ТОРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ
ЛИСТОК 1: КОНУСЫ, ВЕЕРЫ, ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Докажите, что выпуклый полиэдральный конус $\sigma \neq \mathbb{R}^n$ имеет (единственную) наименьшую грань $\sigma \cap (-\sigma)$, причём она является вершиной $\mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда σ является строго выпуклым.

2. Докажите, что любой минимальный набор образующих строго выпуклого полиэдрального конуса состоит из ненулевых векторов вдоль его одномерных граней (рёбер).

3. Докажите, что для любого полиэдрального конуса $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ его двойственный

$$\sigma^\vee = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle \geqslant 0 \ \text{ для любого } \ \boldsymbol{u} \in \sigma\}.$$

является полиэдральным конусом, имеет место равенство $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$, и $\sigma^\vee$ является строго выпуклым тогда и только тогда, когда $\dim \sigma = n$.

4. Опишите торическое многообразие, соответствующее вееру с 3 одномерным конусами, порождёнными векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $-\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ (и без двумерных конусов).

5. Пусть Σ — полный неособый веер в $\mathbb{R}^2$ с 3 одномерными конусами. Покажите, что торическое многообразие V_Σ изоморфно комплексному проективному пространству $\mathbb{C}P^2$.

6*. Пусть Σ — полный неособый веер в $\mathbb{R}^2$ с 4 одномерными конусами. Покажите, что торическое многообразие V_Σ изоморфно одной из *поверхностей Хирцебруха* $F_k = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{O}(k))$. Здесь $\mathbb{C}P(-)$ обозначает проективизацию комплексного векторного расслоения, $\underline{\mathbb{C}}$ обозначает тривиальное одномерное расслоение над $\mathbb{C}P^1$, а $\mathcal{O}(k) = \bar{\eta}^{\otimes k}$ обозначает k-тензорную степень сопряжённого к тавтологическому одномерному расслоению над $\mathbb{C}P^1$, $k \in \mathbb{Z}$.

7*. Покажите, что поверхность Хирцебруха F_k гомеоморфна $S^2 \times S^2$ при чётном k и гомеоморфна $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$ при нечётном k, где $\#$ обозначает связную сумму ориентированных многообразий, а $\overline{\mathbb{C}P}^2$ есть $\mathbb{C}P^2$ с обращённой ориентацией.

8. Пусть U — дополнение до произвольного набора координатных плоскостей вида $\{\boldsymbol{z} \colon z_{i_1} = \ldots = z_{i_k} = 0\}$ в $\mathbb{C}^m$. Докажите, что U — неособое торическое многообразие, опишите его покрытие аффинными торическими многообразиями и соответствующий веер Σ в $\mathbb{R}^m$.

9. Пусть $N \cong \mathbb{Z}^n$ — решётка, $T_N = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^\times \cong (\mathbb{C}^\times)^n$ — задаваемый ей алгебраический тор, $M = N^*$ — решётка характеров тора и $\mathbb{C}[M] \cong \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_m^{\pm 1}]$ — алгебра регулярных функций на торе. Предположим, что $A \subset \mathbb{C}[M]$ — подпространство функций, инвариантное относительно действия тора. Докажите, что

$$A = \bigoplus_{\chi^m \in A} \mathbb{C} \cdot \chi^m,$$

т. е. A порождено содержащимися в нём характерами тора.

Date: 19 сентября 2022 г.

ТОРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ
ЛИСТОК 2: МНОГОГРАННИКИ И НОРМАЛЬНЫЕ ВЕЕРЫ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Выпуклый n-мерный многогранник называется *симплициальным*, если все его собственные грани — симплексы, и называется *простым*, если в каждой его вершине сходится в точности n гиперграней. Докажите, что при $n \geqslant 3$ если многогранник является одновременно простым и симплициальным, то это — симплекс.

2. Для выпуклого многогранника P в аффинном пространстве $M_{\mathbb{R}}$ определим его *полярное множество* как

$$P^* = \{\boldsymbol{u} \in M^*_{\mathbb{R}} \colon \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle + 1 \geqslant 0 \text{ для всех } \boldsymbol{x} \in P\}.$$

Докажите, что

а) P^* является выпуклым многогранником (в частности, ограничено) тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} \in \operatorname{int} P$;

б) $(P^*)^* = \operatorname{conv}(P, \mathbf{0})$, так что $P \subset (P^*)^*$ и $(P^*)^* = P$, если $\mathbf{0} \in P$.

3. Два многогранника называются *комбинаторно эквивалентными*, если между их граням можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношение включения. Докажите, что n-мерный простой многогранник, все двумерные грани которого являются четырёхугольниками, комбинаторно эквивалентен n-мерному кубу.

4. Докажите, что каждый из двух многогранников, получаемых разрезанием симплекса Δ^n гиперплоскостью, не проходящей через вершины, комбинаторно эквивалентен произведению двух симплексов. Выведите отсюда, что каждый n-мерный простой многогранник с $n+2$ гипергранями комбинаторно эквивалентен (и даже проективно эквивалентен) произведению двух симплексов.

5. Пусть n-мерный многогранник P задан как пересечение полупространств (т. е. системой линейных неравенств) в n-мерном аффинном пространстве $M_{\mathbb{R}}$:

$$P = \{x \in M_{\mathbb{R}} \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle + b_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m\},$$

где $\boldsymbol{a}_i \in M^*_{\mathbb{R}}$, $b_i \in \mathbb{R}$. Предположим, что среди неравенств $\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle + b_i \geqslant 0$ нет *лишних*, т. е. удаление любого неравенства из системы изменяет задаваемое ими множество. Докажите, что в этом случае каждое множество

$$F_i = \{\boldsymbol{x} \in P \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle + b_i = 0\}$$

является гипергранью многогранника P.

6. Пусть P — многогранник как в предыдущей задаче (полной размерности, заданный без лишних неравенств). Для каждой грани $Q \subset P$ рассмотрим конус

$$\sigma_Q = \{\boldsymbol{u} \in M^*_{\mathbb{R}} \colon \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}' \rangle \leqslant \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \text{ для любых } \boldsymbol{x}' \in Q \text{ и } \boldsymbol{x} \in P\},$$

двойственный к многогранному углу при грани Q (порождённому всеми векторами $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$ из $\boldsymbol{x}' \in Q$ в $\boldsymbol{x} \in P$). Докажите, что конус σ_Q имеет минимальный набор образующих, состоящий из векторов $\boldsymbol{a}_i$, для которых $Q \subset F_i$.

Date: 15 октября 2022 г.

7. Докажите, что набор конусов $\Sigma_P = \{\sigma_Q\colon Q \text{ есть грань в } P\}$ является полным веером в пространстве $N_\mathbb{R} = M_\mathbb{R}^*$, причём этот веер является симплициальным тогда и только тогда, когда P — простой многогранник.

8. Докажите, что если $\mathbf{0}$ содержится во внутренности P, то веер Σ_P состоит из конусов над гранями полярного многогранника P^*.

9. Определим *опорную функцию* $\psi_P\colon M_\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ выпуклого многогранника $P \in M_\mathbb{R}$ формулой

$$\psi_P(\boldsymbol{u}) = \min_{\boldsymbol{x}\in P}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}\rangle.$$

Докажите, что

а) функция ψ_P непрерывна на $M_\mathbb{R}^*$ и линейна на конусах σ нормального веера Σ_P, т. е. $\psi_P(\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{m}_\sigma\rangle$ при $\boldsymbol{u} \in \sigma$ для некоторого $\boldsymbol{m}_\sigma \in M_\mathbb{R}$;

б) функция ψ_P *строго выпукла* в следующем смысле: для любого максимального (n-мерного) конуса $\sigma \in \Sigma_P$ при $\boldsymbol{u} \notin \sigma$ имеет место строгое неравенство $\psi_P(\boldsymbol{u}) < \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{m}_\sigma\rangle$.

ТОРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ
ЛИСТОК 3: РАССЛОЕНИЯ И ДИВИЗОРЫ, ПРОЕКТИВНЫЕ ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ, КОГОМОЛОГИИ

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Пусть $\mathcal{A}$ — пучок гладких $\mathbb{C}$-значных функций на гладком многообразии M. Докажите, что $H^i(M;\mathcal{A}) = 0$ при $i > 0$. (Указание: используйте разбиение единицы.)

2. Пусть $\mathcal{O}$ — пучок голоморфных функций на комплексном многообразии. Докажите, что

а) $H^i(\mathbb{C}P^n;\mathcal{O}) = 0$ при $i > 0$;

б) $H^1(\mathbb{C}/\Gamma;\mathcal{O}) \cong \mathbb{C}$, где $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2$ — решётка в $\mathbb{C}$, а $\mathbb{C}/\Gamma \cong T^2$ — комплексный тор.

3. Докажите, что сопоставление $D \mapsto L_D$ дивизору Картье одномерного расслоения на комплексном многообразии M обладает следующими свойствами:

а) если D — дивизор глобальной мероформной функции на M, то $L_D = \mathcal{O}$ — тривиальное расслоение;

б) $L_{D+D'} \cong L_D \otimes L_{D'}$. В частности, $L_{-D} \cong L_D^* \cong \overline{L_D}$, где $L_D^* \cong \mathrm{Hom}(L_D, \mathcal{O})$ — двойственное расслоение, а $\overline{L_D}$ — комплексно сопряжённое расслоение.

4. Обозначим через $\mathcal{O}(1)$ одномерное комплексное расслоение над $\mathbb{C}P^n$, соответствующее дивизору-гиперплоскости. Докажите, что тавтологическое расслоение η (расслоение Хопфа), слоем которого над точкой $z \in \mathbb{C}P^n$ является прямая, представляющая эту точку, изоморфно $\mathcal{O}(-1)$.

5. Запишите явно систему однородных уравнений в проективном пространстве, задающих каждую поверхность Хирцебруха $F_k = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{O}(k))$.

6. Опишите вложение проективной прямой $\mathbb{C}P^1$ в проективное пространство, соответствующее одномерному многограннику — отрезку $[0,k]$ в $\mathbb{R}^1$, где $k \in \mathbb{Z}$.

7. Докажите, что любое полное двумерное торическое многообразие проективно.

8. Докажите, что на комплексном многообразии Грассмана $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$, состоящем из k-плоскостей в $\mathbb{C}^n$, при $2 \leqslant k \leqslant n-2$ нельзя задать алгебраическое действие тора, превращающее его в торическое многообразие.

9. Для каждой пары целых чисел $0 \leqslant i \leqslant j$ рассмотрим *гиперповерхность Милнора*

$$H_{ij} = \{(z_0 : \dots : z_i) \times (w_0 : \dots : w_j) \in \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \colon z_0w_0 + \dots + z_iw_i = 0\}.$$

а) Докажите, что H_{ij} является неособым проективным алгебраическим многообразием.

б) Докажите, что H_{ij} можно отождествить с тотальным пространством некоторого расслоения над $\mathbb{C}P^i$ со слоем $\mathbb{C}P^{j-1}$.

в)* При каких i,j на многообразии H_{ij} можно задать действие тора, превращающее его в торическое многообразие?

Date: 7 ноября 2022 г.

ТОРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ ЛИСТОК 4: ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ КАК ФАКТОРПРОСТРАНСТВА

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Для конечно порождённой свободной абелевой группы (*решётки*) $N \cong \mathbb{Z}^n$ рассмотрим соответствующий алгебраический тор $\mathbb{C}_N^\times = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times \cong (\mathbb{C}^\times)^n$. Пусть дана точная последовательность конечно порождённых абелевых групп

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

где F — конечная группа, а L, M, N — решётки. Докажите, что ей соответствует точная последовательность коммутативных алгебраических групп

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow \mathbb{C}_M^\times \longrightarrow \mathbb{C}_N^\times \longrightarrow 1,$$

где $H \cong \mathbb{C}_L^\times \times F$.

2. Докажите, что образующие одномерных конусов веера $\Sigma \subset N_\mathbb{R}$ линейно порождают пространство $N_\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда торическое многообразие V_Σ не представляется в виде $V_{\Sigma'} \times \mathbb{C}^\times$, где $V_{\Sigma'}$ — другое торическое многообразие.

3. Для веера $\Sigma \subset N_\mathbb{R}$ с примитивными образующими $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ рассмотрим отображение решёток $A\colon \mathbb{Z}^m \to N$, $\boldsymbol{e}_i \mapsto \boldsymbol{a}_i$, и соответствующее отображение торов $\exp A\colon (\mathbb{C}^\times)^m \to \mathbb{C}_N^\times$. Определим группу G из точной последовательности

$$1 \longrightarrow G \longrightarrow (\mathbb{C}^\times)^m \longrightarrow \mathbb{C}_N^\times \longrightarrow 1.$$

а) Докажите, что группа G имеет вид

$$G = \bigl\{(t_1, \ldots, t_m) \in (\mathbb{C}^\times)^m \colon \prod_{i=1}^m t_i^{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_i \rangle} = 1 \quad \text{для любого } \boldsymbol{u} \in N^*\bigr\}.$$

б) Докажите, что если $\mathbb{R}\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle \cong N_\mathbb{R}$, то $G \cong (\mathbb{C}^\times)^{m-n} \times F$, где $F = N/\mathbb{Z}\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle$ — конечная группа.

в) Докажите, что если веер Σ содержит хотя бы один неособый n-мерный конус, то $G \cong (\mathbb{C}^\times)^{m-n}$.

г) Докажите, любой лорановский моном от $z_1, \ldots, z_m$, инвариантный относительно действия G на $\mathbb{C}^m$ имеет вид $\prod_{i=1}^m z_i^{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_i \rangle}$ для некоторого $\boldsymbol{u} \in N^*$.

4*. Для конуса $\sigma \in \Sigma$, порождённого векторами $\boldsymbol{a}_{i_1} \ldots, \boldsymbol{a}_{i_k}$, положим $g(\sigma) = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [m]$ и рассмотрим моном $z^{\hat\sigma} = \prod_{j \notin g(\sigma)} z_j$. Определим

$$U(\sigma) = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m \colon z^{\hat\sigma} \neq 0\} = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m \colon z_j \neq 0 \ \text{ при } \ j \notin g(\sigma)\}, \quad U(\Sigma) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U(\sigma).$$

Докажите, что если веер Σ не является симплициальным, то для действия G на $U(\sigma)$ (и на $U(\Sigma)$) существует незамкнутая орбита.

5. Действие топологической группы H на топологическом пространстве X называется *собственным*, если отображение $H \times X \to X \times X$, $(h, x) \mapsto (hx, x)$, собственно, т. е. прообраз компактного подмножества компактен. Докажите, что

а) действие $\mathbb{C}^\times$ на $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, заданное формулой $(t, (z_1, z_2)) \mapsto (tz_1, tz_2)$, собственно;

Date: 5 декабря 2022 г.

б) действие $\mathbb{C}^\times$ на $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, заданное формулой $(t,(z_1,z_2)) \mapsto (tz_1, t^{-1}z_2)$, не является собственным, хотя все его орбиты замкнуты.

6*. Докажите, что определённое выше действие группы G на пространстве $U(\Sigma)$ собственно, если веер Σ является симплициальным. (Указание: рассуждение аналогично доказательству замкнутости орбит. А именно, покажите, что если последовательности $\{\boldsymbol{z}^{(k)}\}$ и $\{\boldsymbol{g}^{(k)}\boldsymbol{z}^{(k)}\}$ имеют пределы в $U(\Sigma)$, то и в $\{\boldsymbol{g}^{(k)}\}$ можно выбрать подпоследовательность, имеющую предел в G.)

7. Докажите, что факторпространство X/G локально компактного хаусдорфова пространства (в частности, многообразия) X по собственному действию группы G хаусдорфово. Выведите отсюда, что факторпространство $U(\Sigma)/G$, соответствующее симплициальному вееру Σ, хаусдорфово. Это даёт альтернативное топологическое доказательство отделимости торических многообразий, получаемых склейкой аффинных частей, в симплициальном случае.

8. Пусть Σ — неособый (регулярный) веер, причём $\mathbb{R}\langle \boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_m\rangle \cong N_\mathbb{R}$. Убедитесь, что пространство $U(\Sigma)$ является 2-связным. Докажите, рассмотрев точную гомотопическую последовательность главного G-расслоения $U(\Sigma)\to V_\Sigma$, что неособое торическое многообразие V_Σ является односвязным, а группа $H_2(V_\Sigma;\mathbb{Z})$ естественно отождествляется с ядром отображения $A\colon \mathbb{Z}^m \to N$. Следовательно, $H^2(V_\Sigma;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^m/N^*$, что совпадает с группой Пикара многообразия V_Σ.

ТОРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ ЛИСТОК 5: ГАМИЛЬТОНОВЫ ДЕЙСТВИЯ ТОРА И СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ РЕДУКЦИЯ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Докажите, что отображение моментов $\mu\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^m$ для покоординатного действия тора $\mathbb{T}^m$ на $\mathbb{C}^m$ с симплектической формой $\omega = i\sum_{k=1}^m d\bar{z}_k \wedge dz_k$ имеет вид $\mu(z_1,\dots,z_m) = (|z_1|^2,\dots,|z_m|^2)$.

2. Пусть дано гамильтоново действие тора T на симплектическом многообразии W с собственным отображением моментов $\mu\colon W \to \mathfrak{t}^*$. Пусть $\boldsymbol{u} \in \mathfrak{t}^*$ — регулярное значение отображения моментов, т. е. дифференциал $D\mu\colon \mathcal{T}_xW \to \mathfrak{t}^*$ сюръективен для любого $x \in \mu^{-1}(\boldsymbol{u})$. Докажите, что

а) множество уровня $\mu^{-1}(\boldsymbol{u})$ является гладким компактным T-инвариантным подмногообразием в W;
б) действие тора T на $\mu^{-1}(\boldsymbol{u})$ почти свободно (все стабилизаторы конечны).

3. Пусть
$$P = \{\boldsymbol{u} \in N_{\mathbb{R}}^*\colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{u}\rangle + b_i \geqslant 0, \quad i = 1,\dots,m\}$$
— дельзанов многогранник с вершинами в решётке $N^* \cong \mathbb{Z}^n$, $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m$ — его внутренние примитивные нормали граней, Σ_P — соответствующий неособый нормальный веер. Рассмотрим отображение решёток $A\colon \mathbb{Z}^m \to N$, $\boldsymbol{e}_i \mapsto \boldsymbol{a}_i$, и соответствующий гомоморфизм (компактных) торов $\exp A\colon \mathbb{T}^m \to T_N$, где $T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{T}^n$. Определим группу K из точной последовательности
$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \mathbb{T}^m \longrightarrow T_N \longrightarrow 1.$$

а) Докажите, что $K \cong \mathbb{T}^{m-n}$.

Рассмотрим отображение моментов
$$\mu_P\colon \mathbb{C}^m \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\Gamma} \mathfrak{k}^*$$
для действия тора K на $\mathbb{C}^m$, получаемого ограничением гамильтонова действия тора $\mathbb{T}^m$, и положим $\boldsymbol{b} = (b_1,\dots,b_m)^t$. Докажите, что

б) $\boldsymbol{u} = \Gamma\boldsymbol{b}$ является регулярным значением отображения μ_P;
в) действие тора K на $\mu^{-1}(\boldsymbol{u})$ свободно;
г) $\mu^{-1}(\boldsymbol{u}) \subset U(\Sigma_P)$, где $U(\Sigma_P)$ — открытое подмножество в $\mathbb{C}^m$ (дополнение набора координатных плоскостей), задаваемое веером Σ_P, см. задачу 4.4.

Гладкое $(m+n)$-мерное многообразие $\mathcal{Z}_P = \mu^{-1}(\boldsymbol{u})$ называется *момент-угол-многообразием*, а $M_P = \mu^{-1}(\boldsymbol{u})/K$ — *гамильтоновым торическим многообразием*, соответствующим многограннику P.

4. Пусть Σ — полный неособый веер в $\mathbb{R}^2$ с одномерными конусами, порождёнными векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $-\boldsymbol{e}_1 + k\boldsymbol{e}_2$ и $-\boldsymbol{e}_2$, задающий поверхность Хирцебруха H_k, $k \in \mathbb{Z}$.

а) Убедитесь, что Σ — нормальный веер дельзанового четырёхугольника P с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(k+1,1)$ и $(0,1)$.
б) Запишите явно в координатах отображение моментов μ_P и пересечение квадрик, задающее момент-угол-многообразие $\mathcal{Z}_P$.

Date: 12 декабря 2022 г.

в) Докажите, что $\mathcal{Z}_P$ диффеоморфно произведению $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, где

$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

— единичная сфера в $\mathbb{C}^2$.

г) Представьте поверхность Хирцебруха H_k в виде фактормногообразия произведения $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ по явно заданному двумерному подтору в $\mathbb{T}^4$.

5*. Пусть P — дельзанов пятиугольник в $\mathbb{R}^2$ с вершинами $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$ и $(0, 2)$. Докажите, что соответствующее момент-угол-многообразие $\mathcal{Z}_P$ диффеоморно $(S^3 \times S^4)^{\#5}$ — связной сумме пяти экземпляров произведения сфер $S^3 \times S^4$.