Введение в топологию / Топология-1/ Введение в гомотопическую топологию

ПАНОВ Тарас Евгеньевич

Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова

Независимый Московский университет

Факультет математики НИУ ВШЭ

Последняя редакция: 21 апреля 2024 г.

Содержание

Предисловие

Это первая часть базового курса лекций по алгебраической топологии (курсы «Введение в топологию» на механико-математическом факультете МГУ, «Топология-1» в Независимом московском университете и «Введение в гомотопическую топологию» на факультете математики НИУ ВШЭ).

Основная часть курса — начала теории гомотопий. Сюда входит теория клеточных пространств, фундаментальная группа, накрытия, гомотопическая теория расслоений и высшие гомотопические группы.

Данный текст доступен на странице Т. Е. Панова на сайте кафедры высшей геометрии и топологии: `http://higeom.math.msu.su/people/taras/`

Список литературы

[Ва] В. А. Васильев. *Введение в топологию.* Москва, Фазис, 1997.

[ВИНХ] О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов. *Элементарная топология.* Москва, МЦНМО, 2010.

[ФФ] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. *Курс гомотопической топологии.* Москва, Наука, 1989.

[Ха] А. Хатчер. *Алгебраическая топология.* Москва, МЦНМО, 2011.

1. Необходимые сведения из общей топологии

1.1. **Основные понятия.**

Топологическим пространством называется множество X с выделенным набором подмножеств, называемых *открытыми*, которые удовлетворяют следующим условиям:

(а) пустое множество $\varnothing$ и всё множество X являются открытыми;
(б) объединение любого набора открытых множеств является открытым;
(в) пересечение конечного числа открытых множеств является открытым.

Набор $\mathcal{T}$ открытых подмножеств также называется *топологией* на пространстве X.

Если на множестве X введены две топологии $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$, причём каждое подмножество из $\mathcal{T}_1$ лежит в $\mathcal{T}_2$, то говорят, что топология $\mathcal{T}_1$ *грубее* топологии $\mathcal{T}_2$, а топология $\mathcal{T}_2$ *тоньше* топологии $\mathcal{T}_1$.

Самой тонкой топологией на X является *дискретная*, в которой все подмножества открыты, а самой грубой — *антидискретная*, в которой открытыми являются только $\varnothing$ и X.

Замечание. Вместо терминологии грубая/тонкая в математике часто используется терминология *сильная/слабая* топология. По этому поводу приведём цитату из книги [ФФ] (стр. 13):

> Термины «слабая топология» и «сильная топология» не имеют в математике единого толкования. Мы считаем топологию более слабой, если в ней больше открытых множеств, т. е. меньше предельных точек (у нас слабее всех дискретная топология). Образно выражаясь, слабая топология — это топология, в которой точки слабее притягиваются друг к другу. Противоположная терминология исходит из представления, что в топологическом пространстве точки отталкиваются друг от друга (по отношению к этой терминологии дискретная топология является самой сильной).

Элементы $x \in X$ топологического пространства называются *точками*. Любое открытое множество U, содержащее данную точку $x \in X$, называется *окрестностью* этой точки.

Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств *непрерывно*, если для любого открытого подмножества $U \subset Y$ подмножество $f^{-1}(U)$ открыто в X.

Пример 1.1. На вещественной прямой $\mathbb{R}$ вводится *стандартная* топология, в которой множество $U \subset \mathbb{R}$ открыто, если для любой точки $x \in U$ множество U содержит интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Таким образом, открытые множества на $\mathbb{R}$ — это объединения (возможно, бесконечного числа) интервалов.

В анализе функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется непрерывной, если для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Назовем временно такую функцию *ε-δ-непрерывной.*

Предложение 1.2. *Функция f является ε-δ-непрерывной тогда и только тогда, когда она непрерывна как отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторая ε-δ-непрерывная функция, и рассмотрим открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}$. Тогда для любой точки $x_0 \in f^{-1}(U)$ найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subset U$ (так как U открыто). Для этого ε, согласно определению ε-δ-непрерывности, найдётся такое $\delta > 0$, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Последнее неравенство означает, что $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subset U$, а значит, $x \in f^{-1}(U)$. Мы получили, что для $x_0 \in f^{-1}(U)$ найдётся такое $\delta > 0$, что $|x - x_0| < \delta$ влечёт $x \in f^{-1}(U)$. Это означает, что $f^{-1}(U)$ открыто. Итак, отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно.

Обратно, пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно. Выберем $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Интервал $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ открыт, поэтому его прообраз открыт и содержит x_0. Следовательно, найдётся такое $\delta > 0$, что $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Последнее условие эквивалентно тому, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Итак, функция f является ε-δ-непрерывной. $\square$

Далее под «пространством» мы будем понимать топологическое пространство, а под «отображением» — непрерывное отображение.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно непрерывно, взаимно однозначно и обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ также непрерывно. Два пространства *гомеоморфны*, если между ними существует гомеоморфизм. Для гомеоморфных пространств X и Y используется обозначение $X \cong Y$.

Обратим внимание, что если $f\colon X \to Y$ — непрерывное взаимно однозначное отображение, то отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ может не быть непрерывным.

Пример 1.3. Пусть X представляет собой множество из двух элементов с дискретной топологией, а Y — то же множество с антидискретной топологией. Тогда тождественное отображение $X \to Y$ непрерывно, а его обратное — нет.

Каждое подмножество $A \subset X$ является топологическим пространством относительно *индуцированной* топологии, в которой открытые множества имеют вид $A \cap U$, где U открыто в X. При этом отображение *вложения* $i\colon A \hookrightarrow X$ непрерывно.

Подмножество $A \subset X$ *замкнуто*, если его дополнение открыто. Точка $x \in X$ называется *предельной* для подмножества $A \subset X$, если любая окрестность точки x содержит точку из A, отличную от x. Подмножество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки (упражнение).

Пространство X *связно*, если его нельзя представить в виде объединения $A \sqcup B$ непересекающихся подмножеств A и B, каждое из которых непусто и открыто.

Пространство X *компактно*, если из каждого его покрытия открытыми множествами $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ можно выделить конечное подпокрытие $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$.

Пространство X *хаусдорфово*, если у любых его двух различных точек $x, y \in X$ существуют непересекающиеся окрестности, $U \ni x$, $V \ni y$, $U \cap V = \varnothing$.

Теорема 1.4. *Непрерывное взаимно однозначное отображение $f\colon X \to Y$ компактного пространства X на хаусдорфово пространство Y является гомеоморфизмом.*

Доказательство опирается на три леммы.

Лемма 1.5. *Если X компактно и $A \subset X$ — замкнутое подмножество, то A также компактно (в индуцированной топологии).*

Доказательство. Пусть $A = \bigcup_{i \in I} V_i$ — открытое покрытие. Имеем $V_i = A \cap U_i$, где U_i открыто в X. Тогда $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} U_i$ — открытое покрытие. Выделим конечное подпокрытие $X = (X \setminus A) \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n$. Тогда $A = V_1 \cup \ldots \cup V_n$ — конечное подпокрытие. $\square$

Лемма 1.6. *Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное сюръективное отображение и X компактно, то Y также компактно.*

Доказательство. Пусть $Y = \bigcup_{i\in I} U_i$ — открытое покрытие. Тогда $X = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$ также является открытым покрытием. Выделим конечное подпокрытие $X = f^{-1}(U_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_n)$. Тогда $Y = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ — конечное подпокрытие. □

Лемма 1.7. *Если Y хаусдорфово и $B \subset Y$ — компактное подмножество, то B замкнуто.*

Доказательство. Предположим, что для B найдётся такая предельная точка $y \in Y$, что $y \notin B$. Для каждой точки $b \in B$ выберем открытые (в Y) подмножества $U_b \ni b$, $V_b \ni y$, $U_b \cap V_b = \varnothing$. Из открытого покрытия $B = \bigcup_{b\in B} U_b$ выделим конечное подпокрытие $B = U_{b_1} \cup \ldots \cup U_{b_n}$. Тогда $V = V_{b_1} \cap \ldots \cap V_{b_n}$ — окрестность точки y, не пересекающаяся с B. Противоречие. □

Доказательство теоремы 1.4. Надо доказать, что обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ непрерывно. Другими словами, надо доказать, что f переводит открытые множества в открытые (такие отображения называются *открытыми*). Так как f взаимно однозначно, это эквивалентно тому, что f переводит замкнутые множества в замкнутые. Пусть $A \subset X$ замкнуто. Согласно лемме 1.5, A компактно. Согласно лемме 1.6, $f(A) \subset Y$ также компактно. Наконец, согласно лемме 1.7, $f(A)$ замкнуто. □

Отношением на множестве X называется подмножество $R \subset X \times X$ декартова квадрата $X \times X$. Если $(x_1, x_2) \in R$, то говорят, что элементы x_1 и x_2 *находятся в отношении* R. При этом используется обозначение $x_1 \sim_R x_2$ или просто $x_1 \sim x_2$. Отношение R называется *отношением эквивалентности*, если оно *рефлексивно* ($(x, x) \in R$, или $x \sim x$ для любого $x \in X$), *симметрично* ($x_1 \sim x_2$ влечёт $x_2 \sim x_1$) и *транзитивно* ($x_1 \sim x_2$ и $x_2 \sim x_3$ влечёт $x_1 \sim x_3$). Множество X с отношением эквивалентности представляется в виде несвязного объединения *классов эквивалентности*. Обозначим через $X/{\sim}$ множество классов эквивалентности.

Конструкция 1.8 (фактортопология)**.** Пусть X — топологическое пространство с отношением эквивалентности. Рассмотрим отображение множеств $p\colon X \to X/{\sim}$, которое сопоставляет точке её класс эквивалентности. Тогда на множестве $X/{\sim}$ определена *фактортопология*, в которой множество $U \subset X/{\sim}$ открыто тогда и только тогда, когда его прообраз $p^{-1}(U)$ открыт в X. Отображение $p\colon X \to X/{\sim}$ непрерывно относительно фактортопологии и называется *фактороотображением*.

Вот два важнейших примера факторпространства.

Конструкция 1.9 (стягивание подпространства)**.** Пусть $A \subset X$, а отношение эквивалентности на X задано так: $x_1 \sim x_2$ тогда и только тогда, когда либо $x_1 = x_2$, либо $x_1 \in A$ и $x_2 \in A$. Фактор-пространство $X/{\sim}$ обозначается X/A; говорят, что X/A получается из X *стягиванием* A *в точку.* Если $A = pt$ — точка, то X/pt гомеоморфно X. Также отдельно рассматривают случай $A = \varnothing$. Тогда $X/\varnothing$ полагают равным несвязному объединению X и точки; такой формализм оказывается весьма полезным.

Конструкция 1.10 (пространство орбит действия группы)**.** Говорят, что группа G *действует слева* на пространстве X, если для каждого элемента $g \in G$ задано такое непрерывное отображение $\alpha_g\colon X \to X$, что $\alpha_e = \mathrm{id}$ (тождественное отображение) и

$\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$ (композиция). Заметим, что каждое отображение α_g является гомеоморфизмом (с обратным $\alpha_{g^{-1}}$). Точка $\alpha_g(x)$ обозначается просто gx.

Примеры:

– общая линейная группа (обратимых операторов) $GL(V)$, а также её подгруппы (например, $SL(V)$, $SO(V)$), действуют на линейном пространстве V;
– группа невырожденных матриц $GL(n, \mathbb{R})$ действует слева на пространстве столбцов $\mathbb{R}^n$;
– аддитивная группа линейного простраства V также действует на V;
– группа перестановок (симметрическая группа) Σ_n действует на конечном множестве $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

Орбитой точки $x \in X$ под действием G называется подмножество

$$Gx = \{gx \colon g \in G\} \subset X.$$

Примеры:

– орбитами действия группы поворотов $SO(2)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ являются концентрические окружности с центром в 0 и точка 0;
– действие группы Σ_n на $[n]$ имеет единственную орбиту — само множество $[n]$.

Орбиты разных точек не пересекаются или совпадают и тем самым задают отношение эквивалентности на X: $x \sim y$, если существует такой $g \in G$, что $gx = y$.

Соответствующее фактор-пространство $X/\sim$ называется *пространством орбит* по действию G и обозначается X/G.

1.2. **Категории и функторы.** *Категория* $\mathcal{C}$ состоит из класса *объектов* и класса *морфизмов* между объектами. Подкласс морфизмов между объектами A и B обозначается $\mathrm{Hom}(A, B)$. При этом морфизмы должны удовлетворять следующим условиям. Если $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ и $g \in \mathrm{Hom}(B, C)$, то определена *композиция* $g \circ f \in \mathrm{Hom}(A, C)$. Более того, требуется, чтобы композиция была ассоциативной и для любого объекта A класс $\mathrm{Hom}(A, A)$ содержал *тождественный* морфизм id_A, удовлетворяющий соотношениям $f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f$ для любого $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$.

Примерами являются категория множеств, категория групп и гомоморфизмов, категория топологических пространств и непрерывных отображений.

Ковариантный функтор из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ сопоставляет каждому объекту A из $\mathcal{C}$ объект $F(A)$ из $\mathcal{D}$ и каждому морфизму $f \colon A \to B$ из $\mathcal{C}$ морфизм $F(A) \to F(B)$ из $\mathcal{D}$ так, что F сохраняет композицию и тождественный морфизм:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f), \quad F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}.$$

Контравариантный функтор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ сопоставляет морфизму $f \colon A \to B$ из $\mathcal{C}$ морфизм $F(B) \to F(A)$ из $\mathcal{D}$ так, что

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g), \quad F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}.$$

1.3. **Произведения и копроизведения, декартовы и кодекартовы квадраты.**

Базой топологии $\mathcal{T}$ на X называется такой набор открытых подмножеств $\{U_i \colon i \in I\}$, что любое открытое множество в X представляется в виде объединения (конечного или бесконечного) подмножеств U_i.

Пример 1.11. Базой топологии на вещественной прямой $\mathbb{R}$ является набор всех интервалов. Интервалы с рациональными концами также образуют базу топологии на $\mathbb{R}$ (эта база счётна, в отличие от базы из всех интервалов).

Конструкция 1.12 (топология произведения)**.** *Произведением* топологических пространств X и Y называется множество $X \times Y$ (состоящее из пар (x, y), $x \in X$, $y \in Y$) с топологией, базу которой образуют подмножества вида $U \times V$, где U открыто в X, а V открыто в Y. Эта топология называется *топологией произведения.*

Пример 1.13. *Вещественная плоскость* $\mathbb{R}^2$ — это декартово произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ с топологией произведения. Открытыми множествами здесь являются объединения открытых прямоугольников (произведений интервалов). В анализе топология на $\mathbb{R}^2$ вводится так: открытыми объявляются множества, которые вместе с любой своей точкой содержат некоторый открытый шар с центром в этой точке. Таким образом, в этой топологии открытые множества — это объединения открытых шаров. Эта топология совпадает с топологией произведения, так как каждый открытый прямоугольник является объединением открытых шаров и каждый открытый шар является объединением открытых прямоугольников.

Те же рассуждения относятся к топологии на пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пример 1.14. *Окружностью* называется топологическое пространство, гомеоморфное следующему подмножеству в $\mathbb{R}^2$:

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$$

(с индуцированной топологией). По-другому окружность можно определить как факторпространство $[0, 1]/\{0, 1\}$ отрезка по его границе. Непрерывное отображение

$$f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t),$$

индуцирует гомеоморфизм $[0, 1]/\{0, 1\} \xrightarrow{\cong} S^1$. Доказательство этого факта — упражнение (указание: воспользоваться теоремой 1.4).

В то же время, если рассмотреть ограничение отображения f на полуинтервал, мы получим непрерывное взаимно однозначное отображение $[0, 1) \to S^1$, которое не является гомеоморфизмом (упражнение).

Предложение 1.15. *Топология произведения является самой грубой из всех топологий на $X \times Y$, относительно которых проекции $p_X \colon X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$, и $p_Y \colon X \times Y \to Y$, $(x, y) \mapsto y$, являются непрерывными.*

Доказательство. Чтобы отображение p_X было непрерывным, необходимо объявить открытыми все подмножества вида $p_X^{-1}(U) = U \times Y$, где $U \subset X$ — открытое множество. Аналогично, чтобы отображение p_Y было непрерывным, необходимо объявить открытыми все подмножества вида $p_Y^{-1}(V) = X \times V$, где $V \subset Y$ открыто. Тогда пересечение $(U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V$ также должно быть открытым, а значит, должны быть открытыми и всевозможные объединения множеств вида $U \times V$. Таким образом, необходимо объявить открытыми все множества из топологии произведения. Это и означает, что топология произведения — самая грубая из топологий на $X \times Y$, относительно которых обе проекции непрерывны. □

Предложение 1.16 (универсальное свойство произведения)**.** *Пусть даны отображения $f \colon Z \to X$ и $g \colon Z \to Y$. Тогда существует единственное отображение*

$h\colon Z \to X \times Y$, такое, что $p_X \circ h = f$ и $p_Y \circ h = g$. Это выражается коммутативной диаграммой:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& X \times Y \arrow[r, "p_X"'] \arrow[d, "p_Y"] & X \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Формула $h(z) := (f(z), g(z))$ однозначно определяет отображение h. Проверка его непрерывности остаётся в качестве упражнения. $\square$

Данное универсальное свойство определяет понятие *категорного произведения*. Тем самым топология произведения задаёт категорное произведение в категории топологических пространств.

Аналогично определяется произведение конечного числа пространств $X_1 \times \ldots \times X_n$. Базой топологии произведения являются множества вида $U_1 \times \ldots \times U_n$, где $U_i \subset X_i$ открыто. Однако при определении топологии произведения бесконечного числа пространств имеется тонкость.

Конструкция 1.17 (топология бесконечного произведения)**.** Пусть $\{X_i \colon i \in I\}$ — набор пространств, проиндексированных элементами множества I. По определению элементами *декартова произведения* $\prod_{i\in I} X_i$ являются *функции выбора* $i \mapsto x_i$, сопоставляющие каждому элементу $i \in I$ элемент $x_i \in X_i$. Если I — счётное множество (множество натуральных чисел), то элементами бесконечного произведения $\prod_{i\in I} X_i$ являются бесконечные последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$, $x_i \in X_i$.

Можно было бы определить топологию на $\prod_{i\in I} X_i$, взяв в качестве базы всевозможные произведения вида $\prod_{i\in I} U_i$, где $U_i \subset X_i$ открыто. Однако в такой топологии будет слишком много открытых множеств, и поэтому она не будет обладать универсальным свойством относительно всех проекций $\prod_{i\in I} X_i \to X_i$.

Действительно, чтобы проекция $p_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ была непрерывной, нужно объявить открытыми все подмножества произведения вида $p_i^{-1}(U_i) = \prod_{j\in I} Y_j$, где $Y_j = X_j$ при $j \ne i$ и $Y_i = U_i$ — открытое множество в X_i (на i-м месте в произведении стоит U_i, а на остальных местах — X_j). Взяв конечные пересечения таких множеств, мы получим подмножества вида $\prod_{i\in I} U_i$, где $U_i \subset X_i$ открыто и *лишь конечное число U_i отлично от X_i*. Набор таких множеств образует базу топологии, которая является самой грубой из всех топологий на $\prod_{i\in I} X_i$, относительно которых все проекции $p_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ непрерывны. Эта топология и называется *топологией произведения* $\prod_{i\in I} X_i$. Она обладает универсальным свойством: для любого набора непрерывных отображений $Z \to X_i$, $i \in I$, существует единственное непрерывное отображение $Z \to \prod_{i\in I} X_i$, композиция которого с проекциями даёт исходные отображения $Z \to X_i$.

Если же в $\prod_{i\in I} X_i$ объявить открытыми *всевозможные* произведения $\prod_{i\in I} U_i$, где $U_i \subset X_i$ открыто, то для такой топологии отображение $Z \to \prod_{i\in I} X_i$, задаваемое непрерывными отображениями $Z \to X_i$, может уже не быть непрерывным: прообраз открытого множества $\prod_{i\in I} U_i$ может не быть открытым в Z.

Обобщением произведения является понятие декартова квадрата.

Конструкция 1.18 (декартов квадрат)**.**

(1)
$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& X \times_A Y \arrow[r, "p_X"'] \arrow[d, "p_Y"] & X \arrow[d, "r"] \\
& Y \arrow[r, "s"] & A
\end{tikzcd}$$

Квадратная диаграмма в нижней правой части рисунка называется *декартовым квадратом*, если она обладает универсальным свойством, описываемым рисунком. Пространство $X \times_A Y$ называется *расслоенным произведением* (или *коамальгамой*, в английской терминологии *pullback*) пространств X и Y с заданными отображениями $r\colon X \to A$ и $s\colon Y \to A$.

Таким образом, расслоенное произведение $X \times_A Y$ — это такое пространство с заданными отображениями $p_X\colon X \times_A Y \to X$ и $p_Y\colon X \times_A Y$, что $r \circ p_X = s \circ p_Y$ и для любого пространства Z с отображениями $f\colon Z \to X$ и $g\colon Z \to Y$, удовлетворяющими условию $r \circ f = s \circ g$, существует единственное отображение $h\colon Z \to X \times_A Y$, для которого $p_X \circ h = f$ и $p_Y \circ h = g$.

Существование декартова квадрата (расслоенного произведения) доказывается предъявлением явной конструкции пространства $X \times_A Y$, использующей индуцированную топологию и топологию произведения:

$$X \times_A Y = \{(x, y) \in X \times Y : r(x) = s(y)\}.$$

Проверка универсального свойства остаётся в качестве упражнения.

Обращение стрелок приводит к двойственной конструкции копроизведения и *кодекартова квадрата*.

Конструкция 1.19 (кодекартов квадрат и копроизведение)**.**

(2)
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "s"] & X \arrow[d, "i_X"'] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\
Y \arrow[r, "i_Y"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X \cup_A Y \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

Пространство $X \cup_A Y$ называется *склейкой* (или *амальгамой*, в англ. терминологии *pushout*) пространств X и Y с заданными отображениями $r\colon A \to X$ и $s\colon A \to Y$.

Явная конструкция пространства $X \cup_A Y$ использует фактор-топологию:

$$X \cup_A Y = X \sqcup Y/{\sim}\,, \quad \text{где } x \sim y, \text{ если } x = r(a) \text{ и } y = s(a) \text{ для некоторого } a \in A,$$

т. е. факторпространство берётся по минимальному отношению эквивалентности, содержащему все пары $(r(a), s(a))$. В частности, при $A = \varnothing$ получаем, что *копроизведением* пространств X и Y является их несвязное объединение $X \sqcup Y$.

1.4. **Топология на пространстве отображений.** *Предбазой* топологии $\mathcal{T}$ на X называется набор открытых подмножеств $U_i\colon i \in I$, порождающих $\mathcal{T}$ (т. е. $\mathcal{T}$ является самой грубой топологией, в которой все U_i открыты). Более явно, предбаза — это набор открытых множеств, совокупность всевозможных конечных пересечений которых образует базу.

Конструкция 1.20. Пусть X, Y — два фиксированных пространства. Рассмотрим множество всех непрерывных отображений $f\colon X \to Y$. Это множество обозначается $\mathcal{C}(X, Y)$ или Y^X. На нём можно ввести топологию следующим образом. Для каждого компактного подмножества $K \subset X$ и открытого множества $U \subset Y$ рассмотрим подмножество отображений

$$W(K, U) = \{f \in Y^X\colon f(K) \subset U\}.$$

Топология на Y^X, порождённая набором всевозможных подмножеств $W(K, U)$ (т.е. для которой подмножества $W(K, U)$ образуют предбазу), называется *компактно-открытой топологией*. Далее будем предполагать, что на Y^X всегда введена компактно-открытая топология.

Предложение 1.21. *Если X — конечное множество (с дискретной топологией), то топология на Y^X совпадает с топологией произведения $\prod_{x\in X} Y$.*

Доказательство. Любое подмножество $K \subset X$ является компактным. Каждое множество $W(K, U)$ является конечным пересечением $\bigcap_{x\in K} W(x, U)$, а множества $W(x, U)$ порождают топологию конечного произведения $\prod_{x\in X} Y$. □

Если X — компактное пространство, а (Y, ρ) — метрическое пространство, то пространство $\mathcal{C}(X, Y)$ метризуемо с метрикой

$$\rho(f, g) = \max_{x\in X}\{\rho(f(x), g(x))\}.$$

Можно доказать (задача), что эта метрика индуцирует на $\mathcal{C}(X, Y)$ компактно-открытую топологию.

Задачи и упражнения.

1.22. Докажите, что подмножество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

1.23. Докажите, что в хаусдорфовом пространстве точки являются замкнутыми множествами.

1.24. Покажите, что оба условия на пространства в теореме 1.4 являются необходимыми. А именно, приведите пример непрерывного взаимно однозначного отображения $f\colon X \to Y$, которое не является гомеоморфизмом, при каждом из следующих дополнительных ограничений:

а) X компактно;
б) Y хаусдорфово.

1.25. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *собственным*, если прообразы компактных подмножеств компактны. Докажите, что отображение $f\colon X \to Y$ компактного пространства X в хаусдорфово пространство Y собственно.

1.26. Пусть $i\colon A \to X$ — открытое инъективное отображение. Докажите, что A гомеоморфно пространству $i(A)$ с топологией, индуцированной из X. (Говорят, что открытое инъективное отображение является вложением.) Докажите то же для замкнутого инъективного отображения. (Непрерывное отображение называется *замкнутым*, если образ замкнутого множества замкнут.)

1.27. Пусть $p\colon X \to B$ — открытое сюръективное отображение. Докажите, что B гомеоморфно факторпространству $X/\sim$ по отношению эквивалентности, при котором $x_1 \sim x_2$ тогда и только тогда, когда $p(x_1) = p(x_2)$. (Говорят, что открытое сюръективное отображение является факторотображением). Докажите то же для замкнутого сюръективного отображения.

1.28. Докажите, что индуцированная топология на $A \subset X$ является самой грубой из всех топологий, для которых отображение $A \hookrightarrow X$ непрерывно.

1.29. Докажите, что фактортопология на $X/\sim$ является самой тонкой из всех топологий, для которых отображение $X \to X/\sim$ непрерывно.

1.30. Докажите, что если $A \subset X$ и X/A хаусдорфово, то A замкнуто. Однако X/A может быть не хаусдорфовым, даже если X хаусдорфово, а $A \subset X$ замкнуто.

1.31. Опишите пространство орбит $\mathbb{R}^2/SO(2)$ действия группы поворотов на плоскости.

1.32. Докажите, что факторпространство $[0,1]/\{0,1\}$ отрезка по его границе гомеоморфно окружности.

1.33. Завершите доказательство предложения 1.16 (проверьте непрерывность построенного там отображения).

1.34. Докажите, что произведение конечного числа компактных пространств компактно. Соответствующее утверждение в случае бесконечного числа пространств известно как *теорема Тихонова.* Теорема Тихонова эквивалентна аксиоме выбора.

1.35. Докажите, что канторово множество (т. е. множество чисел из отрезка $[0,1]$, которые не содержат 1 в троичной записи) гомеоморфно произведению счётного числа дискретных пространств $\{0,1\}$.

1.36. Докажите, что множество иррациональных вещественных чисел гомеоморфно произведению счётного числа множеств натуральных чисел.

1.37. Пусть $\widetilde{\mathbb{R}}^\infty$ — множество бесконечных последовательностей вещественных чисел (декартово произведение счётного числа вещественных прямых) с топологией, в которой базой открытых множеств являются всевозможные бесконечные произведения интервалов. Докажите, что в этой топологии диагональное отображение $\mathbb{R} \to \widetilde{\mathbb{R}}^\infty$, $x \to (x, x, \ldots)$, не является непрерывным. Это означает, в частности, что топология $\widetilde{\mathbb{R}}^\infty$ отличается от топологии произведения $\mathbb{R}^\infty$.

1.38. Рассмотрим подмножество $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1})$ вещественной прямой с индуцированной топологией. Гомеоморфно ли пространство X несвязному объединению бесконечного числа интервалов?

1.39. Проверьте универсальные свойства расслоенного произведения $X \times_A Y$ и склейки $X \cup_A Y$.

1.40. Что является произведением, копроизведением и кодекартовым квадратом в категориях групп и абелевых групп?

1.41. Верно ли предложение 1.21 для произвольного пространства X?

1.42. Докажите, что если X — компактное пространство, а (Y, ρ) — метрическое пространство, то формула

$$\rho(f, g) = \max_{x \in X} \{\rho(f(x), g(x))\}$$

задаёт метрику на множестве непрерывных отображений $\mathcal{C}(X, Y)$, и эта метрика индуцирует компактно-открытую топологию.

1.43. Докажите, что имеет место гомеоморфизм

$$\mathcal{C}(X, Y \times Z) \cong \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Z), \qquad \text{или} \qquad (Y \times Z)^X \cong Y^X \times Z^X.$$

1.44. Пространство Y называется *локально компактным*, если для каждой точки $y \in Y$ найдётся окрестность, замыкание которой компактно. Докажите, что если Y хаусдорфово и локально компактно, то отображение композиции

$$\varphi \colon \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f,$$

непрерывно. В частности, *отображение вычисления*

$$e \colon Y \times \mathcal{C}(Y, Z) \to Z, \qquad (y, f) \mapsto f(y)$$

непрерывно.

1.45 (экспоненциальный закон)**.** Определено каноническое отображение

$$\Phi \colon \mathcal{C}(X \times Y, Z) \to \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)), \qquad \text{или} \qquad \Phi \colon Z^{X \times Y} \to (Z^Y)^X,$$

при котором отображение $f \colon X \times Y \to Z$ переходит в отображение $\Phi(f) \colon X \to \mathcal{C}(Y, Z)$, переводящее $x \in X$ в отображение $y \mapsto f(x, y)$. Докажите, что если X хаусдорфово, то отображение Φ непрерывно. Если в дополнение к этому Y хаусдорфово и локально компактно, то Φ — гомеоморфизм. (Если эта задача покажется сложной, доказательство можно найти в [ВИНХ, 25.Vx].)

2. Операции над топологическими пространствами

2.1. **Конус, надстройка и джойн.** Символ I обозначает у нас единичный отрезок $[0, 1]$.

Цилиндром над X называется произведение $X \times I$; подпространства $X \times 1$ и $X \times 0$ называются *(верхним и нижним) основаниями* цилиндра.

Конус CX над X — это факторпространство цилиндра по его верхнему основанию: $CX = (X \times I)/(X \times 1)$. Образ основания $X \times 1$ называется *вершиной* конуса, а образ основания $X \times 0$ — *основанием* конуса.

Надстройкой ΣX над X называется факторпространство конуса по его основанию: $\Sigma X = CX/(X \times 0)$. (Обратите внимание, что это не то же самое, что факторпространство $(X \times I)/(X \times 1 \cup X \times 0)$.) Пространство X вкладывается в надстройку ΣX в качестве $X \times \frac{1}{2}$. По-другому надстройку можно определить как склейку двух конусов по их основаниям: $\varSigma X = CX \cup_X CX$; таким образом, мы имеем кодекартов квадрат

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"] & CX \arrow[d] \\ CX \arrow[r] & \varSigma X, \end{tikzcd}$$

где каждое из отображений i является вложением X на основание цилиндра.

Определим *n-мерный шар* как следующее подмножество в $\mathbb{R}^n$:

$$D^n = \bigl\{ \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1 \bigr\}$$

с индуцированной топологией. Аналогично определим *n-мерную сферу*

$$S^n = \bigl\{ \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1 \bigr\}.$$

Заметим, что при $n = 0$ сфера S^0 состоит из двух точек.

Предложение 2.1. *Имеют место гомеоморфизмы $CS^n \cong D^{n+1}$ и $\varSigma S^n \cong S^{n+1}$.*

Доказательство. Рассмотрим непрерывное отображение

$$S^n \times I \to D^{n+1}, \quad (x_1, \ldots, x_{n+1}, t) \mapsto ((1-t)x_1, \ldots, (1-t)x_{n+1}).$$

Оно переводит верхнее основание $S^n \times 1$ в точку $\mathbf{0} \in D^{n+1}$ и поэтому индуцирует непрерывное взаимно однозначное отображение $CS^n = (S^n \times I)/(S^n \times 1) \to D^{n+1}$. Так как CS^n — компактное пространство (как факторпространство произведения компактных пространств), а D^{n+1} — хаусдорфово (как подмножество хаусдорфова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$), данное отображение $CS^n \to D^{n+1}$ является гомеоморфизмом в силу теоремы 1.4.

Для доказательства второго гомеоморфизма рассмотрим отображение

$$D^n \to S^n, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \begin{cases} (\frac{x_1}{r} \sin \pi r, \ldots, \frac{x_n}{r} \sin \pi r, \cos \pi r), & \text{если } r \neq 0, \\ (0, \ldots, 0, 1), & \text{если } r = 0, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Это отображение взаимно однозначно на внутренности шара и переводит его границу S^{n-1} (где $r = 1$) в «южный полюс» $(0, \ldots, 0, -1) \in S^n$. Поэтому оно индуцирует гомеоморфизм $D^n / S^{n-1} \xrightarrow{\cong} S^n$ в силу теоремы 1.4.

Теперь требуемый гомеоморфизм получается как композиция гомеоморфизмов

$$\varSigma S^n = CS^n / (S^n \times 0) \xrightarrow{\cong} D^{n+1} / S^n \xrightarrow{\cong} S^{n+1},$$

построенных выше. $\square$

Джойн (или *соединение*) $X * Y$ пространств X и Y удобно представлять себе как объединение отрезков, соединяющих каждую точку пространства X с каждой точкой пространства Y. Формально джойн определяется как факторпространство

$$X * Y = X \times Y \times I / \; (x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0), \; (x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1)$$

при любых $x, x_1, x_2 \in X$ и $y, y_1, y_2 \in Y$. Произведение $X \times Y$ вкладывается в джойн в качестве $X \times Y \times \frac{1}{2}$.

Из сравнения определений надстройки и джона получаем, что $S^0 * X \cong \varSigma X$. В частности, $S^0 * S^k \cong S^{k+1}$. Имеет место более общий факт: $S^k * S^l \cong S^{k+l+1}$ (задача).

2.2. **Пространства с отмеченной точкой.** В теории гомотопий часто имеют дело с категорией *пространств с отмеченными точками*, объектами которой являются пары (X, x_0), состоящие из пространства X и точки $x_0 \in X$, а морфизмами $(X, x_0) \to (Y, y_0)$ — отображения, сохраняющие отмеченные точки, т. е. непрерывные отображения $f\colon X \to Y$ с условием $f(x_0) = y_0$. При этом операции, описанные выше, видоизменяются следующим образом.

Произведением пространств с отмеченными точками (X, x_0) и (Y, y_0) называется пространство $X \times Y$ с отмеченной точкой (x_0, y_0). В *конусе* и *надстройке* над (X, x_0) дополнительно стягивается подпространство $x_0 \times I$, т. е.

$$C(X, x_0) = X \times I/(X \times 1 \cup x_0 \times I), \quad \Sigma(X, x_0) = CX/(X \times 0 \cup x_0 \times I).$$

При этом стянутое подпространство объявляется отмеченной точкой. В *джойне* $(X, x_0) * (Y, y_0)$ дополнительно стягивается подпространство $x_0 \times y_0 \times I$.

Мы часто будем говорить о пространстве X с отмеченной точкой, имея в виду пару (X, x_0). Если из контекста ясно, что рассматриваются пространства с отмеченными точками, то для конуса, надстройки и джойна бы будем использовать стандартные обозначения CX, ΣX, $X * Y$, имея в виду $C(X, x_0)$, $\Sigma(X, x_0)$ и $(X, x_0) * (Y, y_0)$.

Если $X = (X, x_0)$ и $Y = (Y, y_0)$ — пространства с отмеченными точками, то подпространство отображений, сохраняющих отмеченные точки, обозначается $\mathcal{C}_*(X, Y)$.

Имеются следующие две дополнительные операции над пространствами с отмеченными точками.

Букетом пространств с отмеченными точками X и Y называется пространство $X \vee Y$, получаемое склейкой X и Y по отмеченным точкам x_0 и y_0:

$$X \vee Y = X \sqcup Y/(x_0 \sim y_0).$$

Букет $X \vee Y$ естественным образом вкладывается в произведение $X \times Y$ в качестве подпространства $X \times y_0 \cup x_0 \times Y$; при этом отмеченная точка букета переходит в (x_0, y_0). Букет является копроизведением в категории пространств с отмеченными точками (упражнение).

Приведённым произведением (или *смэш-произведением*) пространств с отмеченными точками X и Y называется пространство $X \wedge Y$, получаемое факторизацией произведения $X \times Y$ по вложенному букету $X \vee Y$:

$$X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y) = (X \times Y)/(X \times y_0 \cup x_0 \times Y).$$

2.3. **Пространства путей и петель.** *Путём* в пространстве X называется отображение $\varphi\colon I \to X$; точка $\varphi(0)$ называется *началом*, а $\varphi(1)$ — *концом* пути φ. *Петлёй* называется путь φ, начинающийся и заканчивающийся в одной точке, т. е. $\varphi(0) = \varphi(1)$.

Пространство X, любые две точки которого можно соединить путём, называется *линейно связным*. Линейно связное пространство связно, но обратное верно не всегда. Примером связного, но не линейно связного пространства является объединение вертикального отрезка $[-1, 1]$ на оси ординат и положительной части графика функции $y = \sin\frac{1}{x}$ с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}^2$.

Пусть $X = (X, x_0)$ — пространство с отмеченной точкой. *Пространством путей* на X называется пространство $PX = \mathcal{C}_*(I, X)$, состоящее из путей, начинающихся в отмеченной точке x_0 (отмеченной точкой отрезка считается 0). *Пространством* *петель* на X называется подпространство $\Omega X \subset PX$, состоящее из путей, начинающихся и заканчивающихся в отмеченной точке x_0. Пространство петель ΩX можно также определить как пространство отображений $\mathcal{C}_*(S^1, X)$, сохраняющих отмеченные точки. Отмеченной точкой пространства ΩX является постоянная петля ε, $\varepsilon(t) = x_0$.

Теорема 2.2. *Для пространств с отмеченными точками X и Y, где X хаусдорфово, имеет место естественный гомеоморфизм*

$$\mathcal{C}_*(\Sigma X, Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}_*(X, \Omega Y),$$

переводящий отображение $f\colon \Sigma X \to Y$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$, в отображение $X \to \Omega Y$, $x \mapsto \varphi_x$, где φ_x — петля $I \to Y$, $t \mapsto f(x,t)$.

Доказательство. Согласно экспоненциальному закону (задача 1.45) имеем гомеоморфизм

$$\mathcal{C}(X \times I, Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(I, Y)).$$

При этом подпространство $\mathcal{C}_*(\Sigma X, Y) \subset \mathcal{C}(X \times I, Y)$, состоящее из отображений $f\colon X \times I \to Y$, для которых $f(x,0) = f(x,1) = f(x_0,t) = y_0$, переходит в подпространство $\mathcal{C}_*(X, \Omega Y) \subset \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(I,Y))$ отображений, переводящих X в петли с началом y_0 и переводящих x_0 в постоянную петлю.

Естественность по X и Y означает, что для отображений $X' \to X$ и $Y \to Y'$, сохраняющих отмеченные точки, существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_*(\Sigma X, Y) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathcal{C}_*(X, \Omega Y) \arrow[d] \\
\mathcal{C}_*(\Sigma X', Y') \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{C}_*(X', \Omega Y').
\end{tikzcd}$$

Детали остаются в качестве упражнения. □

Задачи и упражнения.

2.3. Докажите, что $S^k * S^l \cong S^{k+l+1}$ и $S^k \wedge S^l \cong S^{k+l}$.

2.4. Докажите, что букет является копроизведением в категории пространств с отмеченными точками, т. е. для него имеет место универсальное свойство

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "i_X"'] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\
Y \arrow[r, "i_Y"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X \vee Y \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
 & & Z,
\end{tikzcd}$$

где все стрелки являются отображениями пространств с отмеченными точками.

2.5. Докажите, что линейно связное пространство связно. Приведите пример связного, но не линейно связного пространства.

3. Гомотопии и гомотопические эквивалентности

Два отображения $f, g\colon X \to Y$ между пространствами X и Y называются *гомотопными* (обозначение: $f \simeq g$), если существует такое отображение $F\colon X \times I \to Y$, что $F(x,0) = f(x)$ и $F(x,1) = g(x)$ для любого $x \in X$. Отображение F называется *гомотопией* между f и g. Для каждого $t \in I$ будем обозначать через F_t отображение $X \to Y$, $x \mapsto F(x,t)$.

Предложение 3.1. *Гомотопия является отношением эквивалентности между отображениями.*

Доказательство. Для отображений $f, g, h\colon X \to Y$ мы имеем $f \simeq f$ посредством гомотопии $F(x,t) = f(x)$. Если $f \simeq g$ посредством гомотопии F, то $g \simeq f$ посредством гомотопии $\overline{F}$, где $\overline{F}(x,t) = F(x, 1-t)$. Наконец, если $f \simeq g$ посредством гомотопии F и $g \simeq h$ посредством гомотопии G, то $f \simeq h$ посредством гомотопии H, где

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ G(x,2t-1) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \qquad \square$$

Множество классов гомотопных отображений из X в Y обозначается $[X, Y]$.

Мы также будем использовать термин *гомотопия отображения* $f\colon X \to Y$ для отображения $F\colon X \times I \to Y$, удовлетворяющего условию $F(x,0) = f(x)$. В этом случае для каждого $t \in I$ мы будем использовать обозначение f_t для отображения $X \to Y$, $x \mapsto F(x,t)$. При этом $f_0 = f$. Таким образом, гомотопия отображения f — это его деформация с параметром $t \in [0,1]$.

Замечание. Если пространство X хаусдорфово и локально компактно, то имеем гомеоморфизм

$$\mathcal{C}(I \times X, Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(I, \mathcal{C}(X,Y)).$$

Таким образом, в этом случае гомотопию можно рассматривать как путь в пространстве отображений $\mathcal{C}(X,Y)$, а множество классов гомотопных отображений $[X,Y]$ является множеством классов линейной связности пространства $\mathcal{C}(X,Y)$.

Два пространства X и Y *гомотопически эквивалентны* (обозначение: $X \simeq Y$), если существуют такие отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$, что композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ гомотопны тождественным отображениям $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ и $\mathrm{id}_Y\colon Y \to Y$ соответственно. Гомотопическая эквивалентность является отношением эквивалентности на пространствах, и *гомотопическим типом* пространства X называется класс пространств, гомотопически эквивалентных X.

Пространство X *стягиваемо*, если оно гомотопически эквивалентно точке.

Пример 3.2. Единичный шар $D^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon |\boldsymbol{x}| \leqslant 1\}$ стягиваем. Действительно, рассмотрим отображение в точку $f\colon D^n \to pt$ и отображение $g\colon pt \to D^n$, переводящее точку в $\mathbf{0} \in D^n$. Тогда $f \circ g\colon pt \to pt$ есть тождественное отображение, а $g \circ f\colon D^n \to D^n$ переводит каждую точку $\boldsymbol{x} \in D^n$ в $\mathbf{0}$. Гомотопия между $g \circ f$ и $\mathrm{id}\colon D^n \to D^n$ задаётся отображением $F\colon D^n \times I \to D^n$, $(\boldsymbol{x}, t) \mapsto t\boldsymbol{x}$.

Задачи и упражнения.

3.3. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^n$ стягиваемо, а $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}$ гомотопически эквивалентно сфере S^{n-1}.

3.4. Докажите, что надстройка над тором $S^1 \times S^1$ гомотопически эквивалентна букету сфер, и опишите этот букет.

3.5. Пусть X — дополнение к 3 координатным осям в $\mathbb{R}^3$. Докажите, что X гомотопически эквивалентно букету окружностей, и найдите число окружностей в букете.

3.6. Пусть X — дополнение к 3 координатным осям в $\mathbb{C}^3$. Докажите, что X гомотопически эквивалентно букету сфер $S^3 \vee S^3 \vee S^3 \vee S^4 \vee S^4$.

4. Клеточные пространства

4.1. **Определение и примеры.** *Клеточным пространством* (*клеточным комплексом*, *CW-комплексом*) называется хаусдорфово топологическое пространство X, представленное в виде объединения $\bigcup_{q=0}^{\infty} \bigcup_{i \in \mathcal{I}} e_i^q$ попарно непересекающихся подмножеств e_i^q, называемых *клетками*, таким образом, что для каждой клетки e_i^q существует отображение $\varPhi_i\colon D^q \to X$, называемое *характеристическим отображением* клетки e_i^q, ограничение которого на внутренность шара $\operatorname{int} D^q$ есть гомеоморфизм на e_i^q. При этом предполагаются выполненными следующие аксиомы:

(C) граница $\bar{e}_i^q \setminus e_i^q$ клетки e_i^q содержится в объединении конечного числа клеток размерности $< q$;

(W) подмножество $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любой клетки e_i^q замкнуто пересечение $Y \cap \bar{e}_i^q$.

Объединение клеток размерности $\leqslant n$ в клеточном пространстве X называется *n-м остовом* пространства X и обозначается через $\operatorname{sk}^n X$ или X^n.

Можно проверить (задача) эквивалентность следующих свойств для подмножества клеточного пространства X:

- подмножество $A \subset X$ замкнуто (соответственно открыто);
- пересечение $A \cap X^n$ замкнуто (соответственно открыто) для любого n;
- прообраз $\varPhi_i^{-1}(A)$ при характеристическом отображении $\varPhi_i\colon D^q \to X$ любой клетки e_i^q замкнут (соответственно открыт) в D^q.

Отсюда вытекает, что отображение $X \to Y$ из клеточного пространства X непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все его ограничения $X^n \to Y$ на остовы.

Замечание. Буквы «C» и «W» происходят из английской терминологии «closure finite» и «weak topology», восходящей к Дж. Уайтхеду. Последнее из приведённых выше свойств означает, что топология, описываемая аксиомой (W), является самой тонкой (самой слабой в терминологии Уайтхеда) из топологий на X, по отношению к которым все характеристические отображения непрерывны.

Конструкция 4.1 (приклеивание клеток)**.** Скажем, что клеточное пространство Z получается из клеточного пространства Y *приклеиванием n-мерной клетки* при помощи отображения $\varphi\colon S^{n-1} \to Y^{n-1}$, если Z входит в кодекартов квадрат

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
D^n \arrow[r] & Z,
\end{tikzcd}$$

где левая вертикальная стрелка вкладывает сферу в границу ∂D^n шара. Таким образом, Z — факторпространство объединения $Y \sqcup D^n$ при отождествлениях $x \sim \varphi(x)$ для $x \in S^{n-1} = \partial D^n$. Как множество, Z представляет собой объединение Y и внутренности шара D^n — n-мерной клетки. Мы будем использовать обозначение $Z = Y \cup_\varphi D^n$.

Имеется другой, индуктивный подход к определению клеточного пространства. Клеточное пространство X определяется как результат последовательного приклеивания клеток к дискретному пространству X^0 (или пустому множеству $X^{-1} = \varnothing$). На n-м шаге этой индуктивной процедуры мы получаем n-мерный остов X^n из $(n-1)$-мерного X^{n-1}, приклеивая n-мерные клетки e_i^n посредством отображений $\varphi_i \colon S^{n-1} \to X^{n-1}$. Топология на объединении $X = \bigcup_n X^n$ вводится следующим образом: подмножество $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда пересечение $Y \cap X^n$ замкнуто для любого n. Это обеспечивает выполнение аксиомы (W) для пространства X. Необходимо также проверить хаусдорфовость и выполнение аксиомы (C). Это остаётся в качестве задач.

Клеточным подпространством клеточного пространства X называется замкнутое подмножество, которое является объединением клеток из X. Каждый остов X^n клеточного пространства X является клеточным подпространством.

Клеточное пространство называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа клеток, и *локально конечным*, если каждая его точка вместе с некоторой окрестностью принадлежит конечному подпространству.

Отображение $f \colon X \to Y$ клеточных пространств называется *клеточным*, если $f(X^n) \subset Y^n$ для всех n.

Приведём примеры разбиений на клетки, которые не являются клеточными пространствами из-за невыполнения одной из аксиом (C) или (W).

Пример 4.2.

1. Конечное разбиение на клетки может не быть хаусдорфовым. Действительно, рассмотрим нехаусдорфово пространство X, получаемое из двух экземпляров единичного отрезка отождествлением точек с одинаковыми координатами, за исключением нулевых концов:

$$X = (I_1 \sqcup I_2)/\sim, \quad \text{где } t_1 \sim t_2, \text{ если } t_1 = t_2 > 0.$$

При этом неотождествлённые нулевые концы 0_1 и 0_2 не имеют непересекающихся окрестностей в X. Разобьём X на клетки: концы 0_1, 0_2, 1 и внутренность отрезка. В качестве характеристического отображения одномерной клетки возьмём вложение $I_1 \hookrightarrow X$. Это конечное разбиение удовлетворяет аксиоме (W). При этом подмножество $I_1 = X \setminus 0_2$ незамкнуто, но его прообразы при всех характеристических отображениях клеток замкнуты. Поэтому данная топология на X не является самой тонкой из топологий, по отношению к которым все характеристические отображения непрерывны.

2. Разбиение диска D^2 на его внутренность и отдельные точки граничной окружности удовлетворяет аксиоме (W), но не удовлетворяет аксиоме (C).

3. Пусть X — множество, получаемое из счётного семейства единичных отрезков $\{I_k \colon k = 1, 2, \ldots\}$ отождествлением всех их нулевых концов. На X естественным образом вводится топология, происходящая из метрики: расстояние между точками $t \in I_k$ и $s \in I_l$ равно $|s-t|$, если $k = l$, и равно $t + s$, если $k \neq l$. Разбиение пространства X на внутренности отрезков и оставшиеся точки удовлетворяет аксиоме (C), но

не (W): последовательность точек $\frac{1}{k} \in I_k$ сходится к 0, т. е. является незамкнутым множеством, но её пересечение с замыканием любой клетки состоит из одной точки и потому замкнуто.

Другой способ введения топологии на том же множестве — топология бесконечного букета $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$, т. е. топология факторпространства бесконечного объединения $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k$ по объединению нулевых концов $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} 0_k$. Букет $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$ является клеточным пространством относительно разбиения на внутренности отрезков и оставшиеся точки; аксиома (W) здесь следует из определения фактортопологии. Однако в этой топологии больше замкнутых множеств (она слабее в терминологии Уайтхеда), чем в метрической топологии на том же множестве, описанной выше. Можно доказать (задача), что топология бесконечного букета $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$ не происходит ни из какой метрики. В частности, $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$ нельзя вложить в $\mathbb{R}^n$ ни для какого n.

Конструкция 4.3 (факторпространства и произведения)**.** Пусть X, Y — клеточные пространства. Рассмотрим разбиение произведения $X \times Y$ на клетки вида $e \times e'$, где e — клетка в X, а e' — клетка в Y. Если хотя бы одно из пространств X, Y локально конечно, то это разбиение на клетки задаёт на $X \times Y$ структуру клеточного пространства. Если же пространства X и Y не являются локально конечными, то данное разбиение произведения $X \times Y$ на клетки может не удовлетворять аксиоме (W) относительно топологии произведения. Эта проблема возникает, например, в случае бесконечных букетов отрезков (задача). В этом случае топологию произведения $X \times Y$ необходимо ослабить (сделать тоньше).

Факторпространство клеточного пространства по клеточному подпространству само является клеточным пространством (задача). В частности, цилиндр, конус и надстройка над клеточным пространством — клеточные пространства.

Пример 4.4.

1. Сфера S^n имеет клеточное разбиение из двух клеток: точки $e^0 = (1, 0, \ldots, 0)$ и множества $e^n = S^n \setminus e^0$. Характеристическое отображение $D^n \to S^n$, соответствующее второй клетке, переводит границу шара в точку e^0. Например, можно взять отображение

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \begin{cases} (-\cos \pi r, \frac{x_1}{r} \sin \pi r, \ldots, \frac{x_n}{r} \sin \pi r), & \text{если } r \neq 0, \\ (-1, 0, \ldots, 0), & \text{если } r = 0, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

2. Другое клеточное разбиение сферы S^n состоит из $2n+2$ клеток $e^0_\pm, e^1_\pm, \ldots, e^n_\pm$: клетка $e^k_\pm$ состоит из точек $(x_0, \ldots, x_n) \in S^n$, у которых $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$ и $\pm x_k > 0$. Здесь замыкание каждой клетки гомеоморфно шару.

3. *Вещественное проективное пространство* $\mathbb{R}P^n$ определяется как множество проходящих через $\mathbf{0}$ прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$. Топология в $\mathbb{R}P^n$ вводится как фактортопология пространства $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbf{0}$ по отношению эквивалентности, при котором отождествляются точки, лежащие на одной прямой, проходящей через $\mathbf{0}$. Эта топология эквивалентна топологии, происходящей из угловой метрики: расстояние между прямыми равно углу между ними (задача).

Координаты $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ направляющего вектора прямой (определённые с точностью до пропорциональности) называются *однородными координатами* точки из $\mathbb{R}P^n$; при этом используется обозначение $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$. Точки, у которых

i-я координата отлична от 0 составляют i-ю *аффинную карту*

$$U_i = \{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{R}P^n \colon x_i \neq 0\}.$$

Отображение

$$U_i \to \mathbb{R}^n, \quad [x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \mapsto \left(\tfrac{x_0}{x_i}, \ldots, \tfrac{x_{i-1}}{x_i}, \tfrac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \tfrac{x_n}{x_i}\right)$$

определяет гомеоморфизм аффинной карты на $\mathbb{R}^n$ и задаёт в ней координаты.

Имеется отображение $S^n \to \mathbb{R}P^n$, которое переводит точку сферы в прямую, проходящую через эту точку и $\mathbf{0}$. При этом диаметрально противоположные точки сферы переходят в одну прямую. Таким образом, $\mathbb{R}P^n$ получается из S^n отождествлением диаметрально противоположных точек. Верхняя полусфера $S^n_{\geqslant} = \{\boldsymbol{x} \in S^n \colon x_n \geqslant 0\}$ гомеоморфна шару D^n (посредством отображения проекции, забывающего последнюю координату). Сужение отображения $S^n \to \mathbb{R}P^n$ на $S^n_{\geqslant}$ задаёт отображение $D^n \to \mathbb{R}P^n$, при котором в одну точку отображаются только диаметрально противоположные точки граничной сферы $S^{n-1} \subset D^n$.

При отображении $S^n \to \mathbb{R}P^n$ клетки e^k_+ и e^k_- разбиения сферы S^n из предыдущего примера склеиваются и получается разбиение пространства $\mathbb{R}P^n$ на $n+1$ клетку, по одной клетке e^k в каждой размерности $k \leqslant n$. Мы имеем

$$e^k = \{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{R}P^n \colon x_k \neq 0,\ x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\}.$$

Другими словами, $e^k = \mathbb{R}P^k \backslash \mathbb{R}P^{k-1}$, где пространства $\mathbb{R}P^k$ образуют цепочку вложений $pt = \mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \ldots \subset \mathbb{R}P^n$. Характеристическим отображением для клетки e^k является композиция $D^k \to \mathbb{R}P^k \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$ проекции и вложения.

4. Рассмотрим множество $\mathbb{R}^\infty$ *финитных* (т.е. нулевых, начиная с некоторого места) последовательностей $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ вещественных чисел. Множество $\mathbb{R}^\infty$ можно отождествить с бесконечным объединением $\bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{R}^n$ вложенных пространств $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \ldots$, где $\mathbb{R}^n$ вкладывается в $\mathbb{R}^\infty$ при помощи отображения

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots).$$

Топология в $\mathbb{R}^\infty$ вводится следующим правилом: подмножество $A \subset \mathbb{R}^\infty$ замкнуто тогда и только тогда, когда все пересечения $A \cap \mathbb{R}^n$ замкнуты в своих пространствах $\mathbb{R}^n$. Это самая тонкая топология, в которой все вложения $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$ непрерывны, она называется *топологией прямого предела*.

Бесконечномерная сфера S^∞ определяется как единичная сфера в пространстве $\mathbb{R}^\infty$. Мы имеем $S^\infty = \bigcup_{n=1}^\infty S^n$ — бесконечное объединение вложенных сфер $S^1 \subset S^2 \subset S^3 \subset \ldots$.

Бесконечномерное вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^\infty$ — это объединение вложенных проективных пространств $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3 \subset \ldots$. Эквивалентным образом, $\mathbb{R}P^\infty$ — это множество проходящих через $\mathbf{0}$ прямых в $\mathbb{R}^\infty$. Пространство $\mathbb{R}P^\infty$ получается из S^∞ отождествлением диаметрально противоположных точек.

Клеточные разбиения сфер S^n и проективных пространств $\mathbb{R}P^n$ из двух предыдущих примеров дают клеточные разбиения пространств S^∞ и $\mathbb{R}P^\infty$. Первое разбиение имеет по две клетки e^k_+ и e^k_-, а второе — по одной клетке e^k в каждой размерности $k \geqslant 0$. При этом аксиома (W) для каждого из этих клеточных разбиений вытекает из определения топологии прямого предела.

5. *Комплексное проективное пространство* $\mathbb{C}P^n$ определяется как множество проходящих через $\mathbf{0}$ прямых в $\mathbb{C}^{n+1}$. Как и в случае $\mathbb{R}P^n$, на пространстве $\mathbb{C}P^n$ имеются

однородные координаты $[z_0 \colon z_1 \colon \ \dots : z_n]$ (определённые с точностью до умножения на ненулевое комплексное число), и $\mathbb{C}P^n$ покрывается $n+1$ аффинными картами, каждая из которых гомеоморфна пространству $\mathbb{C}^n$.

Рассмотрим единичную сферу

$$S^{2n+1} = \bigl\{(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \colon |z_0|^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\bigr\}.$$

Мы имеем отображение $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$, $(z_0, z_1, \dots, z_n) \mapsto [z_0 \colon z_1 \colon \ \dots : z_n]$, при котором прообразом точки $[z_0 \colon z_1 \colon \ \dots : z_n] \in \mathbb{C}P^n$ является окружность в S^{2n+1}, состоящая из точек $(z_0 z, z_1 z, \dots, z_n z)$ с $|z| = 1$.

Рассмотрим также шар

$$D^{2n} = \{(z_0, z_1, \dots, z_n) \in S^{2n+1} \colon z_n \in \mathbb{R}, z_n \geqslant 0\}.$$

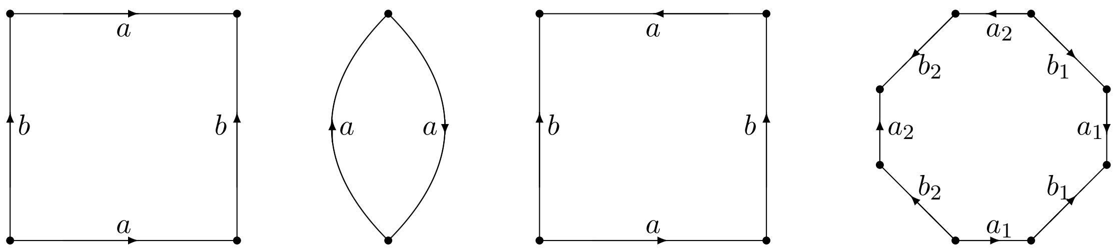
Тогда отображение $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ ограничивается до отображения $D^{2n} \to \mathbb{C}P^n$, которое взаимно однозначно на внутренности шара, а на границе S^{2n-1} происходит отождествление, описанное выше (окружности переходят в точки).

Это даёт разбиение $\mathbb{C}P^n$ на клетки

$$e^{2k} = \{[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}P^n \colon z_k \neq 0,\ z_{k+1} = \dots = z_n = 0\},$$

по одной в каждой чётной размерности $2k \leqslant 2n$, с характеристическими отображениями $D^{2k} \to \mathbb{C}P^k \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$.

6. Классические двумерные поверхности (сферы с ручками, проективные плоскости с ручками, бутылки Клейна с ручками) получаются путём отождествления рёбер на границе многоугольника. Это приводит к клеточным разбиениям поверхностей с одной двумерной клеткой.



а) Тор б) $\mathbb{R}P^2$ в) Бутылка Клейна г) Крендель

Рис. 1.

На рис. 1 а) изображено клеточное разбиение тора, получаемое отождествлением рёбер квадрата в соответствии с буквами и направлением стрелок. Это разбиение имеет одну 0-мерную клетку (в которую склеиваются все вершины), две 1-мерных клетки a и b и одну 2-мерную клетку (внутренность квадрата).

На рис. 1 б) изображено клеточное разбиение проективной плоскости с одной 0-мерной, одной 1-мерной и одной 2-мерной клетками. Это разбиение совпадает с разбиением из примера 3 при $n = 2$.

На рис. 1 в) изображено клеточное разбиение бутылки Клейна с одной 0-мерной, двумя 1-мерными и одной 2-мерной клетками.

На рис. 1 г) изображено клеточное разбиение сферы с двумя ручками (кренделя), получаемое отождествлением рёбер восьмиугольника. Оно содержит одну 0-мерную, четыре 1-мерные и одну 2-мерную клетки. Аналогично разбиение сферы с g ручками (также называемой *ориентируемой поверхностью рода* g) можно получить отождествлением рёбер $4g$-угольника. Такое разбиение имеет $2g$ одномерных клеток $a_1, \ldots, a_g$ и $b_1, \ldots, b_g$. Разбиение проективной плоскости с g ручками можно получить отождествлением рёбер $(4g+2)$-угольника, а разбиение бутылки Клейна с g ручками — отождествлением рёбер $(4g+4)$-угольника.

4.2. **Свойство продолжения гомотопии.** Подпространство A пространства X называется его *ретрактом*, если существует такое отображение $r\colon X \to X$, что $r(X) = A$ и $r|_A = \mathrm{id}$ (т. е. $r(a) = a$ для любого $a \in A$). Отображение r называется *ретракцией* пространства X на A; оно удовлетворяет соотношению $r^2 = r$ и является топологическим аналогом проектора.

Если ретракция $r\colon X \to X$, $r(X) = A$, гомотопна тождественному отображению, то A называется *деформационным ретрактом* пространства X. Если, сверх того, гомотопию $F\colon X \times I \to X$ между r и id можно сделать тождественной на A (т.е. $F(a,t) = a$ для любого $t \in I$), то A называется *строгим деформационным ретрактом* пространства X.

Пример 4.5.

1. Для любой точки $x_0 \in X$ подпространство $x_0 \times Y \cong Y$ является ретрактом произведения $X \times Y$. Ретракция $r\colon X \times Y \to X \times Y$ задаётся формулой $r(x,y) = (x_0, y)$.

2. Единичная окружность S^1 является строгим деформационным ретрактом пространства $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$. Ретракция $r\colon \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0} \to \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$ задаётся формулой $r(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$, а гомотопия между r и id — формулой $F(\boldsymbol{x},t) = t\boldsymbol{x} + (1-t)\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$.

Парой пространств называется пара (X,A), где X — пространство, а A — его подпространство. *Отображением пар* $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ называется такое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$, что $f(A) \subset B$. Например, отображение пространств с отмеченными точками является отображением пар $(X,x_0) \to (Y,y_0)$.

Говорят, что пара (X,A) обладает *свойством продолжения гомотопии* (homotopy extension property, HEP), если для любого отображения $f\colon X \to Z$ и такой гомотопии $F\colon A \times I \to Z$, что $F_0 = f|_A$, существует гомотопия $\widehat{F}\colon X \times I \to Z$, для которой $\widehat{F}_0 = f$ и $\widehat{F}|_{A\times I} = F$. Таким образом, (X,A) обладает свойством продолжения гомотопии, если любое отображение $X \times 0 \cup A \times I \to Z$ можно продолжить до отображения $X \times I \to Z$. Пара (X,A), удовлетворяющая свойству продолжения гомотопии, также называется *парой Борсука*, а отображение $A \to X$ — *корасслоением* (смысл последнего термина будет объяснён позже, в §8).

Предложение 4.6. *Пара (X,A) обладает свойством продолжения гомотопии тогда и только тогда, когда $X \times 0 \cup A \times I$ — ретракт пространства $X \times I$.*

Доказательство. Из свойства продолжения гомотопии следует, что тождественное отображение $\mathrm{id}\colon X \times 0 \cup A \times I \to X \times 0 \cup A \times I$ продолжается до отображения $X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$, а потому $X \times 0 \cup A \times I$ является ретрактом пространства $X \times I$.

Пусть теперь дана ретракция $r\colon X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$. Отображения $f\colon X \times 0 \to Z$ и $F\colon A \times I \to Z$ согласованы на $A \times 0$, а потому склеиваются в отображение $X \times 0 \cup_{A\times 0} A \times I \to Z$ (см. упражнение 1.39). Трудность может заключаться в том, что топология склейки $X \times 0 \cup_{A\times 0} A \times I$ (фактортопология несвязного объединения $X \times 0 \sqcup A \times I$) может отличаться от топологии, индуцированной вложением $X \times 0 \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$.

Если подмножество $A \subset X$ замкнуто, то топология склейки совпадает с индуцированной топологией. (Заметим, что подмножество $B \subset X \times 0 \cup A \times I$ замкнуто в топологии склейки тогда и только тогда, когда замкнуты $B \cap X \times 0$ и $B \cap A \times I$, а то же подмножество замкнуто в индуцированной топологии тогда и только тогда, когда найдётся замкнутое $B' \subset X \times I$, для которого $B = B' \cap (X \times 0 \cup A \times I)$.) Далее нам понадобится только этот случай. В общем случае можно доказать, что при наличии ретракции $r\colon X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$ топология склейки грубее индуцированной топологии, поэтому непрерывное отображение $X \times 0 \cup_{A\times 0} A \times I \to Z$ из склейки будет также непрерывно в индуцированной топологии. В результате получаем композицию

$$X \times I \xrightarrow{r} X \times 0 \cup A \times I \xrightarrow{f\cup F} Z,$$

которая задаёт требуемое продолжение гомотопии. □

Клеточной парой называется пара (X, A), где X — клеточное пространство, а A — его клеточное подпространство.

Теорема 4.7. *Клеточная пара (X, A) обладает свойством продолжения гомотопии.*

Доказательство. Мы докажем, что $X \times 0 \cup A \times I$ является ретрактом пространства $X \times I$; тогда результат будет следовать из предложения 4.6.

Ретракция $X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$ будет построена как композиция ретракций $r_n\colon X^n \times I \to X^n \times 0 \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$. Композиция здесь понимается в следующем смысле. Так как $X \times I = \bigcup_{n\geqslant 0} X^n \times I$, каждая точка $x \in X \times I$ лежит в $X^n \times I$ для некоторого n. Применив к x ретракцию r_n, мы попадём либо в $X^n \times 0 \cup A^n \times I \subset X \times 0 \cup A \times I$, либо в $X^{n-1} \times I$. В последнем случае мы применяем ретракцию $r_{n-1}\colon X^{n-1} \times I \to X^{n-1} \times 0 \cup (X^{n-2} \cup A^{n-1}) \times I$, в результате чего попадём либо в $X \times 0 \cup A \times I$, либо в $X^{n-2} \times I$, и так далее. В результате, последовательно применяя к $x \in X^n \times I$ ретракции r_n, r_{n-1}, …, r_0, мы попадём в $X \times 0 \cup A \times I$, так как $X^{-1} = \varnothing$. Получаемое отображение $X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$ будет непрерывно, так как оно непрерывно на каждом остове $X^n \times I$, где оно устроено как композиция конечного числа непрерывных ретракций. Этот процесс соответствует тому, что мы продолжаем гомотопию $A \times I \to Z$ до $X \times I \to Z$ последовательно по остовам, на n-м шаге продолжая гомотопию $(X^{n-1} \cup A) \times I \to Z$ до гомотопии $(X^n \cup A) \times I \to Z$.

Осталось построить ретракцию $r_n\colon X^n \times I \to X^n \times 0 \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$. Пространство X^n получается из $X^{n-1} \cup A^n$ добавлением всех n-мерных клеток, не лежащих в A. Таким образом, $X^n \times I$ получается из $X^n \times 0 \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$ приклеиванием экземпляров $D^n \times I$ вдоль $D^n \times 0 \cup \partial D^n \times I$ при помощи характеристических отображений n-мерных клеток. Так как характеристическое отображение $D^n \to X^n$ является гомеоморфизмом на внутренности шара, требуемая ретракция $r_n\colon X^n \times I \to X^n \times 0 \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$ получается применением отдельно для каждой n-мерной клетки стандартной ретракции $r\colon D^n \times I \to D^n \times 0 \cup \partial D^n \times I$ (цилиндр ретрагируется на объединение дна и стенки). Эту стандартную ретракцию можно задать центральной проекцией из точки $(\mathbf{0}, 2) \in D^n \times \mathbb{R}$. □

Теорема 4.8. *Если пара (X, A) удовлетворяет свойству продолжения гомотопии (например, если (X, A) — клеточная пара) и A стягиваемо, то отображение факторизации $q\colon X \to X/A$ является гомотопической эквивалентностью.*

Доказательство. Стягивание пространства A — это гомотопия между отображениями $\mathrm{id}\colon A \to A$ и $A \to pt$. Пусть $F_t\colon X \to X$ — продолжение этой гомотопии, причём $F_0 = \mathrm{id}$. Так как $F_t(A) \subset A$, определена гомотопия факторотображений $\widehat{F}_t\colon X/A \to X/A$, входящая в коммутативную диаграмму слева:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "F_t"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "q"] \\
X/A \arrow[r, "\widehat{F}_t"] & X/A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "q"] \\
X/A \arrow[r, "\widehat{F}_1"] \arrow[ur, "g"] & X/A
\end{tikzcd}
$$

При $t = 1$ мы имеем $F_1(A) = pt$, а значит, F_1 индуцирует отображение $g\colon X/A \to X$, причём $gq = F_1$, как на диаграмме справа. Кроме того, $qg = \widehat{F}_1$, так как $qg(\widehat{x}) = qgq(x) = qF_1(x) = \widehat{F}_1 q(x) = \widehat{F}_1(\widehat{x})$. Отображения $g\colon X/A \to X$ и $q\colon X \to X/A$ являются взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями, так как $gq = F_1 \simeq F_0 = \mathrm{id}$ посредством F_t и $qg = \widehat{F}_1 \simeq \widehat{F}_0 = \mathrm{id}$ посредством $\widehat{F}_t$. $\square$

Предложение 4.9. *Если пара (X, A) удовлетворяет свойству продолжения гомотопии, то $X/A \simeq X \cup CA$, где CA — конус над A.*

Доказательство. Если (X, A) удовлетворяет HEP, то пара $(X \cup CA, CA)$ также удовлетворяет HEP. Мы имеем $X/A = (X \cup CA)/CA \simeq X \cup CA$, где последняя гомотопическая эквивалентность вытекает из теоремы 4.8. $\square$

4.3. **Теорема о клеточной аппроксимации.** Если $A \subset X$ — подпространство, то *гомотопией относительно* A называется такая гомотопия $F_t\colon X \to Y$, что $F_t(a) = F_{t'}(a)$ для любых $t, t' \in I$ и $a \in A$ (т.е. гомотопия неподвижна на A).

Напомним, что оттображение $f\colon X \to Y$ клеточных пространств называется клеточным, если $f(X^n) \subset Y^n$ для всех n.

Теорема 4.10. *Любое отображение $f\colon X \to Y$ клеточных пространств гомотопно клеточному отображению. Если f уже является клеточным на клеточном подпространстве $A \subset X$, то можно выбрать гомотопию относительно A.*

Доказательство. Предположим по индукции, что $f\colon X \to Y$ уже клеточно на остове X^{n-1}, и пусть e^n — клетка в X. Замыкание $\overline{e}^n$ компактно в X, так как оно является образом характеристического отображения $D^n \to X$. Тогда $f(\overline{e}^n) \subset Y$ также компактно, а значит, $f(e^n)$ пересекает только конечное число клеток в Y (упражнение 4.13). Пусть ε^k — клетка самой высокой размерности, с которой пересекается $f(e^n)$. Можно считать, что $k > n$, так как иначе f уже клеточно на e^n. Ниже мы покажем, что существует такая деформация (гомотопия) отображения $f|_{X^{n-1} \cup e^n}$ относительно X^{n-1}, что образ клетки e^n при деформированном отображении не содержит некоторую точку $y \in \varepsilon^k$. Тогда можно деформировать отображение $f|_{X^{n-1} \cup e^n}$ относительно X^{n-1} так, чтобы образ клетки e^n вообще не пересекал клетку ε^k. Для этого нужно взять композицию с деформационной ретракцией пространства $Y^k \setminus y$ на $Y^k \setminus \varepsilon^k$. Такая деформационная ретракция существует, так как существует деформационная ретракция $D^k \setminus x \to \partial D^k$ для $x \in \operatorname{int} D^k$, а характеристическое отображение $D^k \to Y$ клетки ε^k является гомеоморфизмом на $\operatorname{int} D^k$. Повторяя этот процесс конечное число раз, мы добьёмся того, чтобы множество $f(e^n)$ не пересекало ни одну клетку размерности больше n. Делая это для всех n-мерных клеток и оставляя при этом отображение неподвижным на n-мерных клетках из A, где оно уже клеточное, мы получим гомотопию отображения $f|_{X^n}$ относительно $X^{n-1} \cup A^n$ в клеточное отображение. Далее мы пользуемся теоремой 4.7, чтобы продолжить эту гомотопию $X^n \times I \to Y$ вместе с постоянной гомотопией на A до гомотопии на всём пространстве X, т. е. применим свойство продолжения гомотопии к паре $(X, X^n \cup A)$. В результате получим гомотопию исходного отображения $f\colon X \to Y$ в отображение, которое клеточно на X^n и совпадает на X^{n-1} с отображением из предыдущего шага.

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, возможно, бесконечную последовательность гомотопий, которую можно реализовать как одну гомотопию, выполняя гомотопию с номером n в течение времени t из интервала $[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}]$. Более подробно, сначала за время $t \in [0, \frac{1}{2}]$ мы деформируем исходное отображение $f\colon X \to Y$ в отображение, которое является клеточным на X^0. Затем за время $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$ мы деформируем это отображение в отображение, которое является клеточным на X^1 и совпадает с предыдущим на X^0. И так далее. Непрерывность всей гомотопии обеспечивается аксиомой (W): для каждой клетки e из X гомотопия будет неподвижной, начиная с некоторого $t_e < 1$.

Чтобы заполнить недостающий шаг в рассуждении, нам понадобится «лемма о свободной точке».

Лемма 4.11. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $\varphi\colon U \to \operatorname{int} D^k$ — такое непрерывное отображение, что для некоторого замкнутого шара $B^k \subset \operatorname{int} D^k$ подмножество $V = \varphi^{-1}(B^k) \subset U$ компактно. Если $k > n$, то существует непрерывное отображение $\psi\colon U \to \operatorname{int} D^k$, гомотопное φ, совпадающее с φ вне V и такое, что его образ не покрывает всего шара B^k.*

Доказательство леммы приводится ниже, а пока завершим доказательство теоремы. Из леммы о свободной точке и свойств характеристических отображений $h\colon D^n \to X$ и $g\colon D^k \to Y$ клеток e^n и ε^k вытекает, что отображение $f|_{A \cup X^{n-1} \cup e^n}$ гомотопно относительно $A \cup X^{n-1}$ такому отображению $f'\colon A \cup X^{n-1} \cup e^n \to Y$, что $f'(e^n)$ пересекает те же клетки, что и $f(e^n)$, но не содержит всю клетку ε^k. Действительно, применим лемму к подмножеству $U = h^{-1}(f^{-1}(\varepsilon^k) \cap e^n)$ и отображению $\varphi = g^{-1} \circ f \circ h\colon U \to \operatorname{int} D^k$ (тогда для любого замкнутого шара $B^k \subset \operatorname{int} D^k$ подмножество $V = \varphi^{-1}(B^k) \subset U$ компактно как замкнутое подмножество шара D^n). Лемма даёт нам отображение $\psi\colon U \to \operatorname{int} D^k$. Тогда мы определим отображение f' по формуле

$$f'(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \notin h(U), \\ g \circ \psi \circ h^{-1}(x), & \text{если } x \in h(U). \end{cases}$$

Это отображение непрерывно, так как отображения f и $g \circ \psi \circ h^{-1}$ совпадают на множестве $h(U \setminus V)$. Кроме того, гомотопия между φ и ψ даёт гомотопию между f и f', а $f'(e^n)$ не покрывает ε^k, так как $\psi(U)$ не покрывает всего шара B^k. $\square$

Для доказательства леммы о свободной точке мы используем кусочно-линейную аппроксимацию.

Напомним, что k-мерный *симплекс* Δ^k — это выпуклая оболочка набора из $k+1$ точек $x_0, x_1, \ldots, x_k$ в $\mathbb{R}^n$, не лежащих на одной $(k-1)$-мерной плоскости. Эти $k+1$ точек называются *вершинами* симплекса, а выпуклые оболочки поднаборов множества вершин называются *гранями*. Грани являются симплексами размерности $\leqslant k$.

Симплициальный комплекс — это такой набор симплексов произвольной размерности в некотором $\mathbb{R}^n$, что любые два симплекса из этого набора либо не пересекаются, либо пересекаются по целой грани. Здесь мы будем рассматривать только конечные симплициальные комплексы. Говорят, что некоторое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ *триангулировано*, если оно представлено в виде объединения симплексов, которые образуют симплициальный комплекс.

Барицентром симплекса Δ^k с вершинами $x_0, x_1, \ldots, x_k$ называется точка $\frac{1}{k+1}(x_0 + x_1 + \ldots + x_k)$. *Барицентрическим подразбиением* симплекса Δ^k называется симплициальный комплекс, вершинами которого являются барицентры всех граней симплекса Δ^k; при этом набор барицентров граней является множеством вершин симплекса в барицентрическом подразбиении только тогда, когда эти грани образуют цепочку вложенных друг в друга. По-другому барицентрическое подразбиение симплекса можно определить индуктивно: барицентрическое подразбиение нульмерного симплекса (точки) есть сама эта точка, а при $k > 0$ барицентрическое подразбиение k-мерного симплекса получается взятием конусов над барицентрическими подразбиениями всех его граней. Аналогично индуктивным образом определяется барицентрическое подразбиение произвольного симплициального комплекса.

Эти конструкции обладают следующими двумя свойствами. Во-первых, линейное (аффинное) отображение симплекса Δ^k в любое $\mathbb{R}^n$ определяется своими значениями на вершинах. Во-вторых, если диаметр симплекса Δ^k (максимальное расстояние между его точками) равен r, то диаметры симплексов его барицентрического подразбиения не превосходят $\frac{k}{k+1}r$. Таким образом, многократно применяя барицентрическое подразбиение, можно получать сколь угодно мелкие триангуляции.

Доказательство леммы 4.11. Прежде всего заметим, что отображение $\psi\colon U \to \operatorname{int} D^k$, совпадающее с φ вне V, будет автоматически гомотопно φ относительно $U \setminus V$; достаточно взять «прямолинейную» гомотопию, при которой точка $\varphi(u)$ движется к точке $\psi(u)$ по отрезку, соединяющему $\varphi(u)$ с $\psi(u)$.

Теперь построим в шаре $B \subset \operatorname{int} D^k$ концентрические шары $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset B_4$ радиусов $r/5$, $2r/5$, $3r/5$, $4r/5$, где r — радиус шара B. Компактное подмножество $V = \varphi^{-1}(B) \subset U$ содержится в некотором n-мерном симплексе в $\mathbb{R}^n$. Многократно применяя к этому симплексу барицентрическое подразбиение, мы можем выбрать в нём симплициальный подкомплекс K (триангулированное множество), удовлетворяющий следующим условиям: $V \subset K \subset U$ и для любого симплекса $\Delta \subset K$ имеем $\operatorname{diam} \varphi(\Delta) < r/5$. Пусть K_1 — объединение симплексов построенной триангуляции множества K, φ-образы которых пересекаются с B_4. Тогда $B_4 \cap \varphi(U) \subset \varphi(K_1) \subset B$, где последнее включение следует из того, что $\operatorname{diam} \varphi(\Delta) < r/5$ для $\Delta \subset K_1$. Рассмотрим отображение $\varphi'\colon K_1 \to B$, совпадающее с φ на вершинах триангуляции и линейное на каждом симплексе. Отображения $\varphi|_{K_1}$ и φ' гомотопны — они соединяются прямолинейной гомотопией

$$\varphi_t\colon K_1 \to B, \quad \varphi_0 = \varphi|_{K_1}, \quad \varphi_1 = \varphi'.$$

Теперь «сошьём» отображения φ и φ' в отображение $\psi\colon U \to \operatorname{int} D^k$:

$$\psi(u) = \begin{cases} \varphi(u), & \text{если } \varphi(u) \notin B_3, \\ \varphi'(u), & \text{если } \varphi(u) \in B_2, \\ \varphi_{3-5r(u)}(u), & \text{если } \varphi(u) \in B_3 \setminus B_2. \end{cases}$$

Здесь $r(u)$ — расстояние от $\varphi(u)$ до центра шара B. Отображение ψ определено и непрерывно для всех $u \in U$ (отображение φ_t определено только на подмножестве

$K_1 \subset U$, но если $\varphi(u) \in B_3$, то $u \in K_1$). При этом ψ совпадает с φ на $U \backslash V$ (если $u \in U \backslash V$, то $\varphi(u) \notin B_3$) и $\psi(U) \cap B_1 = \varphi'(K_1) \cap B_1$ (если $\varphi(u) \in B_3 \backslash B_2$, то $\psi(u) = \varphi_{3-5r(u)}(u) \notin B_1$ из-за условия на диаметры). Так как φ' линейно на симплексах триангуляции, $\varphi'(K_1) \cap B_1$ представляет собой конечное число кусков n-мерных плоскостей и не может совпадать со всем k-мерным шаром B_1 $(k > n)$. Поэтому $\psi(U)$ не покрывает всего шара B_1, а значит, и всего шара B. ☐

Предложение 4.12. *Любое отображение $S^k \to S^n$ при $k < n$ гомотопно отображению в точку.*

Доказательство. Применим теорему о клеточной аппроксимации к клеточным разбиениям сфер с двумя клетками. При $k < n$ клеточное отображение есть отображение в точку. ☐

Задачи и упражнения.

4.13. Докажите, что любое компактное подмножество клеточного пространства принадлежит некоторому конечному подпространству.

4.14. Докажите эквивалентность следующих свойств для подмножества клеточного пространства X:

- подмножество $Y \subset X$ замкнуто (соответственно открыто);
- пересечение $Y \cap X^n$ замкнуто (соответственно открыто) для любого n;
- прообраз $\Phi_i^{-1}(Y)$ при характеристическом отображении $\Phi_i \colon D^q \to X$ любой клетки e_i^q замкнут (соответственно открыт) в D^q.

4.15. Докажите, что отображение клеточного пространства в топологическое пространство непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно на любом остове.

4.16. Докажите, что пространство, получаемое в результате приклеивания клетки к хаусдорфовому пространству, хаусдорфово.

4.17. Докажите, что для пространства, получаемого конечной итерацией операции приклеивания клетки из пустого множества, аксиомы (C) и (W) выполнены автоматически.

4.18. Докажите, что бесконечный букет отрезков $\bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$ не метризуем.

4.19. Докажите, что клеточное пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно локально конечно.

4.20. Введите разбиение на клетки факторпространства X/Y клеточного пространства X по клеточному подпространству Y и докажите, что X/Y является клеточным пространством.

4.21. Докажите, что стандартное разбиение на клетки произведения $X \times Y$ с топологией произведения не удовлетворяет аксиоме (W) в случае $X = \bigvee_{k=1}^{\infty} I_k$ (букет счётного числа отрезков) и $Y = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} I_\alpha$ (букет континуального числа отрезков).

4.22. Докажите, что бесконечномерная сфера S^∞ стягиваема.

4.23. Докажите, что $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ и $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$.

4.24. Определите кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$ и докажите, что $\mathbb{H}P^1 \cong S^4$.

4.25. Докажите, что свойство продолжения гомотопии не выполнено для пар (I, A), где $A = (0, 1]$ или $A = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$.

4.26. Докажите, что если X хаусдорфово и $X \times 0 \cup A \times I$ является ретрактом пространства $X \times I$, то A замкнуто в X.

4.27. Докажите, что факторпространство S^2/S^0 гомотопически эквивалентно букету $S^1 \vee S^2$.

4.28. Докажите, что если пара (X, A) удовлетворяет свойству продолжения гомотопии и вложение $A \hookrightarrow X$ гомотопно отображению в точку, то имеется гомотопическая эквивалентность $X/A \simeq X \vee \Sigma A$.

4.29. *Симметрическим квадратом* пространства X называется факторпространство $(X \times X)/\!\sim$ по отношению эквивалентности $(x, y) \sim (y, x)$. Докажите, что симметрический квадрат окружности S^1 гомеоморфен *листу Мёбиуса* (односторонней поверхности, получаемой склейкой одной пары противоположных сторон квадрата с обращением ориентации, т.е. $I^2/\sim$, где $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$.)

4.30. Докажите, что симметрический квадрат двумерной сферы S^2 гомеоморфен комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$.

4.31. Рассмотрим клеточное разбиение окружности S^1 с двумя клетками. Убедитесь, что диагональное отображение $\Delta\colon S^1 \to S^1 \times S^1$, $t \mapsto (t, t)$, не является клеточным. Постройте явно его клеточную аппроксимацию.

4.32. Докажите, что топология на проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$, определяемая как фактортопология пространства $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbf{0}$, совпадает с топологией, происходящей из угловой метрики (расстояние между прямыми равно углу между ними).

5. Фундаментальная группа

5.1. **Определение и основные свойства.** Напомним, что петлёй в точке x_0 пространства X называется отображение (путь) $\varphi\colon I \to X$, $t \mapsto \varphi(t)$, для которого $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$. Петли φ и φ' называются *гомотопными* (обозначение: $\varphi \sim \varphi'$), если существует такая гомотопия $\varphi_s\colon I \to X$, что $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \varphi'$ и $\varphi_s(0) = \varphi_s(1) = x_0$ при $0 \leqslant s \leqslant 1$ (последнее условие означает, что гомотопия постоянна на концах путей). *Произведение* $\varphi\psi$ петель φ и ψ — это петля χ, у которой $\chi(t) = \varphi(2t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ и $\chi(t) = \psi(2t - 1)$ при $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$. Другими словами, произведение двух петель — это петля, составленная из двух петель, которые проходятся последовательно (с удвоенной скоростью).

Предложение 5.1. *Произведение петель (в точке x_0) обладает свойствами:*

а) *если $\varphi \sim \varphi'$ и $\psi \sim \psi'$, то $\varphi\psi \sim \varphi'\psi'$;*

б) *$(\varphi\psi)\chi \sim \varphi(\psi\chi)$ для любых петель φ, ψ, χ;*

в) *если ε — постоянная петля, т.е. $\varepsilon(t) = x_0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $\varphi\varepsilon \sim \varepsilon\varphi \sim \varphi$ для любой петли φ;*

г) *для петли φ определим петлю $\overline{\varphi}$ как $\overline{\varphi}(t) = \varphi(1 - t)$; тогда $\varphi\overline{\varphi} \sim \overline{\varphi}\varphi \sim \varepsilon$.*

Доказательство. Проверим свойство а). Пусть φ_s — гомотопия между φ и φ', а ψ_s — гомотопия между ψ и ψ'. Тогда гомотомия χ_s между $\chi = \varphi\psi$ и $\chi' = \varphi'\psi'$ задаётся формулой

$$\chi_s(t) = \begin{cases} \varphi_s(2t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \psi_s(2t-1) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Проверим свойство б). Пусть $\xi = (\varphi\psi)\chi$ и $\xi' = \varphi(\psi\chi)$, т. е.

$$\xi(t) = \begin{cases} \varphi(4t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}, \\ \psi(4t-1) & \text{при } \frac{1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \chi(2t-1) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \qquad \xi'(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \psi(4t-2) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}, \\ \chi(4t-3) & \text{при } \frac{3}{4} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда гомотопия ξ_s $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ между ξ и ξ' задаётся формулой

$$\xi_s(t) = \begin{cases} \varphi(\frac{4t}{1+s}) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1+s}{4}, \\ \psi(4t-1-s) & \text{при } \frac{1+s}{4} \leqslant t \leqslant \frac{2+s}{4}, \\ \chi(\frac{4t-2-s}{2-s}) & \text{при } \frac{2+s}{4} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

(см. рис. 2).

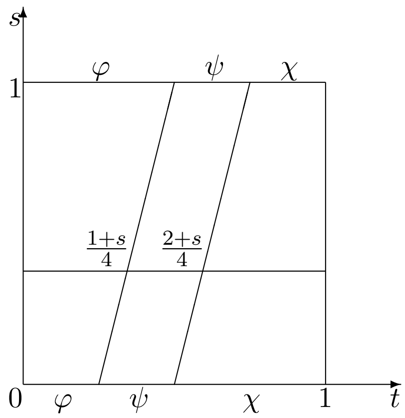


Рис. 2.

Проверим свойство в). Гомотопия между $\varphi\varepsilon$ и φ задаётся формулой

$$\xi_s(t) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{2t}{1+s}\right) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{s+1}{2}, \\ \varepsilon(t) = x_0 & \text{при } \frac{s+1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Проверим свойство г). Гомотопия между $\chi = \varphi\overline{\varphi}$ и ε задаётся формулой

$$\varphi_s(t) = \begin{cases} \varphi\big(2t(1-s)\big) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \varphi\big(2(1-t)(1-s)\big) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Другими словами, в момент s гомотопии мы проходим по петле φ от точки x_0 до точки $\varphi(1-s)$, а затем проходим по ней обратно до x_0. □

Мы будем обозначать через $[\varphi]$ класс эквивалентости петли φ относительно гомотопии петель. Из предложения 5.1 следует, что множество классов гомотопных петель в точке $x_0 \in X$ образует группу относительно произведения $[\varphi][\psi] = [\varphi\psi]$ с единицей $[\varepsilon]$ и обратным элементом $[\varphi]^{-1} = [\overline{\varphi}]$. Эта группа обозначается $\pi_1(X, x_0)$ и называется *фундаментальной группой* пространства X с отмеченной точкой x_0.

Скажем, что гомотопия φ_s отображения $\varphi\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ пространств с отмеченными точками *сохраняет отмеченные точки*, если $\varphi_s(x_0) = y_0$ при $0 \leqslant s \leqslant 1$.

Предложение 5.2.

а) *Отображение* $f\colon X \to Y$*, для которого* $f(x_0) = y_0$*, индуцирует гомоморфизм групп* $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

б) *Тождественное отображение* $\mathrm{id}\colon X \to X$ *индуцирует тождественный гомоморфизм фундаментальных групп, а композиция отображений* $f\colon X \to Y$ *и* $g\colon Y \to Z$*,* $f(x_0) = y_0$*,* $g(y_0) = z_0$*, индуцирует композицию гомоморфизмов фундаментальных групп, т. е.* $(gf)_* = g_* f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, z_0)$.

в) *Если отображения* $f, g\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *гомотопны с сохранением отмеченных точек, то гомоморфизмы* f_* *и* g_* *совпадают.*

Доказательство. а) Определим отображение f_*, переводящее петлю $\varphi\colon I \to X$ в петлю $f \circ \varphi\colon I \to Y$. Если петли φ и φ' гомотопны при помощи гомотопии $F\colon I \times I \to X$, то петли $f \circ \varphi$ и $f \circ \varphi'$ гомотопны при помощи гомотопии $f \circ F$. Поэтому отображение f_* корректно определено на классах гомотопии петель, $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$. Далее, f_* есть гомоморфизм, так как

$$f_*([\varphi][\psi]) = f_*([\varphi\psi]) = [f \circ (\varphi\psi)] = [(f \circ \varphi)(f \circ \psi)] = [f \circ \varphi][f \circ \psi] = f_*([\varphi]) f_*([\psi]).$$

б) $(gf)_*[\varphi] = [g \circ f \circ \varphi] = g_*[f \circ \varphi] = g_* f_*[\varphi]$.

в) Пусть $G\colon X \times I \to Y$ — гомотопия между f и g, сохраняющая отмеченные точки, т. е. $G(x_0, s) = y_0$ при $0 \leqslant s \leqslant 1$. Тогда для любой петли $\varphi\colon I \to X$ петли $f \circ \varphi$ и $g \circ \varphi$ гомотопны: гомотопия задаётся формулой $H\colon I \times I \to Y$, $H(t, s) = G(\varphi(t), s)$. Следовательно, $f_*[\varphi] = [f \circ \varphi] = [g \circ \varphi] = g_*[\varphi]$ и $f_* = g_*$. ☐

5.2. **Зависимость от отмеченной точки.**

Теорема 5.3. *Если пространство* X *линейно связно, то* $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ *(изоморфны) для любых точек* $x_0, x_1 \in X$.

Доказательство. Пусть $\alpha\colon I \to X$ — путь из x_0 в x_1, т. е. $\alpha(0) = x_0$ и $\alpha(1) = x_1$. Для каждой петли φ в точке x_0 мы положим $b_\alpha(\varphi) = (\overline{\alpha}\varphi)\alpha$. Здесь $\overline{\alpha}$ — «обратный» путь, $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$, а умножение путей определяется так же, как и умножение петель, при условии, что второй путь начинается там, где кончается первый. Тогда $b_\alpha(\varphi)$ — петля в точке x_1, причём её гомотопический класс зависит только от гомотопических классов петли φ и пути α (где в последнем случае подразумеваются гомотопии с закреплёнными концами). Получаем отображение «замены отмеченной точки»

$$b_\alpha\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1),$$

которое зависит только от гомотопического класса пути α.

Отображение b_α является гомоморфизмом, так как

$$b_\alpha([\varphi\psi]) = [\overline{\alpha}\varphi\psi\alpha] = [\overline{\alpha}\varphi\alpha\overline{\alpha}\psi\alpha] = [\overline{\alpha}\varphi\alpha][\overline{\alpha}\psi\alpha] = b_\alpha([\varphi]) b_\alpha([\psi]).$$

Кроме того, формула $b_\alpha^{-1}([\chi]) = [\alpha\chi\overline{\alpha}]$ задаёт обратный гомоморфизм, так что b_α — изоморфизм. ☐

Изоморфизм b_α зависит от гомотопического класса пути α. Если β — другой путь из x_0 в x_1, то $\gamma = \overline{\alpha}\beta$ — петля в точке x_1 и мы имеем

$$b_\beta([\varphi]) = [\overline{\beta}\varphi\beta] = [\overline{\beta}\alpha\overline{\alpha}\varphi\alpha\overline{\alpha}\beta] = [\overline{\beta}\alpha][\overline{\alpha}\varphi\alpha][\overline{\alpha}\beta] = [\gamma]^{-1} b_\alpha([\varphi])[\gamma].$$

В частности, если фундаментальная группа коммутативна, то изоморфизм b_α вообще не зависит от α. В этом случае мы можем говорить о фундаментальной группе, не фиксируя отмеченной точки. В общем случае о фундаментальной группе линейно связного пространства без отмеченной точки можно говорить только как об абстрактной группе (т. е. можно сказать, что она, например, конечна или нильпотентна, но нельзя фиксировать в ней определённый элемент).

Далее мы часто будем использовать сокращённое обозначение $\pi_1(X)$ для фундаментальной группы $\pi_1(X, x_0)$ в случае, когда выбор отмеченной точки x_0 не влияет на результат или ясен из контекста.

Предложение 5.4. *Если $f\colon X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность, то $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ является изоморфизмом для любой точки $x_0 \in X$.*

Доказательство. Рассмотрим такие отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$, что композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ гомотопны тождественным отображениям $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ и $\mathrm{id}_Y\colon Y \to Y$ соответственно. Если бы эти гомотопии сохраняли отмеченные точки, то согласно предложению 5.2 мы бы получили, что $g_*f_* = \mathrm{id}$ и $f_*g_* = \mathrm{id}$ — тождественные изоморфизмы, откуда бы следовало, что f_* — изоморфизм.

В общем случае гомотопия $F\colon X \times I \to X$ между id_X и gf может не сохранять отмеченную точку. Рассмотрим путь $\alpha(t) = F(x_0, t)$, который проходит отмеченная точка x_0 при этой гомотопии. Тогда $\alpha(0) = x_0$ и $\alpha(1) = g(f(x_0))$. Легко видеть, что $g_*f_* = b_\alpha\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, gf(x_0))$ — изоморфизм, построенный при доказательстве предложения 5.2. Отсюда следует, что отображение $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ инъективно для любой точки $x_0 \in X$ (а g_* сюръективно). Аналогично, рассматривая гомотопию между id_Y и fg, получим, что $f_*g_*\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, fg(y_0))$ — изоморфизм. Отсюда получаем, что f_* сюръективно, а значит, f_* — изоморфизм. $\square$

Напомним, что пространство X называется стягиваемым, если оно гомотопически эквивалентно точке.

Следствие 5.5. *Пусть X — стягиваемое пространство. Тогда $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ для любой точки $x_0 \in X$. В частности, $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \pi_1(D^n) = \{1\}$.*

Предложение 5.6. *$\pi_1(S^n) = \{1\}$ при $n \geqslant 2$.*

Доказательство. Это вытекает из теоремы о клеточной аппроксимации (теорема 4.10). Действительно, любая петля $\varphi\colon I \to S^n$, $\varphi(0) = \varphi(1) = s_0$, рассматриваемая как отображение клеточных пространств, гомотопна клеточному отображению. Если на отрезке I ввести стандартную клеточную структуру, а на S^n — клеточную структуру с двумя клетками s_0 и $S^n \setminus \{s_0\}$, то единственным клеточным отображением $I \to S^n$ при $n \geqslant 2$ будет отображение в точку s_0, т. е. постоянная петля. $\square$

5.3. **Фундаментальная группа окружности.**

Теорема 5.7. *Группа $\pi_1(S^1)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$ целых чисел.*

Доказательство. Доказательство использует построение «универсального накрытия» над окружностью; этот метод будет развит и обобщён в §7.

Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Рассматривая прообразы, мы можем отождествлять точки окружности с вещественными числами, определёнными с точностью до слагаемых вида $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. В качестве отмеченной точки окружности мы возьмём точку $(1, 0)$, соответствующую $t = 0$.

Таким образом, петлю $\varphi\colon I \to S^1$ можно считать многозначной функцией на отрезке I, значение которой в каждой точке определено с точностью до слагаемого

$2\pi k$ и значением которой в точках 0 и 1 служит само множество чисел вида $2\pi k$. У этой многозначной функции существует непрерывная однозначная ветвь — непрерывная функция на отрезке I, значение которой в каждой точке принадлежит множеству значений многозначной функции φ в этой точке. Такая однозначная функция $\widetilde{\varphi}\colon I \to \mathbb{R}$ будет определена единственным образом, если наложить условие $\widetilde{\varphi}(0) = 0$.

Для построения функции $\widetilde{\varphi}\colon I \to \mathbb{R}$ мы выберем такое n, что при $|t_1 - t_2| \leqslant \frac{1}{n}$ точки $\varphi(t_1)$ и $\varphi(t_2)$ не диаметрально противоположны (нужно рассмотреть открытое покрытие отрезка I, состоящее из всех множеств вида $\varphi^{-1}(A)$, где A — открытая полуокружность, и выделить конечное подпокрытие). Положив $\widetilde{\varphi}(0) = 0$, при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}$ мы берём в качестве $\widetilde{\varphi}(t)$ то из значений функции φ в точке t, которое отличается от 0 меньше чем на π. Далее, при $\frac{1}{n} \leqslant t \leqslant \frac{2}{n}$ мы берём в качестве $\widetilde{\varphi}(t)$ то из значений функции φ в точке t, которое отличается от $\widetilde{\varphi}(\frac{1}{n})$ меньше чем на π, и т. д.

По построению $f(\widetilde{\varphi}(t)) = \varphi(t)$; в частности, $\widetilde{\varphi}(1) = 2\pi k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Кроме того, всякая непрерывная функция $\chi\colon I \to \mathbb{R}$, для которой $\chi(0) = 0$ и $\chi(1) = 2\pi k$, имеет вид $\widetilde{\varphi}$ для некоторой петли φ, а именно для петли $\varphi(t) = f(\chi(t))$.

Теперь построим отображение $g\colon \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$, положив $g([\varphi]) = \widetilde{\varphi}(1)/2\pi$. Чтобы убедиться, что g — изоморфизм групп, заметим следующее. Во-первых, число $\widetilde{\varphi}(1)/2\pi$ не меняется при гомотопии, поскольку область возможных значений $\widetilde{\varphi}(1)$ дискретна. Таким образом, число $\widetilde{\varphi}(1)/2\pi$ зависит только от гомотопического класса $[\varphi]$ и отображение g определено корректно. Во-вторых, отображение g сюръективно, т.е. любое число $k \in \mathbb{Z}$ лежит в его образе. Действительно, достаточно взять $\varphi = \psi_k$, где $\widetilde{\psi}_k(t) = 2\pi kt$. В-третьих, если $\widetilde{\varphi}_1(1) = \widetilde{\varphi}_2(1)$, то $\varphi_1 \sim \varphi_2$, а потому g инъективно. Действительно, функции $\widetilde{\varphi}_1(t)$ и $\widetilde{\varphi}_2(t)$ гомотопны в классе функций с заданными значениями в 0 и 1 (если $\widetilde{\varphi}(1) = 2\pi k$, то $\widetilde{\varphi} \sim \widetilde{\psi}_k$; гомотопия задаётся формулой $\widetilde{\varphi}_s(t) = (1 - s)\widetilde{\varphi}(t) + s2\pi kt$). Наконец, в-четвёртых, g является гомоморфизмом, так как $g([\varphi]) = g([\psi_k])$ для некоторого k, а $\psi_k\psi_l \sim \psi_{k+l}$, так как $\widetilde{\psi_k\psi_l}(1) = \widetilde{\psi}_{k+l}(1)$. $\square$

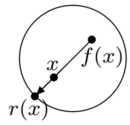
Предложение 5.8. *Окружность $S^1 \subset D^2$ не является ретрактом диска D^2.*

Доказательство. Допустим, существует ретракция $r\colon D^2 \to S^1$, т.е. композиция $S^1 \xhookrightarrow{i} D^2 \xrightarrow{r} S^1$ есть тождественное отображение. Тогда согласно предложению 5.2 композиция $\pi_1(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2) \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1)$ есть тождественный изоморфизм. Но это невозможно, так как $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, а $\pi_1(D^2) = \{1\}$. $\square$

В качестве следствия мы получаем классический результат, доказательство которого было одним из первых триумфов алгебраической топологии.

Теорема 5.9 (Брауэр)**.** *Любое непрерывное отображение $f\colon D^2 \to D^2$ имеет неподвижную точку, т. е. точку x, для которой $f(x) = x$.*

Доказательство. Предположим, что $f(x) \neq x$ для всех $x \in D^2$. Тогда можно определить отображение $r\colon D^2 \to S^1$, взяв в качестве $r(x)$ точку окружности S^1, в которой луч, идущий из точки $f(x)$ в точку x, пересекает диск D^2. При этом, очевидно, $r(x) = x$, если $x \in S^1$, т. е. r — ретракция. Это противоречит предложению 5.8. $\square$



Фундаментальная группа окружности используется в следующем топологическом доказательстве «основной теоремы алгебры».

Теорема 5.10. *Любой непостоянный многочлен $p(z)$ с коэффициентами в $\mathbb{C}$ имеет комплексный корень.*

Доказательство. Можно считать, что $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$. Предположим, что $p(z)$ не имеет корней в $\mathbb{C}$. Тогда для каждого вещественного $r \geqslant 0$ можно определить следующую петлю с началом в точке 1 на единичной окружности $S^1 \subset \mathbb{C}$:

$$\varphi_r \colon I \to S^1, \quad \varphi_r(s) = \frac{p(re^{2\pi i s})/p(r)}{|p(re^{2\pi i s})/p(r)|}. \tag{3}$$

При изменении r получаем гомотопию петель с началом и концом в точке 1. Петля φ_0 тривиальна, поэтому $[\varphi_r] = [\varphi_0] = 0$ в $\pi_1(S^1)$ для всех r.

Теперь выберем $r > \max\{|a_{n-1}| + \ldots + |a_0|, 1\}$. Тогда при $|z| = r$ получаем

$$|z^n| = r^n = r \cdot r^{n-1} > (|a_{n-1}| + \ldots + |a_0|)|z^{n-1}| > |a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0|.$$

Отсюда следует, что при $0 \leqslant t \leqslant 1$ многочлен $p_t(z) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0)$ не имеет корней на окружности $|z| = r$. Заменив p на p_t в формуле (3), мы получим функцию $\varphi_r(s,t)$. При изменении t от 1 до 0 эта функция задаёт гомотопию петли $\varphi_r(s) = \varphi_r(s,1)$ в петлю $\varphi_r(s,0) = \psi_n(s) = e^{2\pi i n s}$, которая представляет собой n-ю степень образующей группы $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Так как $[\psi_n] = [\varphi_r] = 0$, мы получаем $n = 0$. Таким образом, единственные многочлены без корней в $\mathbb{C}$ — это константы. $\square$

Задачи и упражнения.

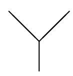
5.11. Докажите, что если отображения $f, f' \colon X \to Y$ гомотопны посредством гомотопии $F \colon X \times I \to Y$, то индуцированные гомоморфизмы $f_* \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ и $f'_* \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f'(x_0))$ удовлетворяют соотношению $f'_* = b_\alpha f_*$, где $\alpha(t) = F(x_0, t)$ — путь из $f(x_0)$ в $f'(x_0)$.

5.12. Докажите, что если X и Y линейно связны, то $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

5.13. Докажите, что если $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, то $\pi_1(X) = \{1\}$.

5.14. Докажите, что если X — дискретное пространство, то $\pi_1(X) = \{1\}$.

5.15. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ при $n \neq 2$.

5.16. Докажите, что любое непрерывное отображение пространства  (три отрезка с отождествлённым началом) в себя имеет неподвижную точку.

5.17. *Топологической группой* называется пространство G с заданной на нём структурой группы, для которой отображения умножения $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$, и взятия обратного $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, являются непрерывными. Докажите, что фундаментальная группа $\pi_1(G)$ топологической группы абелева.

6. Теорема ван Кампена

Теорема ван Кампена позволяет вычислять фундаментальную группу пространства, представленного в виде объединения своих подмножеств, по фундаментальным группам этих подмножеств.

Нам понадобится ряд алгебраических понятий.

6.1. **Свободное произведение групп.** Пусть дан конечный или бесконечный набор групп $\{G_\alpha\colon \alpha\in A\}$. *Свободное произведение* $*_\alpha G_\alpha$ (если групп конечное число, то используется обозначение $G_1*G_2*\ldots*G_k$) состоит из всех конечных слов $g_1g_2\ldots g_m$ произвольной длины $m\geqslant 0$, где $g_i\in G_{\alpha_i}$, $g_i\neq e$, причём соседние буквы g_i и g_{i+1} лежат в разных группах, т. е. $\alpha_i\neq\alpha_{i+1}$. Слова, удовлетворяющие этим условиям, называются *приведёнными*; неприведённое слово всегда можно преобразовать в приведённое, заменив соседние буквы, которые лежат в одной и той же группе G_{α_i}, на их произведение в G_{α_i} и удалив тривиальные буквы. Слову разрешается быть пустым; пустое слово будет единицей в группе $*_\alpha G_\alpha$. Умножение в группе $*_\alpha G_\alpha$ — это приставление, т. е. запись одного слова за другим: $(g_1\ldots g_m)(h_1\ldots h_n)=g_1\ldots g_mh_1\ldots h_n$, с последующим преобразованием в приведённое слово. Например, в произведении $(g_1\ldots g_m)(g_m^{-1}\ldots g_1^{-1})$ всё сокращается и мы получаем единицу группы $*_\alpha G_\alpha$, т. е. пустое слово. Отсюда следует существование обратного элемента для любого слова. Нетривиальной является проверка ассоциативности умножения в $*_\alpha G_\alpha$.

Лемма 6.1. *Определённая выше операция умножения приведённых слов (приставление с последующим приведением) ассоциативна.*

Доказательство. Пусть W — множество приведённых слов $g_1\ldots g_m$, включая пустое слово. Каждому элементу $g\in G_\alpha$ сопоставим отображение $L_g\colon W\to W$, задаваемое умножением слева, $L_g(g_1\ldots g_m)=gg_1\ldots g_m$, с последующим приведением. При этом мы имеем $L_{gg'}=L_gL_{g'}$ для любых $g,g'\in G_\alpha$, т. е. $g(g'(g_1\ldots g_m))=(gg')(g_1\ldots g_m)$; это следует из ассоциативности умножения в G_α. Из формулы $L_{gg'}=L_gL_{g'}$ вытекает, что отображение L_g обратимо с обратным отображением $L_{g^{-1}}$. Поэтому сопоставление $g\mapsto L_g$ задаёт гомоморфизм группы G_α в группу $P(W)$ всех перестановок множества W. Теперь определим отображение $L\colon W\to P(W)$ формулой $L(g_1\ldots g_m)=L_{g_1}\ldots L_{g_m}$. Отображение L инъективно, так как перестановка $L(g_1\ldots g_m)$ отображает пустое слово в $g_1\ldots g_m$ и поэтому не является тождественной, если само слово $g_1\ldots g_m$ не является пустым. Операция умножения в W при отображении L переходит в композицию в $P(W)$, так как $L_{gg'}=L_gL_{g'}$. Так как композиция перестановок ассоциативна, мы получаем, что умножение в W ассоциативно. □

Каждая группа G_α отождествляется с подгруппой свободного произведения $*_\alpha G_\alpha$, состоящей из пустого слова и однобуквенных слов $g\in G_\alpha$.

Любой набор гомоморфизмов $\varphi_\alpha\colon G_\alpha\to H$ единственным образом продолжается до гомоморфизма $\varphi\colon *_\alpha G_\alpha\to H$. А именно, значение гомоморфизма φ на слове $g_1\ldots g_m$, где $g_i\in G_{\alpha_i}$, полагается равным $\varphi_{\alpha_1}(g_1)\ldots\varphi_{\alpha_n}(g_n)$. Таким образом, свободное произведение является *копроизведением* в категории групп.

Например, включения $G\hookrightarrow G\times H$ и $H\hookrightarrow G\times H$ индуцируют эпиморфизм $G*H\to G\times H$.

Пример 6.2. Если каждая из групп G_α есть бесконечная циклическая группа $\mathbb{Z}$ (группа целых чисел), то свободное произведение $*_\alpha G_\alpha$ называется *свободной группой*. Элементами свободной группы являются слова вида $a_1^{n_1}a_2^{n_2}\ldots a_m^{n_m}$, где $a_i\in G_{\alpha_i}\cong\mathbb{Z}$ — образующая, $n_i\neq 0$ — целые числа и $\alpha_i\neq\alpha_{i+1}$ для любого i. Набор $\{a_\alpha\colon\alpha\in A\}$, в который входит по одной образующей a_α каждой из групп $G_\alpha=\mathbb{Z}$, называется *базисом* свободной группы, а мощность $|A|$ базиса называется *рангом* свободной группы. При этом базис свободной группы определён неоднозначно, и тот факт, что все базисы имеют одинаковую мощность, нуждается в доказательстве, которое мы здесь не приводим. Свободная группа конечного ранга k будет обозначаться F_k или $F(a_1, \dots, a_k)$, если необходимо явно указать образующие. Заметим, что $F_1 \cong \mathbb{Z}$, а группа F_2 неабелева.

Всякую группу G можно получить как факторгруппу свободной группы. Для этого надо выбрать *набор образующих* группы G, т. е. такой набор элементов g_i, $i \in I$, что любой другой элемент $g \in G$ представляется в виде произведения элементов g_i и g_i^{-1} (например, в качестве набора образующих можно взять все элементы группы G). Тогда мы имеем эпиморфизм $f\colon F \to G$ из свободной группы F с базисом a_i, $i \in I$, в группу G, переводящий i-ю образующую a_i группы F в g_i. Ядро гомоморфизма является нормальной подгруппой $R \subset F$; мы имеем $G \cong F/R$. В теореме 7.16 мы покажем, что любая подгруппа свободной группы является свободной. Элементы группы R называются *соотношениями* между образующими g_i. При гомоморфизме f элемент $r \in R$ переходит в произведение элементов g_i, g_i^{-1}, которое равно 1 в группе G. Погруппа $R \subset F$ является нормальной, как ядро гомоморфизма, т. е. вместе с каждым элементом $r \in R$ содержит все его сопряжённые ara^{-1}, $a \in F$.

Пусть задан набор r_j, $j \in I$, где каждое r_j является конечным произведением элементов g_i, g_i^{-1}, $i \in I$. Говорят, что группа G *задана образующими g_i и соотношениями r_j*, если она представлена в виде факторгруппы свободной группы с образующими g_i по её минимальной нормальной подгруппе, содержащей все элементы r_j. Используется запись

$$G = \langle\, g_i, i \in I \,|\, r_j, j \in J \,\rangle.$$

Если G — произвольная группа и r_j, $j \in J$, — набор её элементов, то *факторгруппой группы G по соотношениям $r_j = 1$* называется факторгруппа группы G по минимальной нормальной подгруппе, содержащей элементы r_j, $j \in J$.

Абеленизацией группы G называется факторгруппа группы G по всем соотношениям $ghg^{-1}h^{-1} = 1$, $g, h \in G$, т. е. факторгруппа по нормальной подгруппе, порождённой всеми *коммутаторами* $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$. Эта подгруппа называется *коммутантом* группы G и обозначается $[G, G]$ или G'. Абеленизация свободной группы $F = *_\alpha \mathbb{Z}$ — это свободная абелева группа $\oplus_\alpha \mathbb{Z}$, базисом которой служит то же самое множество образующих.

6.2. **Формулировка и доказательство теоремы.** Пусть пространство X представлено в виде объединения линейно связных открытых подмножеств A_α, каждое из которых содержит отмеченную точку $x_0 \in X$. Гомоморфизмы $i_\alpha\colon \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$, индуцированные включениями, продолжаются до гомоморфизма

$$\Phi\colon\ *_\alpha\, \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X).$$

Если

$$i_{\alpha\beta}\colon \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \to \pi_1(A_\alpha)$$

— гомоморфизм, индуцированный включением $A_\alpha \cap A_\beta \to A_\alpha$, то $i_\alpha i_{\alpha\beta} = i_\beta i_{\beta\alpha}$, так как обе эти композиции индуцированы включением $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow X$. Таким образом, ядро гомоморфизма Φ содержит элементы вида $i_{\alpha\beta}(\omega) i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$, где $\omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$.

Теорема 6.3 (ван Кампен)**.** *Пусть X — объединение линейно связных открытых множеств A_α, каждое из которых содержит отмеченную точку $x_0 \in X$.*

a) *Если каждое пересечение $A_\alpha \cap A_\beta$ линейно связно, то отображение $\Phi\colon\ *_\alpha\ \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ является эпиморфизмом.*

б) *Если, кроме того, каждое пересечение $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ линейно связно, то ядро гомоморфизма Φ — это нормальная подгруппа N, порождённая всеми элементами вида $i_{\alpha\beta}(\omega)i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$, а потому Φ индуцирует изоморфизм*

$$\pi_1(X) \cong *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N.$$

Доказательство. Докажем утверждение а), т. е. сюръективность отображения Φ. Мы утверждаем, что для данной петли $f\colon I \to X$ в отмеченной точке x_0 существует такое разбиение $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$ отрезка I, что образ каждого отрезка $[s_{i-1}, s_i]$ при отображении f целиком содержится в одном из множеств A_α. Действительно, так как f непрерывно, каждая точка $s \in I$ имеет окрестность $U(s) \subset I$, для которой $f(U(s))$ лежит в одном из множеств A_α. Из компактности отрезка следует, что конечное число таких интервалов покрывает I. Тогда концы этих интервалов задают требуемое разбиение отрезка I.

Пусть $f([s_{i-1}, s_i]) \subset A_i$, и обозначим $f_i = f_{[s_{i-1}, s_i]}$. Тогда $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_m$, где $f_i \subset A_i$. Так как каждое пространство $A_i \cap A_{i+1}$ линейно связно, мы можем соединить x_0 с $f(s_i) \in A_i \cap A_{i+1}$ путём g_i в $A_i \cap A_{i+1}$. Теперь рассмотрим петлю

$$(f_1 \cdot \overline{g}_1) \cdot (g_1 \cdot f_2 \cdot \overline{g}_2) \cdot (g_2 \cdot f_3 \cdot \overline{g}_3) \cdot \ldots \cdot (g_{m-1} \cdot f_m),$$

гомотопную f. Эта петля является композицией петель, каждая из которых расположена в одном из множеств A_α; такие петли заключены в скобки. Следовательно, $[f]$ лежит в образе отображения Φ, а потому Φ сюръективно.

Теперь докажем утверждение б), т. е. проверим, что при описанном там условии ядро гомоморфизма Φ совпадает с N. Мы будем рассматривать *факторизации* элементов $[f] \in \pi_1(X)$, т. е. формальные разложения вида $[f] = [f_1] \ldots [f_k]$, где

- каждый множитель f_i — это петля с началом и концом в x_0, целиком содержащаяся в одном из множеств A_α, с гомотопическим классом $[f_i] \in \pi_1(A_\alpha)$;
- петля f гомотопна $f_1 \cdot \ldots \cdot f_k$ в X.

Таким образом, факторизация гомотопического класса $[f]$ — это слово в $*_\alpha \pi_1(A_\alpha)$, возможно приводимое, которое переходит в $[f]$ при отображении Φ. Утверждение а) показывает, что у каждого элемента $[f] \in \pi_1(X)$ есть факторизация.

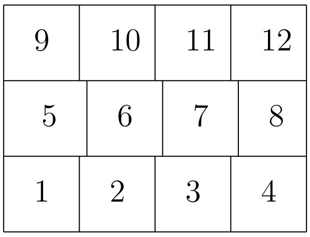
Назовём две факторизации класса $[f]$ *эквивалентными*, если они связаны последовательностью преобразований следующих двух видов или обратных к ним:

1) соседние члены $[f_i][f_{i+1}]$ объединяются в один член $[f_i \cdot f_{i+1}]$, если $[f_i]$ и $[f_{i+1}]$ лежат в одной группе $\pi_1(A_\alpha)$;
2) член $[f_i] \in \pi_1(A_\alpha)$ рассматривается как лежащий в группе $\pi_1(A_\beta)$, а не в $\pi_1(A_\alpha)$, если f_i — петля в $A_\alpha \cap A_\beta$.

Первое преобразование не изменяет элемент группы $*_\alpha \pi_1(A_\alpha)$, задаваемый факторизацией. Второе преобразование не изменяет образ этого элемента в факторгруппе $Q = *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N$ согласно определению подгруппы N. Таким образом, эквивалентные факторизации дают один и тот же элемент группы Q.

Мы покажем, что любые две факторизации класса $[f]$ эквивалентны. Отсюда будет следовать, что отображение $Q \to \pi_1(X)$, индуцированное отображением Φ, инъективно. Тем самым утверждение б) будет доказано.

Пусть $[f_1] \ldots [f_k]$ и $[f'_1] \ldots [f'_\ell]$ — две факторизации класса $[f]$. Пусть $F\colon I \times I \to X$ — гомотопия, связывающая $f_1 \cdot \ldots \cdot f_k$ с $f'_1 \cdot \ldots \cdot f'_\ell$. Существуют такие разбиения $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$ и $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, что образ каждого из прямоугольников $R_{ij} = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ при отображении F лежит в одном множестве A_α, которое мы обозначим A_{ij}. Эти разбиения можно получить, покрыв $I \times I$ конечным числом прямоугольников $[a, b] \times [c, d]$, каждый из которых отображается в одно множество A_α, используя рассуждения с компактностью, а затем разделив $I \times I$ всеми горизонтальными и вертикальными прямыми, содержащими стороны этих прямоугольников. Можно считать, что s-разбиение является подразбиением тех разбиений, которые дают произведения $f_1 \cdot \ldots \cdot f_k$ и $f'_1 \cdot \ldots \cdot f'_\ell$. Так как F отображает окрестность прямоугольника R_{ij} в A_{ij}, мы можем пошевелить вертикальные стороны прямоугольников R_{ij} так, чтобы каждая точка квадрата $I \times I$ принадлежала не более чем трём прямоугольникам R_{ij}. Можно считать, что есть по крайней мере три ряда прямоугольников, поэтому мы можем шевелить только прямоугольники в промежуточных рядах, оставляя верхний и нижний ряды без изменений. Занумеруем теперь прямоугольники $R_1, R_2, \ldots, R_{mn}$, как показано на рисунке.



Если γ — путь в $I \times I$, идущий из точки левой стороны в точку правой стороны, то $F|_\gamma$ является петлёй с началом и концом в отмеченной точке x_0, так как F отображает левую и правую стороны квадрата $I \times I$ в x_0. Пусть γ_r — путь, отделяющий первые r прямоугольников $R_1, \ldots, R_r$ от остальных прямоугольников. Тогда γ_0 — нижняя сторона квадрата $I \times I$, а γ_{mn} — его верхняя сторона. Будем переходить от γ_r к γ_{r+1}, протаскивая этот путь по прямоугольнику R_{r+1}.

Будем называть вершины прямоугольников R_r *вершинами*. Для каждой вершины v, для которой $F(v) \neq x_0$, рассмотрим путь g_v из x_0 в $F(v)$. Мы можем выбрать путь g_v так, чтобы он принадлежал пересечению двух или трёх множеств A_{ij} в соответствии с тем, сколько прямоугольников R_r содержат вершину v, так как мы предполагаем, что двойные и тройные пересечения множеств A_{ij} линейно связны. Вставим в $F|_{\gamma_r}$ пути вида $\overline{g}_v g_v$ в последовательных вершинах v, как при доказательстве сюръективности отображения Φ. В результате мы получим факторизацию класса $[F|_{\gamma_r}]$. Петли в этой факторизации соответствуют вертикальным и горизонтальным отрезкам между соседними вершинами, через которые проходит путь γ_r. Петлю, соответствующую отрезку между соседними вершинами, можно рассматривать как лежащую в A_{ij} для любого из прямоугольников R_s, содержащих этот отрезок. Если мы выберем другой из этих прямоугольников R_s, то факторизация класса $[F|_{\gamma_r}]$ заменится на эквивалентную факторизацию. При протаскивании пути по прямоугольнику R_{r+1} факторизация $F|_{\gamma_r}$ заменяется на $F|_{\gamma_{r+1}}$ посредством гомотопии в пределах множества A_{ij}, соответствующего R_{r+1}. Это множество A_{ij} можно выбрать одним и тем же для всех отрезков путей γ_r и γ_{r+1}, лежащих в R_{r+1}. Таким образом, факторизации, соответствующие последовательным путям γ_r и γ_{r+1}, эквивалентны.

Мы можем добиться, чтобы факторизация, соответствующая γ_0, была эквивалентна факторизации $[f_1] \ldots [f_k]$, выбирая путь g_v для каждой вершины v вдоль нижней стороны квадрата $I \times I$ так, чтобы он принадлежал не только двум множествам A_{ij}, соответствующим прямоугольнику R_s, содержащему v, но также и множеству A_α, соответствующему пути f_i, в области определения которого лежит точка v. В случае, когда v — общий конец областей определения двух последовательных путей f_i, выполняется равенство $F(v) = x_0$, т. е. путь g_v выбирать не нужно. Аналогично мы можем считать, что факторизация, соответствующая последнему пути γ_{mn}, эквивалентна $[f'_1]\dots[f'_\ell]$. Так как факторизации, соответствующие всем путям γ_r, эквивалентны, мы получаем, что факторизации $[f_1]\dots[f_k]$ и $[f'_1]\dots[f'_\ell]$ эквивалентны. $\square$

Сформулируем отдельно частный случай теоремы ван Кампена, когда покрытие пространства X состоит всего из двух множеств, $X = A\cup B$. В этом случае условие пункта б) теоремы выполнено автоматически. Кроме того, не нужно требовать, чтобы каждое из множеств A и B содержало отмеченную точку, так как можно выбрать новую отмеченную точку в пересечении $A\cap B$.

Следствие 6.4. *Пусть $X = A\cup B$, где множества A и B, а также их пересечение $A\cap B$ открыты и линейно связны. Тогда*

$$\pi_1(X)\cong \big(\pi_1(A)*\pi_1(B)\big)/N,$$

где N — нормальная подгруппа, порождённая элементами вида $i_{AB}(\omega)i_{BA}(\omega)^{-1}$, $\omega\in\pi_1(A\cap B)$, а $i_{AB}\colon \pi_1(A\cap B)\to\pi_1(A)$ и $i_{BA}\colon \pi_1(A\cap B)\to\pi_1(B)$ — гомоморфизмы, индуцированные включениями $A\cap B\hookrightarrow A$ и $A\cap B\hookrightarrow B$.

Группа $\big(\pi_1(A)*\pi_1(B)\big)/N$ называется *амальгамированным произведением* групп $\pi_1(A)$ и $\pi_1(B)$ над $\pi_1(A\cap B)$, см. упражнение 6.13.

Замечание. В случае, когда покрытие пространства X состоит более чем из двух множеств A_α, условие, что каждое A_α содержит отмеченную точку x_0, существенно. Из этого условия следует, что все тройные пересечения непусты.

В качестве ещё одного следствия мы получаем описание фундаментальной группы букета $\bigvee_\alpha X_\alpha$ пространств X_α с отмеченными точками x_α.

Следствие 6.5. *Если каждая точка $x_\alpha\in X_\alpha$ является деформационным ретрактом своей окрестности $U_\alpha\subset X_\alpha$, то имеет место изоморфизм*

$$\pi_1\Big(\bigvee_\alpha X_\alpha\Big)\cong \mathop{*}_\alpha \pi_1(X_\alpha).$$

В частности, для букета окружностей $\bigvee_\alpha S^1$ группа $\pi_1(\bigvee_\alpha S^1)$ свободная.

Доказательство. Каждое пространство X_α является деформационным ретрактом своей окрестности $A_\alpha = X_\alpha\vee\bigvee_{\beta\ne\alpha}U_\beta\subset\bigvee_\alpha X_\alpha$. Пересечение двух и более различных множеств A_α — это пространство $\bigvee_\alpha U_\alpha$, которое стягиваемо. Тогда из теоремы ван Кампена следует, что $\Phi\colon\ *_\alpha\,\pi_1(X_\alpha)\to\pi_1(\bigvee_\alpha X_\alpha)$ — изоморфизм. $\square$

6.3. **Фундаментальная группа клеточного пространства.** Здесь мы научимся задавать фундаментальные группы клеточных пространств образующими и соотношениями. Это позволит нам явно вычислять фундаментальную группу, задав клеточную структуру.

Вначале выведем ещё одно важное следствие теоремы о клеточной аппроксимации.

Предложение 6.6. *Всякое линейно связное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с единственной 0-мерной клеткой.*

Доказательство. Выберем в X нульмерную клетку e_0 и соединим её путями с остальными нульмерными клетками (пути могут пересекаться). Используя теорему о клеточной аппроксимации, мы можем добиться того, чтобы эти пути лежали в одномерном остове X^1. Пусть γ_i — путь, соединяющий нульмерную клетку e_0 с нульмерной клеткой e_i. Для каждого i приклеим к X двумерный диск по отображению нижней полуокружности в X при помощи пути γ_i. Получим новое клеточное пространство $\widetilde{X}$, которое содержит X и, кроме того, клетки e_i^1, e_i^2 (верхние полуокружности и внутренности приклеенных дисков).

Ясно, что X есть деформационный ретракт в $\widetilde{X}$: каждый приклеенный диск можно стянуть на нижнюю полуокружность. Обозначим через Y объединение замыканий клеток e_i^1 (верхних полуокружностей). Очевидно, Y стягиваемо. Следовательно, $\widetilde{X}/Y \simeq \widetilde{X} \simeq X$. Но у $\widetilde{X}/Y$ всего одна нульмерная клетка. $\square$

Пусть X — линейно связное пространство с отмеченной точкой x_0. Отображение $\varphi\colon S^1 \to X$, переводящее отмеченную точку 0 окружности в x_0, можно рассматривать как петлю в (X, x_0), и поэтому оно задаёт элемент $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$. Если же отображение $\varphi\colon S^1 \to X$ переводит 0 в какую-то другую точку $\varphi(0)$, то мы получаем элемент группы $\pi_1(X, \varphi(0))$, которая связана с $\pi_1(X, x_0)$ неканоническим изоморфизмом (см. обсуждение после теоремы 5.3). Таким образом, любое отображение $\varphi\colon S^1 \to X$ задаёт элемент группы $\pi_1(X, x_0)$, определённый с точностью до сопряжения.

Пусть X — клеточное пространство с единственной нульмерной клеткой $e^0 = x_0$, одномерными клетками e_i^1, $i \in I$, и двумерными клетками e_j^2, $j \in J$. Характеристические отображения $D^2 \to X$ двумерных клеток определяют отображения приклеивания $f_j\colon S^1 \to X^1$ (см. §4), которые задают элементы $\beta_j \in \pi_1(X^1)$ с точностью до сопряжения. При этом X^1 — это букет окружностей $\bar{e}_i^1$ и группа $\pi_1(X^1, x_0)$ есть свободная группа с множеством образующих I в силу следствия 6.5.

Теорема 6.7. *Пусть (X, x_0) — линейно связное клеточное пространство с единственной нульмерной клеткой в отмеченной точке x_0. Группа $\pi_1(X, x_0)$ изоморфна факторгруппе свободной группы $\pi_1(X^1, x_0)$ с образующими, отвечающими одномерным клеткам, по соотношениям $\beta_j = 1$, $j \in J$, отвечающим двумерным клеткам.*

Доказательство. Проведём доказательство по индукции по приклеиваемым клеткам размерности $n \geqslant 2$. Если таких клеток нет, то пространство $X = X^1$ — букет сфер и $\pi_1(X)$ — свободная группа с образующими, отвечающими одномерным клеткам.

Пусть $X' = X \cup_f D^n$ получено из X приклеиванием n-мерной клетки e^n при помощи отображения $f\colon S^{n-1} \to X$, т. е. мы имеем кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & X'. \end{array}$$

Внутри клетки e^n выберем точку y. Пусть $A = X' \setminus \{y\}$ и $B = X' \setminus X$. Тогда A деформационно ретрагируется на X, а B стягиваемо. Теперь применим теорему ван Кампена к покрытию $X' = A \cup B$. Так как $\pi_1(A) = \pi_1(X)$, а $\pi_1(B) = \{1\}$, мы получаем, что $\pi_1(X')$ изоморфно факторгруппе группы $\pi_1(A) * \pi_1(B) = \pi_1(X)$ по нормальной подгруппе, порождённой образом отображения $\pi_1(A \cap B) \to \pi_1(A)$.

Далее сначала рассмотрим случай приклеивания двумерной клетки e^2, т. е. $n = 2$. В этом случае $A \cap B$ деформационно ретрагируется на окружность в $e^2 \setminus \{y\}$, и мы получаем, что образ группы $\pi_1(A \cap B)$ в $\pi_1(A)$ — это нормальная подгруппа, порождённая классом петли, задаваемой отображением $f\colon S^1 \to X^1$. Таким образом, при приклеивании новой двумерной клетки e^2 к соотношениям в группе $\pi_1(X) = \pi_1(A)$ добавляется ещё одно соотношение $\beta = 1$, отвечающее этой двумерной клетке.

После того как мы приклеили все двумерные клетки, дальнейшее приклеивание клеток e^n размерности $n \geqslant 3$ не меняет группу $\pi_1(X)$. Это следует из того, что $A \cap B$ деформационно ретрагируется на $(n-1)$-мерную сферу в $e^n \setminus \{y\}$; таким образом, $\pi_1(A \cap B) = \pi_1(S^{n-1}) = \{1\}$ при $n \geqslant 3$ согласно предложению 5.6. □

Пример 6.8. Вычислим фундаментальную группу ориентируемой поверхности S_g рода g (сферы с g ручками). Она имеет клеточную структуру с одной нульмерной клеткой, $2g$ одномерными клетками $a_1, \ldots, a_g$ и $b_1, \ldots, b_g$ и одной двумерной клеткой, см. пример 4.4.6 и рис. 1 г). Одномерный остов — это букет $2g$ окружностей; его фундаментальная группа — свободная группа F_{2g} с образующими $a_1, \ldots, a_g$ и $b_1, \ldots, b_g$. Двумерная клетка приклеена по петле, заданной произведением коммутаторов этих образующих. Поэтому $\pi_1(S_g)$ — факторгруппа свободной группы F_{2g} по одному соотношению, заданному произведением коммутаторов:

$$\pi_1(S_g) \cong \langle\, a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g \,|\, a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdot a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdot \ldots \cdot a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \,\rangle.$$

В частности, фундаментальная группа тора $T^2 = S_1$ изоморфна факторгруппе группы F_2 по соотношению $aba^{-1}b^{-1} = 1$, т.е. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Это, конечно, следует из простой формулы $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ (см. упражнение 5.12).

Предложение 6.9. *Поверхность S_g не гомеоморфна и даже не гомотопически эквивалентна поверхности $S_{g'}$, если $g \neq g'$.*

Доказательство. Группа $\pi_1(S_g)$ получается из свободной группы F_{2g} факторизацией по одному соотношению, которое представляет собой произведение коммутаторов, а значит, лежит в коммутанте F'_{2g}. Поэтому абеленизация группы $\pi_1(S_g)$ совпадает с абеленизацией свободной группы F_{2g} и представляет собой группу $\mathbb{Z}^{2g}$ — свободную абелеву группу ранга $2g$. Если $S_g \simeq S_{g'}$, то $\pi_1(S_g) \cong \pi_1(S_{g'})$, а значит, и абеленизации этих групп изоморфны, откуда следует равенство $g = g'$. □

Пример 6.10. Используя клеточное разбиение проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ (см. пример 4.4.6 и рис. 1 б)), мы получаем, что фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ изоморфна факторгруппе группы $\mathbb{Z}$ (свободной группы с одной образующей a) по одному соотношению $a^2 = 1$. Таким образом, $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \langle\, a \,|\, a^2 \,\rangle = \mathbb{Z}_2$.

Отсюда следует, что проективная плоскость не гомеоморфна ни одной из поверхностей S_g.

Задачи и упражнения.

6.11. Докажите, что абеленизацией группы $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ является $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, и опишите ядро гомоморфизма абеленизации $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

6.12. Покажите, что гомоморфизм $\Phi\colon *_\alpha\, \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ может быть не сюръективным, если не все пересечения $A_\alpha \cap A_\beta$ линейно связны.

6.13. Пусть даны гомоморфизмы групп $f_1\colon H \to G_1$ и $f_2\colon H \to G_2$. Определим *амальгамированное произведение* $G_1 *_H G_2$ групп G_1 и G_2 над H как факторгруппу свободного произведения $G_1 * G_2$ по нормальной подгруппе, порождённой всеми элементами вида $f_1(h) f_2(h)^{-1}$, где $h \in H$.

Докажите, что $G_1 *_H G_2$ входит в кодекартов квадрат

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"] & G_1 \arrow[d] \\ G_2 \arrow[r] & G_1 *_H G_2, \end{tikzcd}$$

т. е. обладает соответствующим универсальным свойством, см. диаграмму (2).

6.14. Пусть $X = A_1 \cup A_2$, где X — клеточное пространство, A_1, A_2 — клеточные подпространства, причём пересечение $B = A_1 \cap A_2$ связно и содержит отмеченную точку $x_0 \in X$, которая является нульмерной клеткой. Мы имеем кодекартов квадрат

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & A_1 \arrow[d, "j_1"'] \\ A_2 \arrow[r, "j_2"] & X. \end{tikzcd}$$

Вычисляя фундаментальные группы всех пространств в этой диаграмме и применяя универсальное свойство амальгамированного произведения (см. предыдущее упражнение), мы получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd} \pi_1(B) \arrow[r, "(i_1)_*"] \arrow[d, "(i_2)_*"] & \pi_1(A_1) \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "(j_1)_*"] & \\ \pi_1(A_2) \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "(j_2)_*"'] & \pi_1(A_1) *_{\pi_1(B)} \pi_1(A_2) \arrow[dr, dashed, "h"] & \\ & & \pi_1(X). \end{tikzcd}$$

Используя теорему ван Кампена, докажите, что гомоморфизм

$$h\colon \pi_1(A_1) *_{\pi_1(B)} \pi_1(A_2) \to \pi_1(A_1 \cup_B A_2)$$

является изоморфизмом ($X = A_1 \cup_B A_2$). Таким образом, функтор π_1 переводит амальгамы клеточных пространств в амальгамы групп.

6.15. Найдите фундаментальную группу дополнения окружности в $\mathbb{R}^3$.

6.16. Докажите, что дополнение двух незацепленных окружностей в $\mathbb{R}^3$ не гомеоморфно дополнению двух зацепленных окружностей.

6.17. Найдите фундаментальную группу дополнения трёх координатных осей в $\mathbb{R}^3$.

6.18. Линейно связное пространство X называется *односвязным*, если $\pi_1(X) = 0$. Докажите, что всякое односвязное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с одной 0-мерной клеткой и без 1-мерных клеток.

6.19. Опишите фундаментальную группу бутылки Клейна K, используя клеточное разбиение из примера 4.4.6 и рис. 1 в). Докажите, что

$$\pi_1(K) \cong \langle\, c_1, c_2 \mid c_1^2 c_2^2 \,\rangle.$$

Опишите абеленизацию группы $\pi_1(K)$ и выведите отсюда, что бутылка Клейна не гомеоморфна проективной плоскости и не гомеоморфна ни одной из поверхностей S_g.

6.20. Пусть P_g — проективная плоскость с g ручками, а K_g — бутылка Клейна с g ручками (см. пример 4.4.6). Докажите, что фундаментальная группа поверхности P_g или K_g изоморфна факторгруппе свободной группы с образующими $c_1, \ldots, c_k$ по одному соотношению $c_1^2 \cdot \ldots \cdot c_k^2 = 1$, где $k = 2g + 1$ для P_g и $k = 2g + 2$ для K_g. Докажите, что поверхности S_g, P_g, K_g попарно не гомеоморфны.

6.21. Вычислите фундаментальные группы пространств $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$.

6.22. Постройте клеточное пространство с фундаментальной группой $\mathbb{Z}_3$ (циклическая группа из трёх элементов).

6.23. Докажите, что всякая группа является фундаментальной группой некоторого клеточного пространства.

7. Накрытия

7.1. **Определение и примеры.** Линейно связное пространство $\widetilde{X}$ называется *накрывающим пространством* для линейно связного пространства X, если задано такое отображение $p\colon \widetilde{X} \to X$, что у любой точки $x \in X$ имеется окрестность $U \subset X$, для которой $p^{-1}(U)$ гомеоморфно $U \times \Gamma$, где Γ — дискретное множество, причём диаграмма

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \Gamma \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Другими словами, $p^{-1}(U)$ является объединением непересекающихся открытых множеств в $\widetilde{X}$, каждое из которых p гомеоморфно отображает на U. Отображение $p\colon \widetilde{X} \to X$ называется *накрытием*.

Пример 7.1.

1. Отображение $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Это накрытие использовалось при доказательстве изоморфизма $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ (теорема 5.7).
2. Отображение $q_k\colon S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^k$, $k \in \mathbb{Z}$, где $S^1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$.
3. Отображение $p\colon S^n \to \mathbb{R}P^n$, которое переводит точку сферы в прямую в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящую через эту точку и $\mathbf{0}$ (см. пример 4.4.3).

Ясно, что если $p_1\colon \widetilde{X}_1 \to X_1$ и $p_2\colon \widetilde{X}_2 \to X_2$ — накрытия, то и $p_1 \times p_2\colon \widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$ — накрытие. В частности, квадрат накрытия из примера 7.1.1 даёт накрытие $\mathbb{R}^2 \to T^2$ тора $T^2 = S^1 \times S^1$ плоскостью.

7.2. **Свойство поднятия гомотопии.** Говорят, что отображение $p\colon Y \to X$ обладает *свойством поднятия гомотопии* (covering homotopy property, CHP) по отношению к пространству Z, если для любого отображения $f\colon Z \to Y$ и такой гомотопии $F\colon Z \times I \to X$, что $p \circ f = F_0$, существует *накрывающая* гомотопия $\widetilde{F}\colon Z \times I \to Y$, для которой $\widetilde{F}_0 = f$ и $p \circ \widetilde{F} = F$. Это описывается следующей диаграммой:

(4)
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{F}"] & X, \end{tikzcd}$$

где i_0 — вложение $z \mapsto (z, 0)$.

Ниже мы покажем, что накрытия $p\colon \widetilde{X} \to X$ обладают свойством поднятия гомотопии, причём накрывающая гомотопия единственна. При $Z = pt$ свойство поднятия гомотопии (4) превращается в *свойство поднятия путей*:

Лемма 7.2. *Для любого пути $\gamma\colon I \to X$ и любой такой точки $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, что $p(\widetilde{x}) = \gamma(0)$, существует единственный путь $\widetilde{\gamma}\colon I \to \widetilde{X}$, для которого $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{x}$ и $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$.*

Доказательство. Окрестности из определения накрытия мы будем называть *элементарными*. Для каждого $t \in I$ найдём элементарную окрестность $U(t) \subset X$ точки $\gamma(t)$. В силу компактности отрезка I из этих окрестностей можно выбрать последовательность $U_1, \ldots, U_N$ таким образом, что $U_i \supset \gamma(t_i, t_{i+1})$, где $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{N+1} = 1$. Прообраз $p^{-1}(U_1)$ гомеоморфен дискретному набору таких же окрестностей. Пусть $\widetilde{U}_1$ — та из них, которая содержит точку $\widetilde{x}$. Определим $\widetilde{\gamma}\colon [0, t_2] \to \widetilde{U}_1$ как прообраз куска $\gamma|_{[0,t_2]}$ пути γ от $0 = t_1$ до t_2, который попадает в U_1. Затем проделаем то же самое с окрестностью U_2, точкой $\widetilde{\gamma}(t_2)$ и куском пути $\gamma|_{[t_2,t_3]}$ и т.д. Так как число окрестностей конечно, процесс конечен, а так как для каждой окрестности он однозначен, путь с нужными свойствами существует только один. □

Теорема 7.3 (о поднятии гомотопии)**.** *Накрытие $p\colon \widetilde{X} \to X$ обладает свойством поднятия гомотопии по отношению к любому пространству Z, причём накрывающая гомотопия $\widetilde{F}\colon Z \times I \to \widetilde{X}$ (см. диаграмму (4)) единственна.*

Доказательство. Пусть даны отображение $f\colon Z \to \widetilde{X}$ и гомотопия $F\colon Z \times I \to X$. Перейдя к сопряжённому, получаем отображение $F'\colon Z \to X^I$, переводящее точку $z \in Z$ в путь $t \mapsto F(z, t)$ в пространстве X. В силу леммы 7.2 этот путь единственным образом поднимается до пути в $\widetilde{X}$, который начинается в точке $f(z) \in \widetilde{X}$. Таким образом, существует единственное отображение $\widetilde{F}'\colon Z \to \widetilde{X}^I$, входящее в диаграмму

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} & \widetilde{X}^I \arrow[l, "p_0"'] \arrow[d] \\ Z \arrow[u, "f"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{F}'"] \arrow[r, "F'"'] & X^I, \end{tikzcd}$$

где p_0 — отображение, сопоставляющее пути его начальную точку. Переходя обратно от сопряжённых отображений к исходным, получим диаграмму

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[ur, dashed, "\widetilde{F}"] \arrow[r, "F"'] & X, \end{tikzcd}$$

которая и выражает требуемое свойство поднятия гомотопии с единственной накрывающей гомотопией. Необходимо проверить непрерывность построенных отображений $\widetilde{F}'$ и $\widetilde{F}$; это будет следовать из более общей теоремы 7.6 о поднятии отображения, доказываемой ниже. □

7.3. **Накрытия и фундаментальная группа.**

Теорема 7.4. *Гомоморфизм*

$$p_*\colon \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0),$$

индуцированный накрытием $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$, *является мономорфизмом. Подгруппа* $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ *в* $\pi_1(X, x_0)$ *состоит из гомотопических классов петель в* X *с началом в* x_0, *поднятия которых в* $\widetilde{X}$ *с началом в* $\widetilde{x}_0$ *являются петлями.*

Доказательство. Надо доказать, что если петля $\widetilde{\varphi}\colon I \to \widetilde{X}$ с началом $\widetilde{x}_0$ проектируется в петлю $\varphi\colon I \to X$, гомотопную нулю (т. е. гомотопную постоянной петле), то и сама петля $\widetilde{\varphi}$ гомотопна нулю. Фиксируем гомотопию $\varphi_t\colon I \to X$, для которой $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_t(0) = \varphi_t(1) = x_0$, $\varphi_1(I) = x_0$. По теореме о поднятии гомотопии существует гомотопия $\widetilde{\varphi}_t\colon I \to \widetilde{X}$, для которой $\widetilde{\varphi}_0 = \widetilde{\varphi}$ и $p \circ \widetilde{\varphi}_t = \varphi_t$. Таким образом, для любого $t \in [0,1]$ петля $\varphi_t\colon I \to X$ поднимается до пути $\widetilde{\varphi}_t\colon I \to \widetilde{X}$. При изменении t начало $\widetilde{\varphi}_t(0)$ поднятого пути проходит некоторый путь в слое $p^{-1}(x_0)$ над x_0. Но так как слой — дискретное пространство, этот путь в слое постоянен (непрерывное отображение из связного пространства I в дискретное пространство является постоянным). Поэтому $\widetilde{\varphi}_t(0) = \widetilde{\varphi}(0) = \widetilde{x}_0$. Аналогично $\widetilde{\varphi}_t(1) = \widetilde{\varphi}(1) = \widetilde{x}_0$. Наконец, $\widetilde{\varphi}_1(I) = \widetilde{x}_0$ по тем же соображениям ($\widetilde{\varphi}_1$ есть непрерывное отображение из I в $p^{-1}(x_0)$). Таким образом, $\widetilde{\varphi}_t\colon I \to \widetilde{X}$ есть гомотопия петли $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}_0$ в постоянную петлю $\widetilde{\varphi}_1$.

Докажем теперь второе утверждение. Петли с началом и концом в x_0, поднимающиеся до петель с началом и концом в $\widetilde{x}_0$, очевидно, представляют элементы образа отображения $p_*\colon \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Наоборот, петля, представляющая элемент образа отображения p_*, гомотопна петле, у которой есть такое поднятие, поэтому согласно свойству поднятия гомотопии и у неё самой должно быть такое поднятие. □

Напомним, что *индексом* подгруппы $H \subset G$ называется мощность множества смежных классов Hg, $g \in G$. Если H — нормальная подгруппа, то индекс подгруппы H в G — это порядок факторгруппы G/H.

Предложение 7.5. *Число точек в прообразе* $p^{-1}(x_0)$ *при накрытии* $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *равно индексу подгруппы* $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ *в* $\pi_1(X, x_0)$.

Доказательство. Пусть $H = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$. Для петли φ в X с началом и концом в x_0 пусть $\widetilde{\varphi}$ — её поднятие в $\widetilde{X}$, начинающееся в точке $\widetilde{x}_0$. Определим отображение Φ из множества смежных классов $\{H[\varphi],\ [\varphi] \in \pi_1(X, x_0)\}$ в $p^{-1}(x_0)$, переводящее $H[\varphi]$ в $\widetilde{\varphi}(1)$. Отображение Φ определено корректно, поскольку произведение $\psi \cdot \varphi$, где $[\psi] \in H$, имеет поднятие $\widetilde{\psi} \cdot \widetilde{\varphi}$, заканчивающееся в той же точке, что и $\widetilde{\varphi}$, так как $\widetilde{\psi}$ — петля.

Из линейной связности пространства $\widetilde{X}$ следует, что Φ сюръективно, так как точку $\widetilde{x}_0$ можно соединить с любой точкой в $p^{-1}(x_0)$ путём $\widetilde{\varphi}$, проектирующимся в петлю φ с началом и концом в x_0. Кроме того, Φ инъективно: из равенства $\Phi(H[\varphi]) = \Phi(H[\varphi'])$ следует, что $\varphi \cdot \overline{\varphi}'$ поднимается до петли в $\widetilde{X}$ с началом и концом в $\widetilde{x}_0$, поэтому $[\varphi][\varphi']^{-1} \in H$, а значит, $H[\varphi] = H[\varphi']$. Итак, Φ — биекция. □

7.4. **Теорема о поднятии отображений.** Выясним, как обстоит дело с поднятием произвольных отображений, а не только гомотопий.

Пространство X называется *локально линейно связным*, если для любой точки $x \in X$ и любой окрестности U точки x найдётся линейно связная окрестность $V \subset U$.

Теорема 7.6 (о поднятии отображения)**.** *Пусть* $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *— накрытие и* $f\colon (Z, z_0) \to (X, x_0)$ *— отображение из линейно связного пространства* Z *с отмеченной точкой* z_0.

а) *Существует не более одного такого отображения* $\widetilde{f}\colon (Z, z_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$, *что* $p \circ \widetilde{f} = f$ *(поднятия).*

б) *Если* Z *локально линейно связно, то для существования поднятия необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение*

$$f_*\pi_1(Z, z_0) \subset p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0).$$

Доказательство. Докажем утверждение а). Пусть $\widetilde{f}$ и $\widetilde{f}'$ — два поднятия. Если $z \in Z$ — произвольная точка и $\gamma\colon I \to Z$ — путь из z_0 в z, то пути $\widetilde{f}\gamma$ и $\widetilde{f}'\gamma$ накрывают путь $f\gamma$ и имеют общее начало, вследствие чего они совпадают. Поэтому $\widetilde{f}(z) = (\widetilde{f}\gamma)(1) = (\widetilde{f}'\gamma)(1) = \widetilde{f}'(z)$.

Теперь докажем утверждение б). Мы можем попытаться построить отображение $\widetilde{f}$ следующим образом. Пусть $z \in Z$. Возьмём путь $\gamma\colon I \to Z$ из z_0 в z и для пути $f\gamma\colon I \to X$ построим поднятие $\widetilde{f\gamma}\colon I \to \widetilde{X}$ с началом в точке $\widetilde{x}_0$. Затем положим $\widetilde{f}(z) = \widetilde{f\gamma}(1)$. Для того чтобы эта конструкция была корректной, необходимо и достаточно, чтобы для любого другого пути $\gamma'\colon I \to Z$ из z_0 в z соответствующий путь $\widetilde{f\gamma'}$ заканчивался в той же точке, что и $\widetilde{f\gamma}$, т.е. чтобы петля $f \circ (\gamma\overline{\gamma}')$ накрывалась в $\widetilde{X}$ петлёй. Это равносильно условию, указанному в части б) теоремы.

Кроме того, необходимо проверить непрерывность отображения $\widetilde{f}$. Пусть $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$ — окрестность точки $\widetilde{f}(z)$. Перейдя, если необходимо, к меньшей окрестности, мы можем считать, что $p\colon \widetilde{U} \to U$ — гомеоморфизм на некоторую окрестность U точки $f(z) \subset X$. Выберем линейно связную окрестность V точки z, для которой $f(V) \subset U$. В качестве путей из z_0 в разные точки $z' \subset V$ можно взять фиксированный путь γ из z_0 в z, который продолжается разными путями η в V из точки z в z'. Тогда пути $(f\gamma) \cdot (f\eta)$ в X имеют поднятия $(\widetilde{f\gamma}) \cdot (\widetilde{f\eta})$, где $\widetilde{f\eta} = p^{-1}(f\eta)$ и $p^{-1}\colon U \to \widetilde{U}$ — отображение, обратное к $p\colon \widetilde{U} \to U$. Таким образом, $\widetilde{f}(V) \subset \widetilde{U}$, поэтому отображение $\widetilde{f}$ непрерывно в точке z. □

7.5. **Универсальное накрытие.** Так как отображение $p_*\colon \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ является мономорфизмом, возникает вопрос, любая ли подгруппа в $\pi_1(X, x_0)$ реализуется в виде $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ для некоторого накрытия $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$. Ниже мы увидим, что ответ на этот вопрос положителен. Вначале рассмотрим вопрос о реализуемости тривиальной подгруппы $\{1\}$. Так как p_* — мономорфизм, это сводится в вопросу о существовании односвязного накрывающего пространства для X.

Пространство X называется *полулокально односвязным*, если для любой точки $x \in X$ и её окрестности $V \ni x$ существует такая меньшая окрестность $U \subset V$, что индуцированное включением отображение $\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ тривиально. Открытые множества U с этим свойством образуют базу топологии полулокально односвязного пространства X.

Теорема 7.7. *Пусть* X *— линейно связное, локально линейно связное и полулокально односвязное пространство. Тогда существует накрытие* $p\colon \widetilde{X} \to X$ *с односвязным пространством* $\widetilde{X}$.

Доказательство. Пусть $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ — накрытие с односвязным $\widetilde{X}$. Тогда любую точку $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ можно соединить путём с $\widetilde{x}_0$ и этот путь единствен с точностью до гомотопии, сохраняющей концы путей. Поэтому $\widetilde{X}$ можно отождествить с множеством гомотопических классов путей в $\widetilde{X}$ с фиксированным началом $\widetilde{x}_0$. С другой стороны, такие гомотопические классы — это в точности гомотопические классы путей в X с фиксированным началом x_0 в силу единственности поднятия путей. Мы приходим к следующему определению:

$$\widetilde{X} = \{[\gamma]\colon \gamma \text{ путь в } X, \text{ выходящий из точки } x_0\},$$

где, как обычно, $[\gamma]$ обозначает гомотопический класс пути γ относительно гомотопий, которые оставляют начало и конец пути неподвижными. Мы имеем отображение

$$p\colon \widetilde{X} \to X, \quad [\gamma] \mapsto \gamma(1).$$

Так как X линейно связно, конец $\gamma(1)$ может быть любой точкой в X, поэтому отображение p сюръективно. Ниже мы введём топологию на $\widetilde{X}$ и докажем, что $p\colon \widetilde{X} \to X$ — накрытие, а $\widetilde{X}$ односвязно.

Пусть $\mathcal{U}$ — набор всех таких линейно связных открытых подмножеств $U \subset X$, что отображение $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ тривиально. Так как X локально линейно связно и полулокально односвязно, $\mathcal{U}$ — база топологии на X (т.е. любое открытое множество из X представляется в виде объединения множеств из $\mathcal{U}$).

Пусть даны $U \subset \mathcal{U}$ и путь γ в X из точки x_0 в некоторую точку в U. Положим

$$U_{[\gamma]} = \{[\gamma \cdot \eta]\colon \eta \text{ — путь в } U, \text{ для которого } \eta(0) = \gamma(1)\}.$$

Отображение $p\colon U_{[\gamma]} \to U$ сюръективно, так как U линейно связно, и инъективно, так как все пути η из $\gamma(1)$ в $x \in U$ гомотопны в X, поскольку отображение $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ тривиально. Имеется следующее свойство:

(*) $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$, если $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$. Действительно, если $\gamma' = \gamma \cdot \eta$, то элементы множества $U_{[\gamma']}$ имеют вид $[\gamma \cdot \eta \cdot \mu]$ и потому лежат в $U_{[\gamma]}$. Аналогично элементы множества $U_{[\gamma]}$ имеют вид $[\gamma \cdot \mu] = [\gamma \cdot \eta \cdot \overline{\eta} \cdot \mu] = [\gamma' \cdot \overline{\eta} \cdot \mu]$ и потому лежат в $U_{[\gamma']}$.

Мы зададим топологию на $\widetilde{X}$, взяв в качестве базы набор множеств $U_{[\gamma]}$. Чтобы проверить, что этот набор можно взять в качестве базы, нужно доказать, что в любом пересечении $U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$ содержится множество такого вида. Пусть $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$. Тогда $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma'']}$ и $V_{[\gamma']} = V_{[\gamma'']}$. Пусть $W \in \mathcal{U}$ содержится в $U \cap V$ и содержит $\gamma''(1)$. Тогда $W_{[\gamma'']} \subset U_{[\gamma'']} \cap V_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$.

Взаимно однозначное отображение $p\colon U_{[\gamma]} \to U$ является гомеоморфизмом, так как оно задаёт взаимно однозначное соответствие между множествами $V_{[\gamma']} \subset U_{[\gamma']}$ и множествами $V \in \mathcal{U}$, содержащимися в U. Следовательно, отображение $p\colon \widetilde{X} \to X$ непрерывно. Оно является накрытием, так как для фиксированного $U \in \mathcal{U}$ множества $U_{[\gamma]}$ для разных $[\gamma]$ задают разбиение $p^{-1}(U)$ на непересекающиеся множества, потому что если $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']}$, то $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']} = U_{[\gamma'']}$ по свойству $(*)$.

Остаётся показать, что $\widetilde{X}$ односвязно. Для данной точки $[\gamma] \in \widetilde{X}$ пусть γ_t — путь в X, который совпадает с γ на $[0, t]$ и остаётся в одной и той же точке $\gamma(t)$ на $[t, 1]$. Тогда отображение $t \mapsto [\gamma_t]$ есть путь в $\widetilde{X}$, который является поднятием пути γ, начинается в $[x_0]$ (гомотопическом классе постоянного пути в x_0) и заканчивается в $[\gamma]$. Так как $[\gamma] \in \widetilde{X}$ — произвольная точка, это показывает, что $\widetilde{X}$ линейно связно. Чтобы проверить, что $\pi_1(\widetilde{X}, [x_0]) = 0$, достаточно показать, что $p_*\pi_1(\widetilde{X}, [x_0]) = 0$. Элементы в образе гомоморфизма p_* представлены петлями γ в (X, x_0), которые поднимаются до петель в $(\widetilde{X}, [x_0])$. Мы уже отметили, что путь $t \mapsto [\gamma_t]$ является поднятием пути γ и начинается в $[x_0]$. То, что этот путь является петлёй, означает, что $[\gamma] = [x_0]$. Следовательно, петля γ стягиваема и образ гомоморфизма p_* тривиален. □

Предложение 7.8. *Пусть $p\colon \widetilde{X} \to X$ — накрытие с односвязным $\widetilde{X}$. Тогда для любого другого накрытия $q\colon Y \to X$ существует такое накрытие $r\colon \widetilde{X} \to Y$, что $q \circ r = p$.*

Доказательство. Это следует из теоремы 7.6 (о поднятии отображения). □

Благодаря этому свойству накрытие $p\colon \widetilde{X} \to X$ с односвязным $\widetilde{X}$ называется *универсальным* накрытием над X. Из доказанной ниже теоремы 7.11 следует, что универсальное накрытие единственно с точностью до изоморфизма.

Пример 7.9. Накрытие $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, из примера 7.1.1 универсально, так как $\mathbb{R}$ односвязно. Рассмотрим k-листное накрытие $q_k\colon S^1 \to S^1$ из примера 7.1.2. Тогда поднятие $r_k\colon \mathbb{R} \to S^1$ имеет вид $t \mapsto (\cos \frac{2\pi t}{k}, \sin \frac{2\pi t}{k})$, $q_k \circ r_k = p$.

Пример 7.10. Отображение $S^n \to \mathbb{R}P^n$ из примера 4.4.3 является универсальным накрытием при $n \geqslant 2$. Так как это накрытие двулистно, из предложения 7.5 следует, что тривиальная подгруппа имеет индекс 2 в $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$. Поэтому $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$, $n \geqslant 2$.

7.6. **Классификация накрытий.** *Изоморфизмом* накрытий $p_1\colon Y_1 \to X$ и $p_2\colon Y_2 \to X$ называется такой гомеоморфизм $f\colon Y_1 \to Y_2$, что $p_1 = p_2 f$. Аналогично определяется изоморфизм $f\colon (Y_1, y_1) \to (Y_2, y_2)$ накрытий $p_1\colon (Y_1, y_1) \to (X, x_0)$ и $p_2\colon (Y_2, y_2) \to (X, x_0)$ над пространством с отмеченной точкой.

Теорема 7.11. *Пусть X — линейно связное, локально линейно связное и полулокально односвязное пространство. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством классов изоморфных накрытий $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ (с сохранением отмеченной точки) и множеством подгрупп в $\pi_1(X, x_0)$. При этом соответствии накрытие p переходит в подгруппу $p_*\pi_1(Y, y_0)$.*

Доказательство. Сначала покажем, что соответствие сюръективно, т. е. для любой подгруппы $H \subset \pi_1(X, x_0)$ существует такое накрытие $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$, что $p_*\pi_1(Y, y_0) = H$. Зададим следующее отношение эквивалентности на односвязном (универсальном) накрывающем пространстве $\widetilde{X}$, введённом в теореме 7.7:

$$[\gamma] \sim [\gamma'], \text{ если } \gamma(1) = \gamma'(1) \text{ и } [\gamma][\gamma']^{-1} \in H.$$

Положим $Y = \widetilde{X}/\!\sim$. Заметим, что если $\gamma(1) = \gamma'(1)$, то $[\gamma] \sim [\gamma']$ тогда и только тогда, когда $[\gamma\eta] \sim [\gamma'\eta]$. Это означает, что если какие-либо две точки в базовых открытых множествах $U_{[\gamma]}$ и $U_{[\gamma']}$ отождествляются в Y, то эти открытые множества отождествляются целиком. Следовательно, проекция $p\colon \widetilde{X}/\!\sim\, = Y \to X$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$, является накрытием.

Возьмём в качестве отмеченной точки $y_0 \in Y$ класс эквивалентности $[x_0]$ постоянного пути в точке x_0. Тогда $p_*\pi_1(Y, y_0) = H$. Действительно, для петли γ в (X, x_0) её поднятие в $\widetilde{X}$, начинающееся в $[x_0]$, заканчивается в $[\gamma]$, поэтому образ этого поднятого пути в $Y = \widetilde{X}/\!\sim$ будет петлёй тогда и только тогда, когда $[\gamma] \sim [x_0]$, а это эквивалентно тому, что $[\gamma] \in H$.

Теперь покажем, что соответствие инъективно, т. е. накрытия $p_1\colon (Y_1, y_1) \to (X, x_0)$ и $p_2\colon (Y_2, y_2) \to (X, x_0)$, для которых $p_{1*}(\pi_1(Y_1, y_1)) = p_{2*}(\pi_1(Y_2, y_2))$, изоморфны. Действительно, по теореме о поднятии отображения мы можем поднять p_1 до отображения $\widetilde{p}_1\colon (Y_1, y_1) \to (Y_2, y_2)$, для которого $p_2\widetilde{p}_1 = p_1$. Аналогично получаем отображение $\widetilde{p}_2\colon (Y_2, y_2) \to (Y_1, y_1)$, для которого $p_1\widetilde{p}_2 = p_2$. Отсюда следует, что $p_2\widetilde{p}_1\widetilde{p}_2 = p_2$. Тогда согласно единственности поднятия мы имеем $\widetilde{p}_1\widetilde{p}_2 = \mathrm{id}$. Аналогично $\widetilde{p}_2\widetilde{p}_1 = \mathrm{id}$. Таким образом, $\widetilde{p}_1$ и $\widetilde{p}_2$ — обратные изоморфизмы. □

7.7. **Графы, свободные группы и теорема Нильсена–Шрайера.** В качестве приложения теории накрытий мы докажем важную алгебраическую теорему о том, что подгруппа свободной группы свободна. Доказательство будет использовать ряд фактов из теории графов, которые мы легко докажем, используя результаты о клеточных пространствах.

Графом называется одномерное клеточное пространство X. Нульмерные клетки называются *вершинами* графа X, а одномерные клетки — его *рёбрами*. *Подграф* графа X — это клеточное подпространство $Y \subset X$ (замкнутое подмножество, которое является объединением вершин и рёбер). *Дерево* — это стягиваемый граф. Подграф-дерево в X называют *максимальным*, если оно содержит все вершины графа X.

Предложение 7.12. *Любой связный граф X содержит максимальное дерево, и любое дерево в графе содержится в некотором максимальном дереве.*

Доказательство. Мы опишем конструкцию, которая для каждого подграфа $X_0 \subset X$ даёт подграф $Y \subset X$, содержащий все вершины графа X, и деформационную ретракцию $Y \overset{\simeq}{\to} X_0$. В частности, взяв в качестве X_0 одну вершину или любое поддерево, мы получим требуемое утверждение.

Вначале построим последовательность подграфов $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots$, где X_{i+1} получается из X_i добавлением замыканий $\overline{e}_\alpha$ всех рёбер $e_\alpha \subset X \setminus X_i$, имеющих по крайней мере один конец в X_i. Объединение $\bigcup_i X_i$ открыто в X, так как каждая точка из X_i имеет окрестность, содержащуюся в X_{i+1}. Более того, множество $\bigcup_i X_i$ замкнуто по аксиоме (W) клеточного пространства, как объединение замыканий клеток. Поэтому $X = \bigcup_i X_i$, так как граф X связен.

Теперь, чтобы построить Y, положим вначале $Y_0 = X_0$. Предположим по индукции, что уже построен граф $Y_i \subset X_i$, содержащий все вершины графа X_i. Рассмотрим граф Y_{i+1}, который получается из Y_i путём добавления для каждой вершины из $X_{i+1} \setminus X_i$ одного ребра, соединяющего эту вершину с Y_i. Очевидно, что имеется деформационная ретракция $Y_{i+1} \overset{\simeq}{\to} Y_i$. Теперь положим $Y = \bigcup_i Y_i$. Тогда можно получить деформационную ретракцию графа Y на $Y_0 = X_0$, деформационно ретрагируя Y_{i+1} на Y_i в течение времени из промежутка $[\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i}]$. Тогда точка $x \in Y_{i+1} \setminus Y_i$ остаётся неподвижной до этого промежутка, во время которого она перемещается в Y_i, а после этого продолжает перемещаться, пока не достигнет Y_0. Полученная гомотопия $h_t\colon Y \to Y$ непрерывна, так как она непрерывна на замыкании каждого ребра. □

Предложение 7.13. *Пусть X — связный граф с максимальным деревом T. Тогда $\pi_1(X)$ — свободная группа с базисом, элементы которого соответствуют ребрам из $X \setminus T$.*

Доказательство. Проекция $X \to X/T$ является гомотопической эквивалентностью согласно следствию 4.8. Факторпространство X/T является графом с одной вершиной, а потому является букетом окружностей. Поэтому $\pi_1(X) \cong \pi_1(X/T)$ — свободная группа с базисом, элементы которого соответствуют рёбрам, не попавшим в T. □

Следствие 7.14. *Граф является деревом тогда и только тогда, когда он односвязен.*

Лемма 7.15. *Любое накрывающее пространство графа X также является графом.*

Доказательство. Пусть $p\colon Y \to X$ — накрытие. В качестве вершин графа Y мы берём дискретное множество $Y^0 = p^{-1}(X^0)$. В качестве ребёр графа Y мы берём всевозможные поднятия характеристических отображений $I_\alpha \to X$ одномерных клеток e_α пространства X (т. е. ребёр графа X). Такие поднятия начинаются и заканчиваются в точках из Y^0, причём для каждой точки из $p^{-1}(x)$, где $x \in e_\alpha$, существует единственное поднятие, проходящее через эту точку. Это задаёт структуру графа на Y. Получающаяся при этом топология на Y та же самая, что и исходная топология, так как обе топологии имеют одни и те же базовые открытые множества, поскольку проекция $p\colon Y \to X$ является локальным гомеоморфизмом. □

Теорема 7.16 (Нильсен–Шрайер)**.** *Любая подгруппа свободной группы F свободна.*

Доказательство. Пусть X — граф, для которого $\pi_1(X) = F$, например букет окружностей. Для каждой подгруппы $G \subset F$ согласно теореме 7.11 существует накрытие $p\colon Y \to X$, для которого $p_*\pi_1(Y) = G$, т.е. $\pi_1(Y) \cong G$, так как p_* инъективно. По предыдущей лемме Y — граф, поэтому группа $G \cong \pi_1(Y)$ свободна согласно предложению 7.13. □

В отличие от ситуации со свободными абелевыми группами, подгруппа $G \subset F$ свободной группы F может иметь больший ранг, чем группа F. Примеры приведены в задачах ниже.

Задачи и упражнения.

7.17. Постройте накрытие букета двух окружностей пространством, гомотопически эквивалентным букету n окружностей при $n \geqslant 2$. Постройте накрытие поверхности S_2 (кренделя) поверхностью S_g (сферой с g ручками) при $g \geqslant 2$.

7.18. Докажите, что для накрытия $p\colon \widetilde{X} \to X$ и любых точек $x, x' \in X$ имеется взаимно однозначное соответствие между дискретными множествами $p^{-1}(x)$ и $p^{-1}(x')$. Мощность множества $p^{-1}(x)$ называется *числом листов накрытия p*.

7.19. Накрытие $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ называется *регулярным*, если подгруппа $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ является нормальной в $\pi_1(X, x_0)$. Докажите, что накрытие p регулярно тогда и только тогда, когда никакая петля в X не является образом одновременно замкнутого пути и незамкнутого пути в $\widetilde{X}$.

7.20. Докажите, что если $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ — регулярное накрытие, то существует такое свободное действие группы $G = \pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ на пространстве $\widetilde{X}$, что $X = \widetilde{X}/G$ (т. е. орбиты действия совпадают с множествами $p^{-1}(x)$). Определение действия группы и пространства орбит см. в примере 1.10. Действие группы G на X называется *свободным*, если для любого $g \neq e$ и $x \in X$ имеем $gx \neq x$.

7.21. Действие группы G на пространстве Y называется *дискретным*, если каждая точка $y \in Y$ обладает такой окрестностью U, что множества gU, $g \in G$, попарно не пересекаются. Докажите, что если группа G действует на Y свободно и дискретно, то естественная проекция $p\colon Y \to X = Y/G$ является регулярным накрытием. Более того, в этом случае $\pi_1(X)/p_*\pi_1(Y) = G$.

7.22. Докажите, что двулистные накрытия регулярны. Постройте пример нерегулярного трёхлистного накрытия над букетом двух окружностей и над кренделем.

7.23. Докажите, что условие полулокальной односвязности пространства X необходимо для существования односвязного накрывающего пространства $\widetilde{X}$.

7.24. Постройте пример не полулокально односвязного пространства.

7.25. Пространство X называется *локально односвязным*, если для любой точки $x \in X$ и её окрестности $V \ni x$ существует такая меньшая окрестность $U \subset V$, что $\pi_1(U, x) = 0$. Постройте пример полулокально односвязного, но не локально односвязного пространства.

7.26. Постройте универсальное накрытие над букетом $S^1 \vee S^2$.

7.27. Постройте универсальное накрытие над букетом $S^1 \vee S^1$.

7.28. Докажите следующую версию теоремы 7.11, в которой не учитываются отмеченные точки: имеется взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных накрытий $p\colon Y \to X$ и классами сопряжённости подгрупп в $\pi_1(X, x_0)$.

7.29. Докажите, что максимальное дерево максимально в том смысле, что оно не содержится ни в каком большем дереве.

7.30. Пусть $G \subset F_2$ — подгруппа свободной группы ранга 2 (с образующими a и b), состоящая из слов чётной длины. Найдите ранг группы G. Опишите накрытие над букетом $S^1 \vee S^1$, реализующее подгруппу G в $\pi_1(S^1 \vee S^1) = F_2$.

7.31. Пусть $G = [F_2, F_2] \subset F_2$ — коммутант свободной группы ранга 2. Докажите, что G — свободная группа бесконечного ранга. Опишите накрытие над букетом $S^1 \vee S^1$, реализующее подгруппу G в $\pi_1(S^1 \vee S^1) = F_2$.

8. Расслоения

Накрытие локально устроено как произведение на дискретное множество Γ. Обобщение понятия накрытия, при котором дискретное множество заменяется на произвольное топологическое пространство F, приводит к понятию расслоения.

8.1. **Локально тривиальные расслоения. Свойство поднятия гомотопии.** *Локально тривиальным расслоением* называется четвёрка (E, B, F, p), где E, B, F — пространства, а p — такое отображение $E \to B$, что любая точка $x \in B$ имеет окрестность $U \subset B$, для которой существует гомеоморфизм $\varphi\colon p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Пространство E называется *тотальным пространством*, B — *базой*, а F – *слоем* локально тривиального расслоения. Локально тривиальным расслоением также называют отображение $p\colon E \to B$. Прообраз $p^{-1}(x)$ точки $x \in B$ называется *слоем расслоения над точкой* x; очевидно, этот слой гомеоморфен F.

Локально тривиальное расслоение называется *тривиальным*, если в приведённой выше диаграмме можно положить $U = B$; это, в частности, означает, что $E \cong B \times F$.

Пример 8.1.

1. Накрытие является локально тривиальным расслоением с дискретным слоем F.

2. Проекция ленты Мёбиуса на её среднюю линию представляет собой нетривиальное расслоение над окружностью со слоем отрезок.

3. Пусть $E = S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \colon |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$, $B = \mathbb{C}P^1 = S^2$, $p(z_0, z_1) = [z_0 : z_1]$. Получаем локально тривиальное расслоение $p\colon S^3 \to S^2$ со слоем $F = S^1$, которое называется *расслоением Хопфа*. В качестве множеств U из определения расслоения можно взять $U_0 = \{[z_0 \colon z_1] \in \mathbb{C}P^1 \colon z_0 \neq 0\}$ и $U_1 = \{[z_0 \colon z_1] \in \mathbb{C}P^1 \colon z_1 \neq 0\}$.

Как и накрытия, локально тривиальные расслоения обладают свойством поднятия гомотопии (см. теорему 7.3). Однако, во-первых, накрывающая гомотопия, вообще говоря, не единственна, а во-вторых, необходимо наложить некоторые дополнительные условия на отображаемое пространство Z или на базу расслоения B. Мы докажем следующую теорему.

Теорема 8.2. *Локально тривиальное расслоение $p\colon E \to B$ обладает свойством поднятия гомотопии по отношению к любым клеточным пространствам Z:*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{G}"] & B. \end{tikzcd} \tag{5}$$

Доказательство. Вначале мы сведём свойство поднятия гомотопии по отношению к любым клеточным пространствам Z к случаю $Z = D^k$.

Свойство поднятия гомотопии является частным случаем более общего свойства поднятия для пары (X, A), которое описывается следующей диаграммой:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "g"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{g}"] & B, \end{tikzcd}$$

где $i\colon A \hookrightarrow X$ — вложение. Тогда свойство поднятия гомотопии — это свойство поднятия для пары $(Z \times I, Z)$. Для проведения индукции по клеткам нам понадобится относительная версия свойства поднятия гомотопии, когда требуется поднять гомотопию $G\colon Z \times I \to B$ до гомотопии $\widetilde{G}\colon Z \times I \to E$, начинающейся с данного отображения

$f\colon Z \to E$ и продолжающей поднятие $\widetilde{G}\colon A \times I \to E$, уже заданное на подпространстве $A \subset Z$. Это не что иное, как свойство поднятия для пары $(Z \times I, Z \times 0 \cup A \times I)$:

$$\begin{tikzcd} Z \times 0 \cup A \times I \arrow[r, "\widetilde{G}"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{G}"] & B. \end{tikzcd}$$

Теперь будем вести индукцию по клеткам пространства Z. Предположим, что поднятие гомотопии $\widetilde{G}\colon Z \times I \to E$ уже задано на Z, а мы хотим продолжить его на пространство $Z' = Z \cup e^k$, получаемое из Z приклеиванием одной клетки e^k при помощи отображения $\partial D^k \to Z$. Так как характеристическое отображение $D^k \to Z \cup e^k$ этой клетки является гомеоморфизмом на внутренности шара, свойство поднятия для пары $(Z' \times I, Z' \times 0 \cup Z \times I)$ эквивалентно свойству поднятия для пары $(D^k \times I, D^k \times 0 \cup \partial D^k \times I)$:

$$\begin{tikzcd} D^k \times 0 \cup \partial D^k \times I \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & (Z \cup e^k) \times 0 \cup Z \times I \arrow[r, "\widetilde{G}"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ D^k \times I \arrow[r] & (Z \cup e^k) \times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{G}"] & B. \end{tikzcd}$$

Вместо шара D^k нам будет удобнее рассматривать куб I^k; соответствующее свойство поднятия выглядит следующим образом:

$$\begin{tikzcd} I^k \times 0 \cup \partial I^k \times I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I^k \times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{G}"] & B. \end{tikzcd}$$

Выберем открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства B вместе с локальными тривиализациями $\varphi_\alpha\colon p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times F$. Так как $I^k \times I$ компактно, мы можем разбить I^k на меньшие кубы C, а I — на отрезки $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ так, чтобы отображение G переводило каждое произведение $C \times I_j$ в одно множество U_α. Применяя индукцию по k, мы можем предположить, что гомотопия $\widetilde{G} = \widetilde{g}_t$ уже построена на ∂C для каждого из малых кубов C. Чтобы продолжить эту гомотопию $\widetilde{g}_t$ на куб C, мы можем строить $\widetilde{g}_t$ последовательно на каждом отрезке I_j. Этот аргумент позволяет нам свести всё к случаю, когда отображение G переводит весь куб $I^k \times I$ в одно множество U_α. Тогда нам уже дано поднятие $\widetilde{G}\colon I^k \times 0 \cup \partial I^k \times I \to p^{-1}(U_\alpha)$, которое необходимо продолжить до поднятия $\widetilde{G}\colon I^k \times I \to p^{-1}(U_\alpha)$. Взяв композицию с локальной тривиализацией $\varphi_\alpha\colon p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times F$, мы сводим всё к случаю тривиального расслоения:

$$\begin{tikzcd} I^k \times 0 \cup \partial I^k \times I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & U_\alpha \times F \arrow[d, "p"] \\ I^k \times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{G}"] & U_\alpha. \end{tikzcd}$$

Требуемое поднятие $\widetilde{G}\colon I^k \times I \to U_\alpha \times F$ задаётся парой отображений $I^k \times I \to U_\alpha$ и $I^k \times I \to F$. Первое из этих отображений определим как данное нам отображение G, а второе — как композицию

$$I^k \times I \longrightarrow I^k \times 0 \cup \partial I^k \times I \xrightarrow{f} U_\alpha \times F \longrightarrow F,$$

где первое отображение — ретракция, а последнее — проекция. □

8.2. **Расслоения в смысле Гуревича и Серра.** Отображение $p\colon E \to B$ называется *расслоением в смысле Гуревича*, если оно удовлетворяет свойству поднятия гомотопии (5) по отношению к любому пространству Z.

Отображение $p\colon E \to B$ называется *расслоением в смысле Серра*, если оно удовлетворяет свойству поднятия гомотопии (5) по отношению к любому клеточному пространству Z.

Согласно теореме 8.2 локально тривиальное расслоение является расслоением в смысле Серра. (Имеет место более общая теорема Гуревича–Хюбша, согласно которой локально тривиальное расслоение является расслоением в смысле Гуревича, если база B паракомпактна.) Вот важный пример расслоения в смысле Гуревича, которое, вообще говоря, не является локально тривиальным.

Пример 8.3 (расслоение путей)**.** Пусть X — линейно связное пространство с отмеченной точкой x_0. Напомним, что пространством путей на X называется подпространство $PX \subset \mathcal{C}(I, X)$, состоящее из путей $\gamma\colon I \to X$, для которых $\gamma(0) = x_0$. Рассмотрим отображение

$$p\colon PX \to X, \quad \gamma \mapsto \gamma(1).$$

Тогда p является расслоением в смысле Гуревича. В самом деле, пусть даны отображения $f\colon Z \to PX$ и $G\colon Z \times I \to X$, см. (5). Тогда накрывающая гомотопия $\widetilde{G}\colon Z \times I \to PX$ может быть задана следующей формулой «продолжения путей»:

$$\widetilde{G}(z,t)(s) = \begin{cases} \big(f(z)\big)(s(1+t)) & \text{при } s(1+t) \leqslant 1, \\ G\big(z, s(1+t) - 1\big) & \text{при } s(1+t) \geqslant 1 \end{cases}$$

(сначала проходим путь $f(z)$ от отмеченной точки до точки $f(z)(1) = G(z,0)$, а затем путь $G(z,I)$). Расслоение $p\colon PX \to X$ называется *расслоением путей* для X. Его слоем $p^{-1}(x_0)$ над отмеченной точкой $x_0 \in X$ является пространство петель ΩX. Слой $p^{-1}(x_1)$ над любой другой точкой представляет собой пространство путей из x_0 в x_1; легко видеть, что это пространство гомотопически эквивалентно пространству петель ΩX.

Согласно одной из задач в конце этого параграфа, все слои расслоения в смысле Гуревича гомотопически эквивалентны.

8.3. **Расслоения и корасслоения. Теорема факторизации.** До конца этого параграфа под расслоением мы будем понимать расслоение в смысле Гуревича, т. е. отображение $p\colon E \to B$, удовлетворяющее свойству поднятия гомотопии (5) для любого Z.

Двойственное понятие *корасслоения* определяется как отображение $i\colon A \to X$, удовлетворяющее свойству продолжения гомотопии. Мы определяли последнее для пар (X, A) в §4. В более общей ситуации говорят, что отображение $i\colon A \to X$ обладает *свойством продолжения гомотопии* по отношению к пространству Z, если для любого отображения $f\colon X \to Z$ и такой гомотопии $F\colon A \times I \to Z$, что $f \circ i = F_0$, существует гомотопия $\widehat{F}\colon X\times I\to Z$, для которой $\widehat{F}_0=f$ и $\widehat{F}\circ(i\times\mathrm{id})=F$. Это описывается коммутативной диаграммой

(6)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "i"'] & Z^I \arrow[d, "p_0"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\widehat{F}'"] & Z, \end{tikzcd}$$

где $Z^I=\mathcal{C}(I,Z)$, F' — *сопряжённое* отображение к F (происходящее из эспоненциального закона $\mathcal{C}(A\times I,Z)\cong\mathcal{C}(A,Z^I)$, т.е. $F'(a)=\gamma$, где $\gamma(t)=F(a,t)\in Z$), отображение p_0 переводит γ в $\gamma(0)$, а $\widehat{F}'$ — сопряжённое отображение к $\widehat{F}$.

Пример 8.4.

1. Вложение $i\colon A\to X$ клеточного подпространства A клеточного пространства X является корасслоением согласно теореме 4.7.

2. Вложение верхнего основания цилиндра
$$i\colon X\to X\times I,\quad x\mapsto(x,1),$$
является корасслоением. Этот пример двойствен к расслоению путей (пример 8.3).

3. Отображение $X\to pt$ в точку всегда является расслоением: в качестве накрывающей гомотопии $\widetilde{G}\colon Z\times I\to X$ можно взять постоянную гомотопию $\widetilde{G}(z,t)=f(z)$. Однако «двойственное» отображение вложения точки $pt\to X$ является корасслоением только для достаточно хороших пространств (например, клеточных).

Предложение 8.5.

а) *Пусть $p\colon E\to B$ — расслоение, $f\colon B'\to B$ — отображение и*
$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$
— декартов квадрат, т.е. $E'=\{(e,b')\in E\times B'\colon p(e)=f(b')\}$. Тогда $p'\colon E'\to B'$ тоже расслоение.

б) *Пусть $i\colon A\to X$ — корасслоение, $g\colon A\to A'$ — отображение и*
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & A' \arrow[d, "i'"] \\ X \arrow[r] & X' \end{tikzcd}$$
— кодекартов квадрат (т.е. $X'=X\sqcup A'/\sim$, где $x\sim a'$, если $x=i(a)$ и $a'=g(a)$ для некоторого $a\in A$). Тогда $i'\colon A'\to X'$ тоже корасслоение.

Доказательство. Докажем а). Рассмотрим свойство поднятия гомотопии для p':
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d, "i_0"'] & E' \arrow[r] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\ Z\times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{G}"] & B' \arrow[r, "f"] & B. \end{tikzcd}$$

Так как $p\colon E \to B$ — расслоение, существует поднятие $Z \times I \to E$, которое вместе с универсальным свойством декартова квадрата (см. диаграмму (1)) даёт требуемое поднятие $\widetilde{G}\colon Z \times I \to E'$.

Утверждение б) доказывается аналогично, используя универсальное свойство кодекартова квадрата (см. диаграмму (2)). □

Расслоение $p'\colon E' \to B'$ называется *индуцированным* расслоением p при помощи отображения $f\colon B' \to B$.

Следующая теорема о факторизации показывает, что любое отображение можно разложить в композицию гомотопической эквивалентности и расслоения, а также в композицию корасслоения и гомотопической эквивалентности.

Теорема 8.6 (о факторизации отображения)**.**

а) *Для любого отображения $f\colon X \to Y$ существуют такие гомотопическая эквивалентность $h\colon X \to \widetilde{X}$ и расслоение $p\colon \widetilde{X} \to Y$, что $f = p \circ h$.*

б) *Для любого отображения $f\colon X \to Y$ существуют такие корасслоение $i\colon X \to \widehat{Y}$ и гомотопическая эквивалентность $h\colon \widehat{Y} \to Y$, что $f = h \circ i$.*

Доказательство. Докажем а). Пусть $\widetilde{X}$ — множество пар (x, γ), состоящих из точки $x \in X$ и пути $\gamma\colon I \to Y$ с $\gamma(0) = f(x)$. Это описывается декартовым квадратом

$$\begin{CD}
\widetilde{X} @>>> Y^I \\
@VVV @VV{p_0}V \\
X @>{f}>> Y
\end{CD}$$

где Y^I — пространство всех путей $\gamma\colon I \to Y$, а отображение p_0 переводит γ в $\gamma(0)$.

Тогда гомотопическая эквивалентность $h\colon X \to \widetilde{X}$ задаётся формулой $h(x) = (x, c_{f(x)})$, где $c_{f(x)}\colon I \to Y$ — постоянный путь $t \mapsto f(x)$, и мы имеем расслоение $p\colon \widetilde{X} \to Y$, $p(x, \gamma) = \gamma(1)$ (свойство поднятия гомотопии проверяется так же, как и для расслоения путей в примере 8.3).

Докажем б). Пусть $\widehat{Y}$ — факторпространство пространства $(X \times I) \sqcup Y$, получаемое при отождествлении $(x, 0) \in X \times I$ с $f(x) \in Y$. Это описывается кодекартовым квадратом

$$\begin{CD}
X @>{f}>> Y \\
@V{i_0}VV @VVV \\
X \times I @>>> \widehat{Y},
\end{CD}$$

где отображение i_0 переводит x в $(x, 0)$.

Гомотопическая эквивалентность $h\colon \widehat{Y} \to Y$ задаётся формулами $h(x, t) = f(x)$ и $h(y) = y$, и мы имеем корасслоение $i\colon X \to \widehat{Y}$, $i(x) = (x, 1)$ (сравните с примером 8.4.2). □

Пространство $\widehat{Y} = (X \times I) \cup_f Y$, построенное в доказательстве утверждения б) выше, называется *цилиндром отображения* f.

Задачи и упражнения.

8.7. Это обобщение примера 8.1.3. Положим $E = S^{2n+1} = \{(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1\}$, $B = \mathbb{C}P^n$, $p(z_0, \ldots, z_n) = [z_0 : \ldots : z_n]$. Докажите, что $p\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ — локально тривиальное расслоение со слоем $F = S^1$. Оно также называется *расслоением Хопфа.*

8.8. Докажите, что расслоение $p\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ из предыдущего упражнения (в частности, расслоение Хопфа) нетривиально.

8.9. Докажите, что локально тривиальное расслоение над кубом I^k тривиально.

8.10. Докажите, что все слои расслоения в смысле Гуревича над линейно связным пространством гомотопически эквивалентны.

8.11. Докажите, что вложение верхнего основания цилиндра $i\colon X \to X \times I$, $x \mapsto (x, 1)$, является корасслоением.

8.12. Докажите, что если X — клеточное пространство и $x \in X$, то вложение $i\colon x \to X$ является корасслоением.

8.13. Приведите пример пространства с отмеченной точкой (X, x_0), для которого вложение $i\colon x_0 \to X$ не является корасслоением.

8.14. Докажите, что разложение из теоремы 8.6 а) естественно в следующем смысле: коммутативная диаграмма отображений

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"'] \\ Y \arrow[r] & Y' \end{tikzcd}$$

приводит к коммутативной диаграмме разложений

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "h"] & & X' \arrow[dd, "f'"'] \arrow[dr, "h'"] & \\ & \widetilde{X} \arrow[rr] \arrow[dl, "p"] & & \widetilde{X'} \arrow[dl, "p'"] \\ Y \arrow[rr] & & Y' & \end{tikzcd}$$

Сформулируйте и докажите аналогичное свойство естественности для разложения из теоремы 8.6 б).

8.15. Пространство, гомотопически эквивалентное слою расслоения $p\colon \widetilde{X} \to Y$ из теоремы 8.6 а), называется *гомотопическим слоем* отображения $f\colon X \to Y$ и обозначается $\operatorname{hofib} f$. Докажите, используя естественность конструкции $\widetilde{X}$ (см. предыдущую задачу), что гомотопический слой определён корректно: для любого другого разложения $f = p' \circ h'$ в композицию гомотопической эквивалентности h' и расслоения p' пространство $\operatorname{hofib} f$ гомотопически эквивалентно слою расслоения p'.

8.16. Докажите, что гомотопический слой отображения $f\colon X \to Y$ есть пространство F, входящее в декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & PY \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y, \end{tikzcd}$$

где $PY \to Y$ — расслоение путей.

8.17. Факторпространство $G = \widehat{Y}/i(X) = \widehat{Y}/(X\times 1)$ пространства $\widehat{Y} = (X \times I) \cup_f Y$ из теоремы 8.6 б) (цилиндра отображения) по его верхнему основанию называется *конусом отображения* $f\colon X \to Y$. Пространство, гомотопически эквивалентное конусу отображения f, называется его *гомотопическим кослоем*. Таким образом, мы имеем кодекартов квадрат

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ CX \arrow[r] & G, \end{tikzcd}$$

где $X \to CX$ — вложение X в основание конуса. Проверьте корректность определения гомотопического кослоя по аналогии с задачей 8.15.

8.18. Найдите гомотопический слой вложения точки $pt \to X$.

8.19. Найдите гомотопический кослой проекции в точку $X \to pt$.

8.20. Найдите гомотопический слой вложения букета $S^1 \vee S^1 \hookrightarrow S^1 \times S^1$.

8.21. Найдите гомотопический слой вложения букета $\mathbb{C}P^\infty \vee \mathbb{C}P^\infty \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$.

8.22. Докажите, что гомотопическая эквивалентность $h\colon X \to \widetilde{X}$ из теоремы 8.6 а) является корасслоением, а гомотопическая эквивалентность $h\colon \widehat{Y} \to Y$ из теоремы 8.6 б) — расслоением в смысле Серра.

9. Гомотопические группы

9.1. **Определение. Коммутативность.** Для пространства X с отмеченной точкой x_0 определим $\pi_n(X, x_0)$ как множество гомотопических классов отображений $f\colon S^n \to X$, переводящих отмеченную точку s_0 сферы S^n в x_0. Сами эти отображения называются *сфероидами*. По-другому сфероид можно представить как отображение пар $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, переводящее границу куба ∂I^n в x_0.

При $n \geqslant 1$ сумма двух сфероидов $f, g\colon S^n \to X$ определяется как композиция

$$f + g\colon S^n \xrightarrow{c} S^n \vee S^n \xrightarrow{f\vee g} X,$$

где отображение c стягивает экватор S^{n-1} в сфере S^n в точку, и мы выбираем отмеченную точку s_0 на S^n так, чтобы она принадлежала этому экватору. На кубическом языке операция суммы выглядит следующим образом: если $f, g\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ и $(t_1, \ldots, t_n)$ — координаты в кубе I^n, то сумма $f + g$ определяется как отображение $(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, заданное формулой

$$(f+g)(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & \text{при } 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases} \tag{7}$$

Так как в операции суммы участвует только первая координата, те же самые рассуждения, что и для π_1 (см. предложение 5.1), показывают, что сумма определена корректно на гомотопических классах сфероидов и $\pi_n(X, x_0)$ — группа, причём единичный элемент — постоянное отображение $I^n \to x_0$, а обратный элемент задаётся формулой $-f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Группа $\pi_n(X, x_0)$, $n \geqslant 1$, называется n-й *гомотопической группой* пространства X. Ясно, что $\pi_1(X, x_0)$ — это фундаментальная группа, а $\pi_0(X, x_0)$ — просто множество компонент линейной связности пространства X (на нём, вообще говоря, нет естественной групповой операции).

Предложение 9.1. *Гомотопическая группа $\pi_n(X, x_0)$ коммутативна при $n \geqslant 2$.*

Доказательство. Мы имеем $f + g \simeq g + f$ посредством гомотопии, изображённой на рис. 3. Сначала гомотопия сжимает области определения отображений f и g в

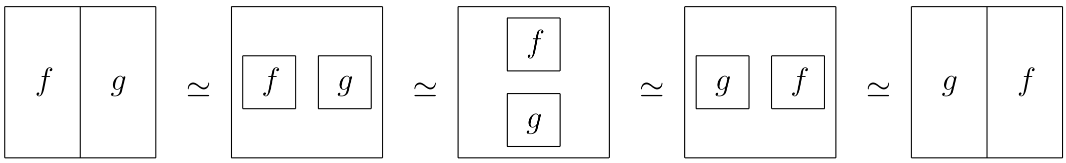


Рис. 3.

меньшие кубы в I^n, а область вне этих кубов отображается в отмеченную точку x_0. В результате появляется свободное пространство, в котором можно двигать эти два куба как угодно, лишь бы они не пересекались. При $n \geqslant 2$ их можно переставить местами. Затем области определения отображений f и g можно снова увеличить до их исходного размера. Всю эту процедуру можно проделать, используя лишь координаты t_1 и t_2 и оставляя другие координаты без изменений. □

Если пространство X линейно связно, то для любых двух точек $x_0, x_1 \in X$ группы $\pi_n(X, x_0)$ и $\pi_n(X, x_1)$ изоморфны: изоморфизм задаётся выбором пути из x_0 в x_1 (упражнение). Этот изоморфизм, вообще говоря, зависит от пути, вернее, от его гомотопического класса. Таким образом, если X односвязно (т.е. $\pi_0(X) = \pi_1(X) = 0$), то все группы $\pi_n(X, x_0)$ с различными x_0 канонически изоморфны.

Предложение 9.2. *Отображение $f\colon X \to Y$, для которого $f(x_0) = y_0$, индуцирует гомоморфизм групп $f_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$. Если отображения $f, g\colon X \to Y$ гомотопны, то гомоморфизмы f_* и g_* совпадают.*

Доказательство. Это доказывается аналогично соответствующему утверждению для фундаментальной группы (предложение 5.2). □

Следствие 9.3. *Если $f\colon X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность, то для любой точки $x_0 \in X$ гомоморфизм $f_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ является изоморфизмом.*

Предложение 9.4. *Для любых пространств (X, x_0) и (Y, y_0) имеем*

$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0).$$

Доказательство. Отображение $Z \to X \times Y$ — это то же самое, что пара отображений $Z \to X$, $Z \to Y$. Взяв в качестве Z пространства S^n и $S^n \times I$, получим требуемое. □

Предложение 9.5. *$\pi_k(S^n) = 0$ при $k < n$.*

Доказательство. Это вытекает из теоремы о клеточной аппроксимации аналогично доказательству предложения 5.6. □

9.2. **Относительные гомотопические группы. Точная последовательность пары.** Пусть (X, A) — пара пространств с отмеченной точкой $x_0 \in A$. Определим $\pi_n(X, A, x_0)$, $n \geqslant 1$, как множество гомотопических классов отображений пар $f\colon (D^n, S^{n-1}) \to (X, A)$, переводящих отмеченную точку $s_0 \in S^{n-1} = \partial D^n$ в x_0. Эти отображения называются *относительными сфероидами*. На кубическом языке относительный сфероид — это отображение $f\colon I^n \to X$, переводящее ∂I^n в A и переводящее $\partial I^n \setminus I^{n-1}$ в x_0, где грань I^{n-1} задаётся уравнением $t_n = 0$. Стягивание подпространства $\partial I^n \setminus I^{n-1}$ в точку преобразует тройку $(I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1})$ в (D^n, S^{n-1}, s_0), поэтому отображение $(D^n, S^{n-1}, x_0) \to (X, A, x_0)$ — это то же самое, что отображение $(I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \to (X, A, x_0)$.

Операция суммы определяется в $\pi_n(X, A, x_0)$ той же формулой (7), что и для $\pi_n(X, x_0)$, за исключением того, что координата t_n играет теперь особую роль и её больше нельзя использовать для операции суммы. Таким образом, $\pi_n(X, A, x_0)$ — группа при $n \geqslant 2$, и эта группа коммутативна при $n \geqslant 3$. Группа $\pi_n(X, A, x_0)$, $n \geqslant 2$, называется *относительной гомотопической группой* пары (X, A).

При $n = 1$ мы получаем $I^1 = [0, 1]$, $I^0 = \{0\}$ и $\partial I^1 \setminus I^0 = \{1\}$. Следовательно, $\pi_1(X, A, x_0)$ — это множество гомотопических классов путей в X из переменной точки в A в фиксированную точку $x_0 \in A$. Вообще говоря, это множество нельзя превратить в группу естественным способом.

Последовательность групп и гомоморфизмов

$$\ldots \longrightarrow G_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \ldots$$

называется *точной*, если $\operatorname{Ker} f_i = \operatorname{Im} f_{i+1}$ для любого i.

Для пары пространств (X, A) и $n \geqslant 1$ определены отображения

$$i_*\colon \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0),\ j_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0),\ \partial\colon \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0),$$

где i_* — отображение, индуцированное вложением $A \hookrightarrow X$, отображение j_* переводит гомотопический класс сфероида $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ в гомотопический класс относительного сфероида $f\colon (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \to (X, A, x_0)$, а отображение ∂ переводит гомотопический класс относительного сфероида $f\colon (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ в гомотопический класс сфероида $f|_{S^{n-1}}\colon (S^{n-1}, s_0) \to (A, x_0)$. Говоря на кубическом языке, отображение ∂ переводит $f\colon (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ в $f|_{I^{n-1}}\colon (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (A, x_0)$. Отображение i_* является гомоморфизмом при $n \geqslant 1$, а j_* и ∂ являются гомоморфизмами при $n \geqslant 2$.

Теорема 9.6 (гомотопическая последовательность пары)**.** *Последовательность*

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0)$$

точна для любой пары пространств (X, A).

Замечание. Множество $\pi_1(X, A, x_0)$ не является группой, и точность в этом члене означает, что для любого элемента $[f] \in \pi_1(X, A, x_0)$, где $f\colon (D^1, S^0, s_0) \to (X, A, x_0)$, образ $\partial[f]$ представляет отображение в точку $S^0 \to x_0$ тогда и только тогда, когда $[f] = j_*[g]$ для некоторого $[g] \in \pi_1(X, x_0)$. Аналогичный смысл имеет и точность в члене $\pi_1(A, x_0)$.

Доказательство теоремы 9.6.

Проверим, что $\operatorname{Im} i_* \subset \operatorname{Ker} j_*$. Пусть элемент $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ представлен отображением $f\colon (D^n, S^{n-1}) \to (X, x_0)$. Предположим, что $[f] \in \operatorname{Im} i_*$, т.е. $f\colon D^n \to X$ гомотопно отображению $g\colon D^n \to X$, для которого $g(D^n) \subset A$. Рассмотрим гомотопию (деформационную ретракцию) $r_t\colon D^n \to D^n$, где $r_0 = \mathrm{id}$ и r_1 — отображение в точку. Тогда композиция $g \circ r_t$ устанавливает гомотопию между относительным сфероидом $g\colon (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$, представляющим элемент $j_*[g]$, и отображением $D^n \to x_0$, представляющим 0, в классе относительных сфероидов. Следовательно, $j_*[f] = j_*[g] = 0$, т.е. $[f] \in \operatorname{Ker} j_*$.

Проверим, что $\operatorname{Ker} j_* \subset \operatorname{Im} i_*$. Предположим, что $[f] \in \operatorname{Ker} j_*$, т.е. $j_*[f] = 0$. Здесь удобно представить $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ отображением $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$. Тогда $j_*[f]$ представляется относительным сфероидом $f\colon (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \to (X, A, x_0)$. Гомотопия между f и отображением в точку в классе относительных сфероидов задаёт отображение $F\colon I^{n+1} = I^n \times I \to X$, которое совпадает на грани $t_{n+1} = 0$ с f, переводит грань $t_n = 0$ в A и отображает оставшуюся часть границы ∂I^{n+1} в x_0. Пусть $I^n_s \subset I^{n+1}$ — сечение куба n-мерной плоскостью $st_n + (1-s)t_{n+1} = 0$ (см. рис. 4). Тогда $g_s = F|_{I^n_s}\colon I^n_s = I^n \to X$ — гомотопия между $f = g_0$ и отображением g_1, которое переводит $(I^n, \partial I^n)$ в (A, x_0). Итак, мы получаем $[f] = [g_1] \in \operatorname{Im} i_*$.

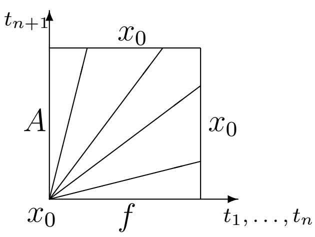


Рис. 4.

Проверим, что $\operatorname{Im} j_* \subset \operatorname{Ker} \partial$. Действительно, если элемент $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$ лежит в $\operatorname{Im} j_*$, то он представлен сфероидом $f\colon (D^n, S^{n-1}) \to (X, x_0)$. Но тогда $f|_{S^{n-1}}$ есть отображение в точку, т. е. $\partial[f] = 0$.

Проверим, что $\operatorname{Ker} \partial \subset \operatorname{Im} j_*$. Пусть элемент $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$ представлен отображением $f\colon (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \to (X, A, x_0)$. Если $[f] \in \operatorname{Ker} \partial$, то имеется гомотопия $g_t\colon I^{n-1} \to A$ между $f|_{I^{n-1}}\colon I^{n-1} \to A$ и отображением в точку. Рассмотрим гомотопию $h_t\colon \partial I^n \to A$, совпадающую с g_t на I^{n-1} и переводящую $\partial I^n \setminus I^{n-1}$ в x_0. Применяя теорему о продолжении гомотопии для клеточной пары $(I^n, \partial I^n)$, продолжим h_t до гомотопии $f_t\colon I^n \to X$ между данным нам отображением $f = f_0$ и отображением f_1, переводящим ∂I^n в x_0. Тогда $f_1\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ представляет элемент $[f_1] \in \pi_n(X, x_0)$ и мы имеем $j_*[f_1] = [f]$, т.е. $[f] \in \operatorname{Im} j_*$.

Проверим, что $\operatorname{Im} \partial \subset \operatorname{Ker} i_*$. Пусть $[f] \in \pi_{n-1}(A, x_0)$ лежит в $\operatorname{Im} \partial$, т.е. сфероид $f\colon (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (A, x_0)$ является ограничением относительного сфероида $g\colon (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \to (X, A, x_0)$. Тогда $f_t = g|_{I^{n-1} \times t}\colon I^{n-1} \times t = I^{n-1} \to X$ есть гомотопия, связывающая $f_0 = f$ с отображением в точку, т.е. $i_*[f] = 0$ и $[f] \in \operatorname{Ker} i_*$.

Проверим, что $\operatorname{Ker} i_* \subset \operatorname{Im}\partial$. Пусть $[g] \in \pi_{n-1}(A, x_0)$ лежит в $\operatorname{Ker} i_*$, т.е. задана гомотопия $g_t\colon I^{n-1} \to X$ в X между $g_0 = g\colon (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (A, x_0) \to (X, x_0)$ и отображением в точку $g_1\colon I^{n-1} \to x_0$. Тогда эта гомотопия задаёт отображение $f\colon I^{n-1} \times I \to X$, $f(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n) = g_{t_n}(t_1, \dots, t_{n-1})$, представляющее собой относительный сфероид $f\colon (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \to (X, A, x_0)$, сужение которого на I^{n-1} есть g. Иначе говоря, $\partial[f] = [f|_{I^{n-1}}] = [g]$, т.е. $[g] \in \operatorname{Im}\partial$. $\square$

9.3. **Гомотопическая последовательность расслоения.** Пусть $p\colon E \to B$ — расслоение в смысле Серра, $b_0 \in B$ и $e_0 \in E$ — отмеченные точки, $p(e_0) = b_0$ и $F = p^{-1}(b_0)$ — слой над b_0. Имеем отображение пар

$$p\colon (E, F) \to (B, b_0).$$

Лемма 9.7. *Отображение* $p_*\colon \pi_n(E, F, e_0) \to \pi_n(B, b_0)$ *является изоморфизмом при* $n \geqslant 1$.

Доказательство. Докажем, что p_* — мономорфизм. Пусть $p_*[\widetilde{f}] = 0$ для некоторого элемента $[\widetilde{f}] \in \pi_n(E, F, e_0)$, представленного относительным сфероидом $\widetilde{f}\colon (D^n, S^{n-1}) \to (E, F)$. Так как $p_*[\widetilde{f}] = 0$, сфероид $f = p \circ \widetilde{f}\colon (D^n, S^{n-1}) \to (B, b_0)$ гомотопен нулю в B посредством гомотопии $F\colon D^n \times I \to B$ или $f_t\colon D^n \to B$, где $f_0 = f$ и $f_1\colon D^n \to b_0$. Воспользуемся свойством поднятия гомотопии:

$$\begin{tikzcd}
D^n \times 0 \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
D^n \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{F}"] & B.
\end{tikzcd}$$

Это даёт нам гомотопию $\widetilde{f}_t\colon D^n \to E$ между отображением $\widetilde{f} = \widetilde{f}_0\colon (D^n, S^{n-1}) \to (E, F)$ и отображением $\widetilde{f}_1$, для которого $\widetilde{f}_1(D^n) \subset F$ (так как $f_1(D^n) = b_0$). Таким образом, $[\widetilde{f}] = [\widetilde{f}_1] = 0$ в $\pi_n(E, F, e_0)$ и p_* — мономорфизм.

Теперь докажем, что $p_*\colon \pi_n(E, F, e_0) \to \pi_n(B, b_0)$ — эпиморфизм. Пусть элемент $[f]\colon \pi_n(B, b_0)$ представлен отображением $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (B, b_0)$. Воспользуемся свойством поднятия гомотопии следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
\partial I^n \setminus I^{n-1} \arrow[r, equal] \arrow[d] & I^{n-1} \times 1 \cup \partial I^{n-1} \times I \arrow[r, "c"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
I^n \arrow[r, equal] & I^{n-1} \times I \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] & B,
\end{tikzcd}$$

где c — постоянное отображение в точку $e_0 \in E$ (здесь мы используем то, что пары $(I^{n-1} \times I, I^{n-1} \times 1 \cup \partial I^{n-1} \times I)$ и $(I^{n-1} \times I, I^{n-1} \times 1)$ гомеоморфны). Это даёт нам отображение $\widetilde{f}\colon I^n \to E$, для которого $\widetilde{f}(\partial I^n) \subset F$, так как $f(\partial I^n) = b_0$. Таким образом, мы получаем относительный сфероид $\widetilde{f}\colon (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \to (E, F, e_0)$, для которого $p_*[\widetilde{f}] = [f]$, так как $p \circ \widetilde{f} = f$. Итак, p_* — эпиморфизм. $\square$

Теорема 9.8 (гомотопическая последовательность расслоения)**.** *Для расслоения в смысле Серра* $p\colon E \to B$ *над линейно связной базой* B *со слоем* F *имеет место* *точная последовательность*

$$\dots \xrightarrow{\partial} \pi_n(F,e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E,e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B,b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F,e_0) \xrightarrow{i_*} \dots$$
$$\dots \xrightarrow{i_*} \pi_1(E,e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B,b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F,b_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E,e_0).$$

Доказательство. Это вытекает из гомотопической последовательности пары (E,F) и предыдущей леммы. □

Замечание. Из доказательства леммы 9.7 вытекает следующее описание граничного отображения $\partial\colon \pi_n(B,b_0) \to \pi_{n-1}(F,e_0)$. Пусть элемент $[f] \in \pi_n(B,b_0)$ представлен сфероидом $f\colon (I^n,\partial I^n) \to (B,b_0)$. Рассмотрим f как гомотопию $I^{n-1}\times I \to B$, состоящую из отображений $g_t\colon I^{n-1} \to B$, где g_0 и g_1 — постоянные отображения в точку b_0. Поднимем эту гомотопию до гомотопии $\widetilde{g}_t\colon I^{n-1} \to E$, начиная с постоянного отображения $\widetilde{g}_0\colon I^{n-1} \to e_0$. Отображение $\widetilde{g}_1$ уже не будет постоянным отображением, но будет переводить I^{n-1} в F. Тогда сфероид $\widetilde{g}_1\colon (I^{n-1},\partial I^{n-1}) \to (F,e_0)$ представляет элемент $\partial[f] \in \pi_{n-1}(F,e_0)$.

Пример 9.9.

1. Рассмотрим гомотопическую последовательность накрытия $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ со слоем счётное дискретное множество Z:

$$\dots \to \pi_n(Z) \to \pi_n(\mathbb{R}) \to \pi_n(S^1) \to \pi_{n-1}(Z) \to \dots$$

Так как $\pi_n(\mathbb{R}) = 0$ при всех n и $\pi_k(Z) = 0$ при $k > 0$, из точности последовательности вытекает, что $\pi_n(S^1) = 0$ при $n > 1$.

2. Рассмотрим следующий фрагмент гомотопической последовательности расслоения Хопфа $p\colon S^3 \to S^2$ со слоем S^1 (см. пример 8.1.3):

$$\pi_3(S^1) \to \pi_3(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_3(S^2) \to \pi_2(S^1) \to \pi_2(S^3) \to \pi_2(S^2) \xrightarrow{\partial} \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^3)$$

Так как $\pi_n(S^1) = 0$ при $n > 1$ и $\pi_1(S^3) = \pi_2(S^3) = 0$, мы получаем последовательность

$$0 \to \pi_3(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_3(S^2) \to 0 \to 0 \to \pi_2(S^2) \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \to 0.$$

Так как эта последовательность точна, мы получаем, что $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ и $\pi_3(S^3) \cong \pi_3(S^2)$. (На самом деле $\pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$, но пока мы этого доказать не можем; это будет доказано в теореме **??**.) Аналогично получаем $\pi_n(S^3) \cong \pi_n(S^2)$ при $n \geqslant 3$.

9.4. **Теорема Уайтхеда.**

Теорема 9.10 (Уайтхед). *Отображение $f\colon X \to Y$ связных клеточных пространств является гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда индуцированные отображения $f_*\colon \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ являются изоморфизмами для всех n.*

Доказательство. Если $f\colon X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность, то согласно следствию 9.3 $f_*\colon \pi_n(X,x_0) \to \pi_n(Y,y_0)$ является изоморфизмом для всех n. Предположим теперь, что $f_*\colon \pi_n(X,x_0) \to \pi_n(Y,y_0)$ является изоморфизмом для всех n.

По теореме о клеточной аппроксимации мы можем считать отображение $f\colon X \to Y$ клеточным. Далее применим теорему о факторизации отображения (теорему 8.6 б)) и разложим f в композицию $X \to \widehat{Y} \to Y$, где $\widehat{Y} = (X\times I)\cup_f Y$ — цилиндр отображения f, отображение $\widehat{Y} \to Y$ является гомотопической эквивалентностью, а $X \to \widehat{Y}$ — вложение клеточного подпространства.

Тем самым мы свели доказательство к случаю, когда f — включение клеточного подпространства $X \subset Y$. Так как f_* — изоморфизм для всех n, из гомотопической последовательности пары (Y, X) вытекает, что все относительные группы $\pi_n(Y, X)$ нулевые. Мы докажем, что тогда существует деформационная ретракция $Y \to X$. Другими словами, докажем, что тождественное отображение $\mathrm{id}\colon Y \to Y$ гомотопно относительно X отображению в X.

Предположим по индукции, что мы уже построили гомотопию относительно X между отображением $\mathrm{id}\colon Y \to Y$ и отображением $g\colon Y \to Y$, для которого $g(Y^{k-1}) \subset X$. Пусть e^k — некоторая k-мерная клетка из $Y \setminus X$ и $\varPhi\colon (D^k, \partial D^k) \to (Y, Y^{k-1})$ — её характеристическое отображение. Так как $\pi_k(Y, X) = 0$, композиция

$$g \circ \varPhi\colon (D^k, \partial D^k) \to (Y, Y^{k-1}) \to (Y, X)$$

гомотопна относительно ∂D^k отображению в X. Так как $Y^{k-1} \cup e^k = Y^{k-1} \sqcup D^k/\sim$, эта гомотопия индуцирует гомотопию между отображением $g|_{Y^{k-1} \cup e^k}\colon Y^{k-1} \cup e^k \to Y$ и отображением в X. Произведя такую гомотопию одновременно для всех клеток $e^k \subset Y \setminus X$ и взяв постоянную гомотопию на X, мы получим гомотопию между отображением $g|_{Y^k \cup X}$ и отображением в X. Согласно свойству продолжения гомотопии (теорема 4.7) эту гомотопию можно продолжить до гомотопии, определённой на всём пространстве Y, и тем самым доказательство шага индукции завершено.

Применив конечное число шагов индукции, получим доказательство в случае, когда размерность клеток из $Y \setminus X$ ограничена. В общем случае мы выполняем гомотопию на k-м шаге индукции в течение времени t из отрезка $[1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}}]$. Любой конечный остов Y^k в конце концов станет стационарным при этих гомотопиях, поэтому мы получаем корректно определённую гомотопию g_t, $t \in [0, 1]$, причём $g_1(Y) \subset X$. $\square$

Теорема Уайтхеда не утверждает, что клеточные пространства X и Y с изоморфными гомотопическими группами будут гомотопически эквивалентными: изоморфизмы должны индуцироваться отображением $X \to Y$. Например, пространства S^2 и $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$ имеют одинаковые гомотопические группы (упражнение), но не гомотопически эквивалентны (этого мы пока доказать не можем).

Задачи и упражнения.

9.11. Докажите, что если пространство X линейно связно, то любой путь из x_0 в x_1 задаёт изоморфизм между $\pi_n(X, x_0)$ и $\pi_n(X, x_1)$, который зависит только от гомотопического класса пути (с фиксированными концом и началом). Указание: постройте и используйте отображение $\omega\colon S^n \to S^n \vee I$.

9.12. Докажите, что если $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ — накрытие, то индуцированное отображение $p_*\colon \pi_n(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_n(X, x_0)$ — изоморфизм при $n \geqslant 2$.

9.13. Докажите, что $\pi_n(S^1 \vee S^1) = 0$ при $n \geqslant 2$.

9.14. Найдите гомотопические группы кренделя (сферы с двумя ручками).

9.15. Докажите следующее утверждение, известное как *лемма о пяти гомоморфизмах* или *5-лемма.* Пусть дана коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

абелевых групп с точными строками. Тогда

а) если f_2 и f_4 — мономорфизмы, а f_1 — эпиморфизм, то f_3 — мономорфизм;

б) если f_2 и f_4 — эпиморфизмы, а f_5 — мономорфизм, то f_3 — эпиморфизм.

Таким образом, если f_1, f_2, f_4, f_5 — изоморфизмы, то и f_3 — изоморфизм.

9.16. Введите отображения и докажите точность *гомотопической последовательности тройки* (X, A, B) (где $A \subset B \subset X$):

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0).$$

9.17. Используя бесконечное расслоение Хопфа $p\colon S^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$ со слоем S^1, докажите, что $\pi_2(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}$ и $\pi_k(\mathbb{C}P^\infty) = 0$ при $k \neq 2$.

9.18. Докажите, что пространства S^2 и $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$ имеют одинаковые гомотопические группы.

9.19. Докажите, что $\pi_n(\Omega X) \cong \pi_{n+1}(X)$ для любого X при $n \geqslant 0$.

9.20. Докажите, что $\Omega \mathbb{C}P^\infty \simeq S^1$.

9.21. Докажите трёхмерную теорему Брауэра: любое непрерывное отображение $f\colon D^3 \to D^3$ имеет неподвижную точку.

Предметный указатель