ТОРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ
ЛИСТОК 1: КОНУСЫ, ВЕЕРЫ, ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Докажите, что выпуклый полиэдральный конус $\sigma \neq \mathbb{R}^n$ имеет (единственную) наименьшую грань $\sigma \cap (-\sigma)$, причём она является вершиной $\mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда σ является строго выпуклым.

2. Докажите, что любой минимальный набор образующих строго выпуклого полиэдрального конуса состоит из ненулевых векторов вдоль его одномерных граней (рёбер).

3. Докажите, что для любого полиэдрального конуса $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ его двойственный

$$\sigma^{\vee} = \bigl\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle \geqslant 0 \;\text{ для любого }\; \boldsymbol{u} \in \sigma \bigr\}.$$

является полиэдральным конусом, имеет место равенство $(\sigma^{\vee})^{\vee} = \sigma$, и $\sigma^{\vee}$ является строго выпуклым тогда и только тогда, когда $\dim \sigma = n$.

4. Опишите торическое многообразие, соответствующее вееру с 3 одномерным конусами, порождёнными векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $-\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ (и без двумерных конусов).

5. Пусть Σ — полный неособый веер в $\mathbb{R}^2$ с 3 одномерными конусами. Покажите, что торическое многообразие V_Σ изоморфно комплексному проективному пространству $\mathbb{C}P^2$.

6*. Пусть Σ — полный неособый веер в $\mathbb{R}^2$ с 4 одномерными конусами. Покажите, что торическое многообразие V_Σ изоморфно одной из *поверхностей Хирцебруха* $F_k = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{O}(k))$. Здесь $\mathbb{C}P(-)$ обозначает проективизацию комплексного векторного расслоения, $\underline{\mathbb{C}}$ обозначает тривиальное одномерное расслоение над $\mathbb{C}P^1$, а $\mathcal{O}(k) = \bar{\eta}^{\otimes k}$ обозначает k-тензорную степень сопряжённого к тавтологическому одномерному расслоению над $\mathbb{C}P^1$, $k \in \mathbb{Z}$.

7*. Покажите, что поверхность Хирцебруха F_k гомеоморфна $S^2 \times S^2$ при чётном k и гомеоморфна $\mathbb{C}P^2 \,\#\, \overline{\mathbb{C}P}^2$ при нечётном k, где $\#$ обозначает связную сумму ориентированных многообразий, а $\overline{\mathbb{C}P}^2$ есть $\mathbb{C}P^2$ с обращённой ориентацией.

8. Пусть U — дополнение до произвольного набора координатных плоскостей вида $\{\boldsymbol{z} \colon z_{i_1} = \ldots = z_{i_k} = 0\}$ в $\mathbb{C}^m$. Докажите, что U — неособое торическое многообразие, опишите его покрытие аффинными торическими многообразиями и соответствующий веер Σ в $\mathbb{R}^m$.

9. Пусть $N \cong \mathbb{Z}^n$ — решётка, $T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^{\times} \cong (\mathbb{C}^{\times})^n$ — задаваемый ей алгебраический тор, $M = N^*$ — решётка характеров тора и $\mathbb{C}[M] \cong \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_m^{\pm 1}]$ — алгебра регулярных функций на торе. Предположим, что $A \subset \mathbb{C}[M]$ — подмножество функций, инвариантное относительно действия тора. Докажите, что

$$A = \bigoplus_{\chi^m \in A} \mathbb{C} \cdot \chi^m,$$

т. е. A порождено содержащимися в нём характерами тора.

Date: 28 сентября 2020 г.

ТОРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ
ЛИСТОК 2: МНОГОГРАННИКИ И НОРМАЛЬНЫЕ ВЕЕРЫ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Выпуклый n-мерный многогранник называется *симплициальным*, если все его собственные грани — симплексы, и называется *простым*, если в каждой его вершине сходится в точности n гиперграней. Докажите, что при $n \geqslant 3$ если многогранник является одновременно простым и симплициальным, то это — симплекс.

2. Для выпуклого многогранника P в аффинном пространстве $M_{\mathbb{R}}$ определим его *полярное множество* как

$$P^* = \{\boldsymbol{u} \in M_{\mathbb{R}}^* \colon \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle + 1 \geqslant 0 \text{ для всех } \boldsymbol{x} \in P\}.$$

Докажите, что

а) P^* является выпуклым многогранником (в частности, ограничено) тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} \in \operatorname{int} P$;
б) $(P^*)^* = \operatorname{conv}(P, \mathbf{0})$, так что $P \subset (P^*)^*$ и $(P^*)^* = P$, если $\mathbf{0} \in P$.

3. Два многогранника называются *комбинаторно эквивалентными*, если между их граням можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношение включения. Докажите, что n-мерный простой многогранник, все двумерные грани которого являются четырёхугольниками, комбинаторно эквивалентен n-мерному кубу.

4. Докажите, что каждый из двух многогранников, получаемых разрезанием симплекса Δ^n гиперплоскостью, не проходящей через вершины, комбинаторно эквивалентен произведению двух симплексов. Выведите отсюда, что каждый n-мерный простой многогранник с $n+2$ гипергранями комбинаторно эквивалентен (и даже проективно эквивалентен) произведению двух симплексов.

5. Пусть n-мерный многогранник P задан как пересечение полупространств (т. е. системой линейных неравенств) в n-мерном аффинном пространстве $M_{\mathbb{R}}$:

$$P = \{x \in M_{\mathbb{R}} \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle + b_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m\},$$

где $\boldsymbol{a}_i \in M_{\mathbb{R}}^*$, $b_i \in \mathbb{R}$. Предположим, что среди неравенств $\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle + b_i \geqslant 0$ нет *лишних*, т. е. удаление любого неравентва из системы изменяет задаваемое ими множество. Докажите, что в этом случае каждое множество

$$F_i = \{\boldsymbol{x} \in P \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle + b_i = 0\}$$

является гипергранью многогранника P.

6. Пусть P — многогранник как в предыдущей задаче. Для каждой грани $Q \subset P$ рассмотрим конус

$$\sigma_Q = \{\boldsymbol{u} \in M_{\mathbb{R}}^* \colon \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}' \rangle \leqslant \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \text{ для любых } \boldsymbol{x}' \in Q \text{ и } \boldsymbol{x} \in P\},$$

двойственный к многогранному углу при грани Q (порождённому всеми векторами $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$ из $\boldsymbol{x}' \in Q$ в $\boldsymbol{x} \in P$). Докажите, что конус σ_Q имеет минимальный набор образующих, состоящий из векторов $\boldsymbol{a}_i$, для которых $Q \subset F_i$.

Date: 12 октября 2020 г.

7. Докажите, что набор конусов $\Sigma_P = \{\sigma_Q \colon Q \text{ есть грань в } P\}$ является полным веером в пространстве $N_{\mathbb{R}} = M_{\mathbb{R}}^*$, причём этот веер является симплициальным тогда и только тогда, когда P — простой многогранник.

8. Докажите, что если $\mathbf{0}$ содержится во внутренности P, но веер Σ_P состоит из конусов над гранями полярного многогранника P^*.

9. Определим *опорную функцию* $\psi_P \colon M_{\mathbb{R}}^* \to \mathbb{R}$ выпуклого многогранника $P \in M_{\mathbb{R}}$ формулой

$$\psi_P(\boldsymbol{u}) = \min_{\boldsymbol{x}\in P}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}\rangle.$$

Докажите, что

а) функция ψ_P непрерывна на $M_{\mathbb{R}}^*$ и линейна на конусах σ нормального веера Σ_P, т. е. $\psi_P(\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{m}_\sigma\rangle$ при $\boldsymbol{u} \in \sigma$ для некоторого $\boldsymbol{m}_\sigma \in M_{\mathbb{R}}$;

б) функция ψ_P *строго выпукла* в следующем смысле: для любого максимального (n-мерного) конуса $\sigma \in \Sigma_P$ при $\boldsymbol{u} \notin \sigma$ имеет место строгое неравенство $\psi_P(\boldsymbol{u}) < \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{m}_\sigma\rangle$.