearrow \widehat{F}' & \downarrow p_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

где  $Z^I = \mathcal{C}(I, Z)$ ,  $F'$  — сопряжённое отображение к  $F$  (происходящее из экспоненциального закона  $\mathcal{C}(A \times I, Z) \cong \mathcal{C}(A, Z^I)$ , т.е.  $F'(a) = \gamma$ , где  $\gamma(t) = F(a, t) \in Z$ ), отображение  $p_0$  переводит  $\gamma$  в  $\gamma(0)$ , а  $\widehat{F}'$  — сопряжённое отображение к  $\widehat{F}$ .

#### Пример 8.4.

1. Вложение  $i: A \rightarrow X$  клеточного подпространства  $A$  клеточного пространства  $X$  является корасслоением согласно теореме 4.7.

2. Вложение верхнего основания цилиндра:

$$i: X \rightarrow X \times I, \quad x \mapsto (x, 1)$$

является корасслоением. Этот пример двойствен к расслоению путей (пример 8.3).

3. Отображение  $X \rightarrow pt$  в точку всегда является расслоением: в качестве накрывающей гомотопии  $\tilde{G}: Z \times I \rightarrow X$  можно взять постоянную гомотопию  $\tilde{G}(z, t) = f(z)$ . Однако «двойственное» отображение вложения точки  $pt \rightarrow X$  является корасслоением только для достаточно хороших пространств (например, клеточных).

**Предложение 8.5.**

a) Пусть  $p: E \rightarrow B$  — расслоение,  $f: B' \rightarrow B$  — отображение и

$$\begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & E \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

— декартов квадрат, т.е.  $E' = \{(e, b') \in E \times B': p(e) = f(b')\}$ . Тогда  $p': E' \rightarrow B'$  — тоже расслоение.

b) Пусть  $i: A \rightarrow X$  — корасслоение,  $g: A \rightarrow A'$  — отображение и

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & A' \\ i \downarrow & & \downarrow i' \\ X & \longrightarrow & X' \end{array}$$

— кодекартов квадрат (т.е.  $X' = X \sqcup A'/\sim$ , где  $x \sim a'$ , если  $x = i(a)$  и  $a' = g(a)$  для некоторого  $a \in A$ ). Тогда  $i': A' \rightarrow X'$  — тоже корасслоение.

*Доказательство.* Докажем а). Рассмотрим свойство поднятия гомотопии для  $p'$ :

$$\begin{array}{ccccc} Z & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p' & & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{G} & B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Так как  $p: E \rightarrow B$  — расслоение, существует поднятие  $Z \times I \rightarrow E$ , которое вместе с универсальным свойством декартова квадрата (см. (1)) даёт требуемое поднятие  $\tilde{G}: Z \times I \rightarrow E'$ .

Утверждение б) доказывается аналогично, используя универсальное свойство кодекартова квадрата (см. (2)).  $\square$

Расслоение  $p': E' \rightarrow B'$  называется *индукцированным* расслоением  $p$  при помощи отображения  $f: B' \rightarrow B$ .

Следующая теорема о факторизации показывает, что любое отображение можно разложить в композицию гомотопической эквивалентности и расслоения, а также в композицию корасслоения и гомотопической эквивалентности.

**Теорема 8.6** (о факторизации отображения).

- а) Для любого отображения  $f: X \rightarrow Y$  существует гомотопическая эквивалентность  $h: X \rightarrow \tilde{X}$  и расслоение  $p: \tilde{X} \rightarrow Y$ , такие, что  $f = p \circ h$ .
- б) Для любого отображения  $f: X \rightarrow Y$  существует корасслоение  $i: X \rightarrow \hat{Y}$  и гомотопическая эквивалентность  $h: \hat{Y} \rightarrow Y$ , такие, что  $f = h \circ i$ .

*Доказательство.* Докажем а). Пусть  $\tilde{X}$  — множество пар  $(x, \gamma)$ , состоящих из точки  $x \in X$  и пути  $\gamma: I \rightarrow Y$  с  $\gamma(0) = f(x)$ . Это описывается декартовым квадратом

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longrightarrow & Y^I \\ \downarrow & & \downarrow p_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

где  $Y^I$  — пространство всех путей  $\gamma: I \rightarrow Y$ , а отображение  $p_0$  переводит  $\gamma$  в  $\gamma(0)$ .

Тогда гомотопическая эквивалентность  $h: X \rightarrow \tilde{X}$  задаётся формулой  $h(x) = (x, c_{f(x)})$ , где  $c_{f(x)}: I \rightarrow Y$  — постоянный путь  $t \mapsto f(x)$ , и имеем расслоение  $p: \tilde{X} \rightarrow Y$ ,  $p(x, \gamma) = \gamma(1)$  (свойство поднятия гомотопии проверяется так же, как и для расслоения путей в примере 8.3).

Докажем б). Пусть  $\hat{Y}$  — фактор-пространство пространства  $(X \times I) \sqcup Y$ , получаемое при отождествлении  $(x, 0) \in X \times I$  с  $f(x) \in Y$ . Это описывается кодекартовым квадратом

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i_0 \downarrow & & \downarrow \\ X \times I & \longrightarrow & \hat{Y} \end{array}$$

где отображение  $i_0$  переводит  $x$  в  $(x, 0)$ .

Гомотопическая эквивалентность  $h: \hat{Y} \rightarrow Y$  задаётся формулами  $h(x, t) = f(x)$  и  $h(y) = y$ , и мы имеем корасслоение  $i: X \rightarrow \hat{Y}$ ,  $i(x) = (x, 1)$  (сравните с примером 8.4.2).  $\square$

Пространство  $\hat{Y} = (X \times I) \cup_f Y$ , построенное в доказательстве утверждения б) выше, называется *цилиндром отображения*  $f$ .

### Задачи и упражнения.

**8.7.** Это — обобщение примера 8.1.3. Положим  $E = S^{2n+1} = \{(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$ ,  $B = \mathbb{C}P^n$ ,  $p(z_0, \dots, z_n) = [z_0 : \dots : z_n]$ . Докажите, что  $p: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  — локально тривиальное расслоение со слоем  $F = S^1$ . Оно также называется *расслоением Хопфа*.

**8.8.** Докажите, что расслоение  $p: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  из предыдущего упражнения (в частности, расслоение Хопфа), нетривиально.

**8.9.** Докажите, что локально тривиальное расслоение над кубом  $I^k$  тривиально.

**8.10.** Докажите, что все слои расслоения в смысле Гуревича над линейно связным пространством гомотопически эквивалентны.

**8.11.** Докажите, что вложение верхнего основания цилиндра  $i: X \rightarrow X \times I$ ,  $x \mapsto (x, 1)$ , является корасслоением.

**8.12.** Докажите, что если  $X$  — клеточное пространство и  $x \in X$ , то вложение  $i: x \rightarrow X$  является корасслоением.

**8.13.** Приведите пример пространства с отмеченной точкой  $(X, x_0)$ , для которого вложение  $i: x_0 \rightarrow X$  не является корасслоением.

**8.14.** Докажите, что разложение из теоремы 8.6 а) естественно в следующем смысле: коммутативная диаграмма отображений

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

приводит к коммутативной диаграмме разложений

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{\quad} & X' & & \\
 f \downarrow & \searrow h & \downarrow f' & \searrow h' & \\
 & \widetilde{X} & \xrightarrow{\quad} & \widetilde{X}' & \\
 \downarrow & \swarrow p & \downarrow & \swarrow p' & \\
 Y & \xrightarrow{\quad} & Y' & &
 \end{array}$$

Сформулируйте и докажите аналогичное свойство естественности для разложения из теоремы 8.6 б).

**8.15.** Пространство, гомотопически эквивалентное слою расслоения  $p: \tilde{X} \rightarrow Y$  из теоремы 8.6 а) называется *гомотопическим слоем* отображения  $f: X \rightarrow Y$  и обозначается  $\text{hofib } f$ . Докажите, используя естественность конструкции  $\tilde{X}$  (см. предыдущую задачу), что гомотопический слой определён корректно: для любого другого разложения  $f = p' \circ h'$  в композицию гомотопической эквивалентности  $h'$  и расслоения  $p'$  пространство  $\text{hofib } f$  гомотопически эквивалентно слою расслоения  $p'$ .

**8.16.** Докажите, что гомотопический слой отображения  $f: X \rightarrow Y$  есть пространство  $F$ , входящее в декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc}
 F & \longrightarrow & PY \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

где  $PY \rightarrow Y$  — расслоение путей.

**8.17.** Фактор-пространство  $G = \widehat{Y}/i(X) = \widehat{Y}/(X \times 1)$  пространства  $\widehat{Y} = (X \times I) \cup_f Y$  из теоремы 8.6 б) (цилиндра отображения) по его верхнему основанию называется *конусом отображения*  $f: X \rightarrow Y$ . Пространство, гомотопически эквивалентное конусу отображения  $f$  называется его *гомотопическим кослом*. Таким образом, мы имеем кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 CX & \longrightarrow & G
 \end{array}$$

где  $X \rightarrow CX$  — вложение  $X$  в основание конуса. Проверьте корректность определения гомотопического косла по аналогии с задачей 8.15.

**8.18.** Найдите гомотопический слой вложения точки  $pt \rightarrow X$ .

**8.19.** Найдите гомотопический кослой проекции в точку  $X \rightarrow pt$ .

**8.20.** Найдите гомотопический слой вложения букета  $S^1 \vee S^1 \hookrightarrow S^1 \times S^1$ .

**8.21.** Найдите гомотопический слой вложения букета  $\mathbb{C}P^\infty \vee \mathbb{C}P^\infty \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$ .

**8.22.** Докажите, что гомотопическая эквивалентность  $h: X \rightarrow \tilde{X}$  из теоремы 8.6 а) является корасслоением, а гомотопическая эквивалентность  $h: \widehat{Y} \rightarrow Y$  из теоремы 8.6 б) — расслоением в смысле Серра.

## 9. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

**9.1. Определение. Коммутативность.** Для пространства  $X$  с отмеченной точкой  $x_0$  определим  $\pi_n(X, x_0)$  как множество гомотопических классов отображений  $f: S^n \rightarrow X$ , переводящих отмеченную точку  $s_0$  сферы  $S^n$  в  $x_0$ . Сами эти отображения называются *сфериодами*. По-другому сфериод можно представить как отображение пар  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ , переводящий границу куба  $\partial I^n$  в  $x_0$ .

При  $n \geq 1$  сумма двух сфериодов  $f, g: S^n \rightarrow X$  определяется как композиция

$$f + g: S^n \xrightarrow{c} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X,$$

где отображение  $c$  стягивает экватор  $S^{n-1}$  в сфере  $S^n$  в точку, и мы выбираем отмеченную точку  $s_0$  на  $S^n$  так, чтобы она принадлежала этому экватору. На кубическом языке операция суммы выглядит следующим образом: если  $f, g: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  и  $(t_1, \dots, t_n)$  — координаты в кубе  $I^n$ , то сумма  $f + g$  определяется как отображение  $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ , заданное формулой

$$(7) \quad (f + g)(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{при } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{при } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Так как в операции суммы участвует только первая координата, те же самые рассуждения, что и для  $\pi_1$  (см. предложение 5.1) показывают, что сумма определена корректно на гомотопических классах сфериодов и  $\pi_n(X, x_0)$  — группа, причём единичный элемент — постоянное отображение  $I^n \rightarrow x_0$ , а обратный элемент задаётся формулой  $-f(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$ .

Группа  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n \geq 1$ , называется *n-й гомотопической группой* пространства  $X$ . Ясно, что  $\pi_1(X, x_0)$  — это фундаментальная группа, а  $\pi_0(X, x_0)$  — просто множество компонент линейной связности пространства  $X$  (на нём, вообще говоря, нет естественной групповой операции).

**Предложение 9.1.** *Гомотопическая группа  $\pi_n(X, x_0)$  коммутативна при  $n \geq 2$ .*

*Доказательство.* Мы имеем  $f + g \simeq g + f$  посредством гомотопии, изображённой на рис. 3. Сначала гомотопия сжимает области определения отображений  $f$  и  $g$  в

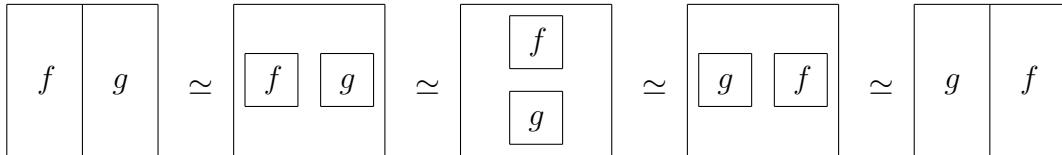


Рис. 3.

меньшие кубы в  $I^n$ , а область вне этих кубов отображается в отмеченную точку  $x_0$ . В результате появляется свободное пространство, в котором можно двигать эти два куба как угодно, лишь бы они не пересекались. При  $n \geq 2$  их можно переставить местами. Затем области определения отображений  $f$  и  $g$  можно снова увеличить до их исходного размера. Всю эту процедуру можно проделать, используя лишь координаты  $t_1$  и  $t_2$ , оставляя другие координаты без изменений.  $\square$

Если пространство  $X$  линейно связно, то для любых двух точек  $x_0, x_1 \in X$  группы  $\pi_n(X, x_0)$  и  $\pi_n(X, x_1)$  изоморфны: изоморфизм задаётся выбором пути из  $x_0$  в  $x_1$  (упражнение). Этот изоморфизм, вообще говоря, зависит от пути, вернее от его гомотопического класса. Таким образом, если  $X$  односвязно (т.е.  $\pi_0(X) = \pi_1(X) = 0$ ), то все группы  $\pi_n(X, x_0)$  с различными  $x_0$  канонически изоморфны.

**Предложение 9.2.** *Отображение  $f: X \rightarrow Y$ , такое, что  $f(x_0) = y_0$ , индуцирует гомоморфизм групп  $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ . Если отображения  $f, g: X \rightarrow Y$  гомотопны, то гомоморфизмы  $f_*$  и  $g_*$  совпадают.*

*Доказательство.* Это доказывается аналогично соответствующему утверждению для фундаментальной группы (предложение 5.2).  $\square$

**Следствие 9.3.** *Если  $f: X \rightarrow Y$  — гомотопическая эквивалентность, то для любой точки  $x_0 \in X$  гомоморфизм  $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$  является изоморфизмом.*

**Предложение 9.4.** *Для любых пространств  $(X, x_0)$  и  $(Y, y_0)$  имеем*

$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0).$$

*Доказательство.* Отображение  $Z \rightarrow X \times Y$  — это то же самое, что пара отображений  $Z \rightarrow X, Z \rightarrow Y$ . Взяв в качестве  $Z$  пространства  $S^n$  и  $S^n \times I$ , получим требуемое.  $\square$

**Предложение 9.5.**  $\pi_k(S^n) = 0$  при  $k < n$ .

*Доказательство.* Это вытекает из теоремы о клеточной аппроксимации аналогично доказательству предложения 5.6.  $\square$

**9.2. Относительные гомотопические группы. Точная последовательность пары.** Пусть  $(X, A)$  — пара пространств с отмеченной точкой  $x_0 \in A$ . Определим  $\pi_n(X, A, x_0)$ ,  $n \geq 1$ , как множество гомотопических классов отображений пар  $f: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$ , переводящих отмеченную точку  $s_0 \in S^{n-1} = \partial D^n$  в  $x_0$ . Эти отображения называются *относительными сфероидами*. На кубическом языке относительный сфероид — это отображение  $f: I^n \rightarrow X$ , переводящее  $\partial I^n$  в  $A$  и переводящее  $\partial I^n \setminus I^{n-1}$  в  $x_0$ , где грань  $I^{n-1}$  задаётся уравнением  $t_n = 0$ . Стягивание подпространства  $\partial I^n \setminus I^{n-1}$  в точку преобразует тройку  $(I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1})$  в  $(D^n, S^{n-1}, s_0)$ , поэтому отображение  $(D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  — это то же самое, что отображение  $(I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ .

Операция суммы определяется в  $\pi_n(X, A, x_0)$  той же формулой (7), что и для  $\pi_n(X, x_0)$ , за исключением того, что координата  $t_n$  играет теперь особую роль и её больше нельзя использовать для операции суммы. Таким образом,  $\pi_n(X, A, x_0)$  — группа при  $n \geq 2$ , и эта группа коммутативна при  $n \geq 3$ . Группа  $\pi_n(X, A, x_0)$ ,  $n \geq 2$ , называется *относительной гомотопической группой* пары  $(X, A)$ .

При  $n = 1$  мы получаем  $I^1 = [0, 1]$ ,  $I^0 = \{0\}$  и  $\partial I^1 \setminus I^0 = \{1\}$ . Следовательно,  $\pi_1(X, A, x_0)$  — это множество гомотопических классов путей в  $X$  из переменной точки в  $A$  в фиксированную точку  $x_0 \in A$ . Вообще говоря, это множество нельзя превратить в группу естественным способом.

Последовательность групп и гомоморфизмов

$$\dots \longrightarrow G_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \dots$$

называется *точной*, если  $\text{Ker } f_i = \text{Im } f_{i+1}$  для любого  $i$ .

Для пары пространств  $(X, A)$  и  $n \geq 1$  определены отображения

$$i_*: \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0), \quad j_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0), \quad \partial: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, x_0),$$

где  $i_*$  — отображение, индуцированное вложением  $A \hookrightarrow X$ , отображение  $j_*$  переводит гомотопический класс сфероида  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  в гомотопический класс относительного сфероида  $f: (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ , а отображение  $\partial$  переводит гомотопический класс относительного сфероида  $f: (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  в гомотопический класс сфероида  $f|_{S^{n-1}}: (S^{n-1}, s_0) \rightarrow (A, x_0)$ . На кубическом языке, отображение  $\partial$  переводит  $f: (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  в  $f|_{I^{n-1}}: (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (A, x_0)$ . Отображения  $i_*$  является гомоморфизмом при  $n \geq 1$ , а  $j_*$  и  $\partial$  являются гомоморфизмами при  $n \geq 2$ .

**Теорема 9.6** (гомотопическая последовательность пары). *Последовательность*

$$\dots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0)$$

точна для любой пары пространств  $(X, A)$ .

*Замечание.* Множество  $\pi_1(X, A, x_0)$  не является группой, и точность в этом члене означает, что для любого элемента  $[f] \in \pi_1(X, A, x_0)$ , где  $f: (D^1, S^0, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ , образ  $\partial[f]$  представляет отображение в точку  $S^0 \rightarrow x_0$  тогда и только тогда, когда  $[f] = j_*[g]$  для некоторого  $[g] \in \pi_1(X, x_0)$ . Аналогичный смысл имеет и точность в члене  $\pi_1(A, x_0)$ .

*Доказательство теоремы 9.6.*

Проверим, что  $\text{Im } i_* \subset \text{Ker } j_*$ . Пусть элемент  $[f] \in \pi_n(X, x_0)$  представлен отображением  $f: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$ . Предположим, что  $[f] \in \text{Im } i_*$ , т.е.  $f: D^n \rightarrow X$  гомотопно отображению  $g: D^n \rightarrow X$ , для которого  $g(D^n) \subset A$ . Рассмотрим гомотопию (деформационную ретракцию)  $r_t: D^n \rightarrow D^n$ , где  $r_0 = \text{id}$  и  $r_1$  — отображение в точку. Тогда композиция  $g \circ r_t$  устанавливает гомотопию между относительным сфероидом  $g: (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ , представляющим элемент  $j_*[g]$ , и отображением  $D^n \rightarrow x_0$ , представляющим 0, в классе относительных сфероидов. Следовательно  $j_*[f] = j_*[g] = 0$ , т.е.  $[f] \in \text{Ker } j_*$ .

Проверим, что  $\text{Ker } j_* \subset \text{Im } i_*$ . Предположим, что  $[f] \in \text{Ker } j_*$ , т.е.  $j_*[f] = 0$ . Здесь удобно представить  $[f] \in \pi_n(X, x_0)$  отображением  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ . Тогда  $j_*[f]$  представляется относительным сфероидом  $f: (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ . Гомотопия между  $f$  и отображением в точку в классе относительных сфероидов задаёт отображение  $F: I^{n+1} = I^n \times I \rightarrow X$ , которое совпадает на грани  $t_{n+1} = 0$  с  $f$ , переведит грань  $t_n = 0$  в  $A$  отображает оставшуюся часть границы  $\partial I^{n+1}$  в  $x_0$ . Пусть  $I_s^n \subset I^{n+1}$  — сечение куба  $n$ -мерной плоскостью  $st_n + (1-s)t_{n+1} = 0$  (см. рис. 4). Тогда  $g_s = F|_{I_s^n}: I_s^n = I^n \rightarrow X$  — гомотопия между  $f = g_0$  и отображением  $g_1$ , которое переводит  $(I^n, \partial I^n)$  в  $(A, x_0)$ . Итак, мы получаем  $[f] = [g_1] \in \text{Im } i_*$ .

Проверим, что  $\text{Im } j_* \subset \text{Ker } \partial$ . Действительно, если  $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$  лежит в  $\text{Im } j_*$ , то он представлен сфероидом  $f: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$ . Но тогда  $f|_{S^{n-1}}$  есть отображение в точку, т.е.  $\partial[f] = 0$ .

Проверим, что  $\text{Ker } \partial \subset \text{Im } j_*$ . Пусть элемент  $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$  представлен отображением  $f: (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ . Если  $[f] \in \text{Ker } \partial$ , то имеется гомотопия

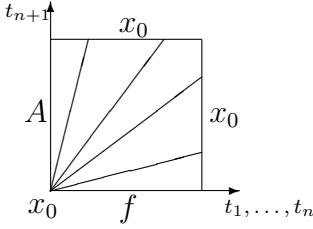


Рис. 4.

$g_t: I^{n-1} \rightarrow A$  между  $f|_{I^{n-1}}: I^{n-1} \rightarrow A$  и отображением в точку. Рассмотрим гомотопию  $h_t: \partial I^n \rightarrow A$ , совпадающую с  $g_t$  на  $I^{n-1}$  и переводящую  $\partial I^n \setminus I^{n-1}$  в  $x_0$ . Применяя теорему о продолжении гомотопии для клеточной пары  $(I^n, \partial I^n)$ , продолжим  $h_t$  до гомотопии  $f_t: I^n \rightarrow X$  между данным нам отображением  $f = f_0$  и отображением  $f_1$ , переводящим  $\partial I^n$  в  $x_0$ . Тогда  $f_1: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  представляет элемент  $[f_1] \in \pi_n(X, x_0)$  и мы имеем  $j_*[f_1] = [f]$ , т.е.  $[f] \in \text{Im } j_*$ .

Проверим, что  $\text{Im } \partial \subset \text{Ker } i_*$ . Пусть  $[f] \in \pi_{n-1}(A, x_0)$  лежит в  $\text{Im } \partial$ , т.е. сфероид  $f: (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (A, x_0)$  является ограничением относительного сфероида  $g: (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ . Тогда  $f_t = g|_{I^{n-1} \times t}: I^{n-1} \times t = I^{n-1} \rightarrow X$  есть гомотопия, связывающая  $f_0 = f$  с отображением в точку, т.е.  $i_*[f] = 0$  и  $[f] \in \text{Ker } i_*$ .

Проверим, что  $\text{Ker } i_* \subset \text{Im } \partial$ . Пусть  $[g] \in \pi_{n-1}(A, x_0)$  лежит в  $\text{Ker } i_*$ , т.е. задана гомотопия  $g_t: I^{n-1} \rightarrow X$  в  $X$  между  $g_0 = g: (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$  и отображением в точку  $g_1: I^{n-1} \rightarrow x_0$ . Тогда эта гомотопия задаёт отображение  $f: I^{n-1} \times I \rightarrow X$ ,  $f(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n) = g_{t_n}(t_1, \dots, t_{n-1})$ , представляющее собой относительный сфероид  $f: (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ , сужение которого на  $I^{n-1}$  есть  $g$ . Иначе говоря,  $\partial[f] = [f|_{I^{n-1}}] = [g]$ , т.е.  $[g] \in \text{Im } \partial$ .  $\square$

**9.3. Гомотопическая последовательность расслоения.** Пусть  $p: E \rightarrow B$  — расслоение в смысле Серра,  $b_0 \in B$  и  $e_0 \in E$  — отмеченные точки,  $p(e_0) = b_0$ , и  $F = p^{-1}(b_0)$  — слой над  $b_0$ . Имеем отображение пар

$$p: (E, F) \rightarrow (B, b_0).$$

**Лемма 9.7.** Отображение  $p_*: \pi_n(E, F, e_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  является изоморфизмом при  $n \geq 1$ .

*Доказательство.* Докажем, что  $p_*$  — мономорфизм. Пусть  $p_*[\tilde{f}] = 0$  для некоторого элемента  $[\tilde{f}] \in \pi_n(E, F, e_0)$ , представленного относительным сфероидом  $\tilde{f}: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (E, F)$ . Так как  $p_*[\tilde{f}] = 0$ , сфероид  $f = p \circ \tilde{f}: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (B, b_0)$  гомотопен нулю в  $B$  посредством гомотопии  $F: D^n \times I \rightarrow B$  или  $f_t: D^n \rightarrow B$ , где  $f_0 = f$  и  $f_1: D^n \rightarrow b_0$ . Воспользуемся свойством поднятия гомотопии:

$$\begin{array}{ccc} D^n \times 0 & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ D^n \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

Это даёт нам гомотопию  $\tilde{f}_t: D^n \rightarrow E$  между отображением  $\tilde{f} = \tilde{f}_0: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (E, F)$  и отображением  $\tilde{f}_1$ , для которого  $\tilde{f}_1(D^n) \subset F$  (так как  $f_1(D^n) = b_0$ ). Таким образом,  $[\tilde{f}] = [\tilde{f}_1] = 0$  в  $\pi_n(E, F, e_0)$  и  $p_*$  — мономорфизм.

Теперь докажем, что  $p_*: \pi_n(E, F, e_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  — эпиморфизм. Пусть элемент  $[f]: \pi_n(B, b_0)$  представлен отображением  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$ . Воспользуемся свойством поднятия гомотопии следующим образом:

$$\begin{array}{ccccc} \partial I^n \setminus I^{n-1} & = & I^{n-1} \times 1 \cup \partial I^{n-1} \times I & \xrightarrow{c} & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\ I^n & = & I^{n-1} \times I & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

$\tilde{f}$

Diagram illustrating the lifting property of homotopy. The top row shows  $\partial I^n \setminus I^{n-1}$  being mapped to  $E$  via  $c$ , while  $I^n$  is mapped to  $B$  via  $p$ . The bottom row shows  $I^{n-1} \times I$  being mapped to  $B$  via  $f$ . A dashed arrow labeled  $\tilde{f}$  connects the two rows, indicating the lift from  $I^{n-1} \times I$  to  $E$ .

где  $c$  — постоянное отображение в точку  $e_0 \in E$  (здесь мы используем то, что пары  $(I^{n-1} \times I, I^{n-1} \times 1 \cup \partial I^{n-1} \times I)$  и  $(I^{n-1} \times I, I^{n-1} \times 1)$  гомеоморфны). Это даёт нам отображение  $\tilde{f}: I^n \rightarrow E$ , для которого  $\tilde{f}(\partial I^n) \subset F$ , так как  $f(\partial I^n) = b_0$ . Таким образом, мы получаем относительный сфероид  $\tilde{f}: (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \rightarrow (E, F, e_0)$ , для которого  $p_*[\tilde{f}] = [f]$ , так как  $p \circ \tilde{f} = f$ . Итак,  $p_*$  — эпиморфизм.  $\square$

**Теорема 9.8** (гомотопическая последовательность расслоения). Для расслоения в смысле Серра  $p: E \rightarrow B$  над линейно связной базой  $B$  со слоем  $F$  имеет место точная последовательность

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\partial} \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \dots \\ &\dots \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, b_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, e_0) \end{aligned}$$

*Доказательство.* Это вытекает из гомотопической последовательности пары  $(E, F)$  и предыдущей леммы.  $\square$

*Замечание.* Из доказательства леммы 9.7 вытекает следующее описание граничного отображения  $\partial: \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, e_0)$ . Пусть  $[f] \in \pi_n(B, b_0)$  представлен сфероидом  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$ . Рассмотрим  $f$  как гомотопию  $I^{n-1} \times I \rightarrow B$ , состоящую из отображений  $g_t: I^{n-1} \rightarrow B$ , где  $g_0$  и  $g_1$  — постоянные отображения в точку  $b_0$ . Поднимем эту гомотопию до гомотопии  $\tilde{g}_t: I^{n-1} \rightarrow E$ , начиная с постоянного отображения  $\tilde{g}_0: I^{n-1} \rightarrow e_0$ . Отображение  $\tilde{g}_1$  уже не будет постоянным отображением, но будет переводить  $I^{n-1}$  в  $F$ . Тогда сфероид  $\tilde{g}_1: (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (F, e_0)$  представляет элемент  $\partial[f] \in \pi_{n-1}(F, e_0)$ .

### Пример 9.9.

1. Рассмотрим гомотопической последовательности накрытия  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  со слоем счётное дискретное множество  $Z$ :

$$\dots \rightarrow \pi_n(Z) \rightarrow \pi_n(\mathbb{R}) \rightarrow \pi_n(S^1) \rightarrow \pi_{n-1}(Z) \rightarrow \dots$$

Так как  $\pi_n(\mathbb{R}) = 0$  при всех  $n$  и  $\pi_k(Z) = 0$  при  $k > 0$ , из точности последовательности вытекает, что  $\pi_n(S^1) = 0$  при  $n > 1$ .

2. Рассмотрим следующий фрагмент гомотопической последовательность расслоения Хопфа  $p: S^3 \rightarrow S^2$  со слоем  $S^1$  (см. пример 8.1.3):

$$\pi_3(S^1) \rightarrow \pi_3(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_3(S^2) \rightarrow \pi_2(S^1) \rightarrow \pi_2(S^3) \rightarrow \pi_2(S^2) \xrightarrow{\partial} \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^3)$$

Так как  $\pi_n(S^1) = 0$  при  $n > 1$ ,  $\pi_1(S^3) = \pi_2(S^3) = 0$ , мы получаем последовательность

$$0 \rightarrow \pi_3(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_3(S^2) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \pi_2(S^2) \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Так как эта последовательность точна мы получаем, что  $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$  и  $\pi_3(S^3) \cong \pi_3(S^2)$ . (На самом деле  $\pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$ , но пока мы этого доказать не можем.) Аналогично получаем  $\pi_n(S^3) \cong \pi_n(S^2)$  при  $n \geq 3$ .

#### 9.4. Теорема Уайтхеда.

**Теорема 9.10** (Уайтхед). *Отображение  $f: X \rightarrow Y$  связных клеточных пространств является гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда индуцированные отображения  $f_*: \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$  являются изоморфизмами для всех  $n$ .*

*Доказательство.* Если  $f: X \rightarrow Y$  — гомотопическая эквивалентность, то согласно следствию 9.3  $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$  является изоморфизмом для всех  $n$ . Предположим теперь, что  $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$  является изоморфизмом для всех  $n$ .

По теореме о клеточной аппроксимации мы можем считать отображение  $f: X \rightarrow Y$  клеточным. Далее применим теорему о факторизации отображения (теорему 8.6 б)) и разложим  $f$  в композицию  $X \rightarrow \widehat{Y} \rightarrow Y$ , где  $\widehat{Y} = (X \times I) \cup_f Y$  — цилиндр отображения  $f$ , отображение  $\widehat{Y} \rightarrow Y$  является гомотопической эквивалентностью, а  $X \rightarrow \widehat{Y}$  — вложение клеточного подпространства.

Тем самым мы свели доказательство к случаю, когда  $f$  — включение клеточного подпространства  $X \subset Y$ . Так как  $f_*$  — изоморфизм для всех  $n$ , из гомотопической последовательности пары  $(Y, X)$  вытекает, что все относительные группы  $\pi_n(Y, X)$  нулевые. Мы докажем, что тогда существует деформационная ретракция  $Y \rightarrow X$ . Другими словами, докажем, что тождественное отображение  $\text{id}: Y \rightarrow Y$  гомотопно относительно  $X$  отображению в  $X$ .

Предположим по индукции, что мы уже построили гомотопию относительно  $X$  между отображением  $\text{id}: Y \rightarrow Y$  и отображением  $g: Y \rightarrow Y$ , для которого  $g(Y^{k-1}) \subset X$ . Пусть  $e^k$  — некоторая  $k$ -мерная клетка из  $Y \setminus X$  и  $\Phi: (D^k, \partial D^k) \rightarrow (Y, Y^{k-1})$  — её характеристическое отображение. Так как  $\pi_k(Y, X) = 0$ , композиция

$$g \circ \Phi: (D^k, \partial D^k) \rightarrow (Y, Y^{k-1}) \rightarrow (Y, X)$$

гомотопна относительно  $\partial D^k$  отображению в  $X$ . Так как  $Y^{k-1} \cup e^k = Y^{k-1} \sqcup D^k / \sim$ , эта гомотопия индуцирует гомотопию между отображением  $g|_{Y^{k-1} \cup e^k}: Y^{k-1} \cup e^k \rightarrow Y$  и отображением в  $X$ . Произведя такую гомотопию одновременно для всех клеток  $e^k \subset Y \setminus X$  и взяв постоянную гомотопию на  $X$ , мы получим гомотопию между отображением  $g|_{Y^k \cup X}$  и отображением в  $X$ . Согласно свойству продолжения гомотопии (теорема 4.7), эту гомотопию можно продолжить до гомотопии, определённой на всём пространстве  $Y$ , и тем самым доказательство шага индукции завершено.

Применив конечное число шагов индукции, получим доказательство в случае, когда размерность клеток из  $Y \setminus X$  ограничена. В общем случае мы выполняем гомотопию на  $k$ -м шаге индукции в течение времени  $t$  из отрезка  $[1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}}]$ . Любой конечный остов  $Y^k$  в конце концов станет стационарным при этих гомотопиях, поэтому мы получаем корректно определённую гомотопию  $g_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , причём  $g_1(Y) \subset X$ .  $\square$

Теорема Уайтхеда не утверждает, что клеточные пространства  $X$  и  $Y$  с изоморфными гомотопическими группами будут гомотопически эквивалентными: изоморфизмы должны индуцироваться отображением  $X \rightarrow Y$ . Например, пространства  $S^2$  и

$S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$  имеют одинаковые гомотопические группы (упражнение), но не гомотопически эквивалентны (этого мы пока доказать не можем).

### Задачи и упражнения.

**9.11.** Докажите, что если пространство  $X$  линейно связно, любой путь из из  $x_0$  в  $x_1$  задаёт изоморфизм между  $\pi_n(X, x_0)$  и  $\pi_n(X, x_1)$ , который зависит только от гомотопического класса пути (с фиксированными концами и началом). Указание: постройте и используйте отображение  $\omega: S^n \rightarrow S^n \vee I$ .

**9.12.** Докажите, что если  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  — накрытие, то индуцированное отображение  $p_*: \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  — изоморфизм при  $n \geq 2$ .

**9.13.** Докажите, что  $\pi_n(S^1 \vee S^1) = 0$  при  $n \geq 2$ .

**9.14.** Найдите гомотопические группы кренделя (сферы с двумя ручками).

**9.15.** Докажите следующее утверждение, известное как *лемма о 5 гомоморфизмах* или просто *5-лемма*. Пусть

$$\begin{array}{ccccccc} G_1 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & G_3 & \longrightarrow & G_4 \longrightarrow G_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ H_1 & \longrightarrow & H_2 & \longrightarrow & H_3 & \longrightarrow & H_4 \longrightarrow H_5 \end{array}$$

— коммутативная диаграмма групп и гомоморфизмов, строки которой являются точными последовательностями. Тогда

- a) если  $f_2$  и  $f_4$  — мономорфизмы, а  $f_1$  — эпиморфизм, то  $f_3$  — мономорфизм;
- b) если  $f_2$  и  $f_4$  — эпиморфизмы, а  $f_5$  — мономорфизм, то  $f_3$  — эпиморфизм.

Таким образом, если  $f_1, f_2, f_4, f_5$  — изоморфизмы, то и  $f_3$  — изоморфизм.

**9.16.** Ведите отображения и докажите точность *гомотопической последовательности тройки*  $(X, A, B)$  (где  $A \subset B \subset X$ ):

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\partial} \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \dots \\ &\dots \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \end{aligned}$$

**9.17.** Используя бесконечное расслоение Хопфа  $p: S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$  со слоем  $S^1$  докажите, что  $\pi_2(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}$  и  $\pi_k(\mathbb{C}P^\infty) = 0$  при  $k \neq 2$ .

**9.18.** Докажите, что пространства  $S^2$  и  $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$  имеют одинаковые гомотопические группы.

**9.19.** Докажите, что  $\pi_n(\Omega X) \cong \pi_{n+1}(X)$  для любого  $X$  при  $n \geq 0$ .

**9.20.** Докажите, что  $\Omega \mathbb{C}P^\infty \simeq S^1$ .

**9.21.** Докажите трёхмерную теорему Брауэра: любое непрерывное отображение  $f: D^3 \rightarrow D^3$  имеет неподвижную точку.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- абеленизация (группы), 35, 40  
амальгама (пространств), 9  
амальгамированное произведение (групп), 41  
  
база (расслоения), 51  
база (топологии), 6  
базис (свободной группы), 34  
барицентрическое подразбиение, 26  
буket (пространств), 14, 38  
бутылка Клейна, 21  
  
вложение (пространств), 3  
  
гомеоморфизм, 3  
гомотопия, 16  
гомотопическая группа, 58  
относительная, 59  
гомотопическая эквивалентность, 16, 31  
гомотопический кослой, 57  
гомотопический тип, 16  
гомотопический слой, 57  
гомотопия,  
относительно подпространства, 24  
петель, 28  
граф, 48  
  
действие (группы на пространстве), 5  
дискретное, 50  
свободное, 50  
декартов квадрат, 9, 54  
дерево, 48  
максимальное, 48  
джойн (соединение), 13  
пространств с отмеченной точкой, 14  
  
индекс (подгруппы), 44  
  
категория, 6  
клетка, 17  
клеточное отображение, 18  
клеточное подпространство, 18  
клеточное пространство, 17  
локально конечное, 18  
конечное, 18  
коамальгама, 9  
кодекартов квадрат, 9, 41, 54  
коммутант (группы), 35, 51  
конус, 12  
отображения, 57  
копроизведение  
групп, 34  
пространств, 9, 14  
корасслоение, 22, 54  
  
лемма о 5 гомоморфизмах, 64  
лист Мёбиуса, 28, 51  
морфизм, 6  
  
надстройка, 12  
пространства с отмеченной точкой, 14  
накрытие, 42  
регулярное, 50  
универсальное, 47  
  
однородные координаты, 19  
окрестность (точки), 3  
орбита (действия), 6  
отображение (пространств),  
открытое, 5  
непрерывное, 3  
собственное, 10  
  
пара (пространств), 22  
клеточная, 23  
пара Борсука, 22  
петля, 14, 28  
подмножество (пространства)  
замкнутое, 3  
открытое, 3  
предбаза (топологии), 10  
пределная точка, 3  
приведённое произведение, 14  
приклеивание клетки, 17  
проективная плоскость, 21  
проективное пространство  
вещественное, 19  
бесконечномерное, 20  
комплексное, 20  
произведение  
петель, 28  
пространств, 7  
с отмеченными точками, 14  
пространство (топологическое)  
компактное, 3  
линейно связное, 14  
локально компактное, 12  
локально линейно связное, 45  
односвязное, 42  
полулокально односвязное, 50  
с отмеченной точкой, 14  
связное, 3  
стягиваемое, 16, 31  
хаусдорфово, 3  
пространство орбит, 6  
пространство петель, 15, 53  
пространство путей, 15, 53

- путь (в пространстве), 14
- ранг (свободной группы), 34
- расслоение
  - в смысле Гуревича, 53
  - в смысле Серра, 53
  - индуцированное, 55
  - локально тривиальное, 51
  - путей, 53
  - тривиальное, 51
  - Хопфа, 51, 56
- расслоенное произведение, 9
- ретракция, 22, 32
  - деформационная, 22
- свободная группа, 34
- свободное произведение (групп), 34
- свойство поднятия гомотопии (СНР), 43, 52
- свойство продолжения гомотопии (НЕР), 22, 54
- симметрический квадрат (пространства), 28
- симплекс, 25
- симплексиальный комплекс, 26
- склейка (пространств), 9
- слой (расслоения), 51
- смэш-произведение, 14
- сфера, 13, 19
  - бесконечномерная, 20
- сфера с ручками, 21
- сфериоид, 58
- относительный, 59
- теорема
  - Брауэра, 32
  - ван Кампена, 36
  - Нильсена–Шрайера, 49
  - о клеточной аппроксимации, 24, 39
  - Тихонова, 11
  - Уайтхеда, 63
- топологическая группа, 33
- топологическое пространство, 3
- топология, 3
  - антидискретная, 3
  - грубая, 3
  - дискретная, 3
  - индуцированная, 3
  - компактно-открытая, 10
  - произведения, 7
  - прямого предела, 20
  - тонкая, 3
- тотальное пространство (расслоения), 51
- точная последовательность, 59
- фактор-топология, 5
- фундаментальная группа, 30
- функция, 6
  - ковариантный, 6
  - контравариантный, 6
- характеристическое отображение (клетки), 17
- цилиндр, 12
- цилиндр отображения, 56
- шар, 13
- экспоненциальный закон, 12