Геометрия и топология-5
Теория гомологий и характеристические классы

ПАНОВ Тарас Евгеньевич

Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова

Последняя редакция: 17 июля 2023 г.

Содержание

Предисловие

Курс лекций на специальном потоке «Фундаментальная математика и математическая физика» на механико-математическом факультете МГУ (4-й курс, 8-й семестр). Включает основы теории гомологий и теорию характеристических классов.

Данный текст доступен на странице Т. Е. Панова на сайте кафедры высшей геометрии и топологии: `http://higeom.math.msu.su/people/taras/`

Список литературы

[БТ] Р. Ботт, Л. В. Ту. *Дифференциальные формы в алгебраической топологии.* Москва, «Наука», 1989.

[ДНФ] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. *Современная геометрия. Методы и приложения.* Москва, «Наука», 1986.

[Ле] С. Ленг. *Введение в теорию дифференцируемых многообразий.* Москва, «Мир», 1967.
[МС] Дж. Милнор, Дж. Сташефф. *Характеристические классы,* с приложением работы Дж. Манкрса "Элементарная дифференциальная топология". Москва, «Мир», 1979.
[Ми] А. С. Мищенко. *Векторные расслоения и их применения.* Москва, «Наука», 1984.
[Топ1] Т. Е. Панов. *Топология-1. Курс лекций.* http://higeom.math.msu.su/people/taras/#teaching
[Ст] Р. Стонг. *Заметки по теории кобордизмов.* Москва, «Мир», 1973.
[ФФ] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. *Курс гомотопической топологии.* Москва, «Наука», 1989.
[Ха] А. Хатчер. *Алгебраическая топология.* Москва, МЦНМО, 2011.
[Ha] A. Hatcher. *Vector bundles and K-theory.* http://math.cornell.edu/~hatcher/

1. Симплициальные гомологии

1.1. **Симплициальные комплексы и триангуляции.** Мы уже встречались с понятиями симплекса и симплициального комплекса в курсе «Топология-1» при доказательстве теоремы о клеточной аппроксимации.

Напомним, что n-мерный *симплекс* — это выпуклая оболочка набора из $n+1$ точек $v_0, v_1, \ldots, v_n$ в некотором евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$, не лежащих в одной $(n-1)$-мерной плоскости (где под плоскостью мы подразумеваем аффинное подпространство). Эквивалентное условие состоит в том, что векторы $v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0$ линейно независимы. Точки $v_0, v_1, \ldots, v_n$ называются *вершинами* симплекса, а сам симплекс мы будем обозначать $[v_0, \ldots, v_n]$. Выпуклые оболочки поднаборов множества вершин симплекса называются его *гранями*. Грани являются симплексами размерности $\leqslant n$.

Пример 1.1. *Правильный* n-мерный симплекс есть

$$\Delta^n = \Big\{(t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \sum_i t_i = 1 \text{ и } t_i \geqslant 0 \text{ для всех } i\Big\}.$$

Его вершинами являются концы единичных векторов вдоль координатных осей.

Далее вершины симплексов мы будем всегда считать упорядоченными, и под «n-мерным симплексом» мы будем иметь ввиду «n-мерный симплекс с указанным порядком его вершин». Вершины граней симплекса всегда будут упорядочиваться согласно их порядку в большем симплексе.

Задание порядка вершин определяет канонический линейный гомеоморфизм правильного n-мерного симплекса Δ^n на любой n-мерный симплекс $[v_0, \ldots, v_n]$, сохраняющий порядок вершин, а именно

$$(t_0, \ldots, t_n) \mapsto \sum_i t_i v_i.$$

Коэффициенты $t_0, \ldots, t_n$ называются *барицентрическими координатами* точки $\sum_i t_i v_i$ в симплексе $[v_0, \ldots, v_n]$.

Объединение всех собственных граней симплекса Δ^n называется его *границей* и обозначается $\partial\Delta^n$. Внутренность $\Delta^n \setminus \partial\Delta^n$ симплекса Δ^n называется *открытым симплексом* и обозначается $\dot{\Delta}^n$. При этом для $n = 0$ принимается соглашение, что внутренность 0-симплекса (точки) совпадает с ним самим.

Конечный *симплициальный комплекс* — это такой конечный набор симплексов произвольной размерности в некотором $\mathbb{R}^N$, что любые два симплекса из этого набора либо не пересекаются, либо пересекаются по целой грани. Говорят, что некоторое подмножество K евклидова пространства $\mathbb{R}^N$ *триангулировано*, если оно представлено в виде объединения симплексов, которые образуют (конечный) симплициальный комплекс. *Триангуляцией* топологического пространства X называется гомеоморфизм $f \colon K \to X$ между некоторым триангулированным подмножеством $K \subset \mathbb{R}^N$ и X. Часто говорят, что на пространстве X *задана структура симплициального комплекса*, имея ввиду, что задана его триангуляция. (Можно также рассматривать симплициальные комплексы и триангуляции, состоящие из бесконечного числа симплексов, но в этом случае естественная топология на них не является индуцированной из $\mathbb{R}^N$, её определение будет дано в следующем параграфе.)

Таким образом, триангуляция пространства X задаётся набором отображений $\sigma_\alpha\colon \Delta^{n_\alpha} \to X$ (ограничений гомеоморфизма $f\colon K \to X$ на симплексы множества $K \subset \mathbb{R}^N$) и каждая точка пространства X содержится в образе ровно одного ограничения $\sigma_\alpha|_{\dot{\Delta}^{n_\alpha}}$ на внутренность симплекса. Другими словами, X представлено в виде несвязного объединения гомеоморфных образов внутренностей симплексов.

Пример 1.2.

1. Граница n-мерного симплекса Δ^n задаёт триангуляцию $(n-1)$-мерной сферы. В частности, граница тетраэдра задаёт триангуляция 2-мерной сферы. Другими примерами триангуляций 2-мерной сферы являются границы октаэдра или икосаэдра, а также граница любого 3-мерного многогранники, у которого все 2-мерные грани — треугольники (такие многогранника называются *симплициальными*).

2. На рис. 1 а) показана триангуляция тора T^2 с 9 вершинами. На рис. 1 б) показана триангуляция тора T^2 с 7 вершинами. Противоположные стороны квадратов отождествляются в соответствии со стрелками.

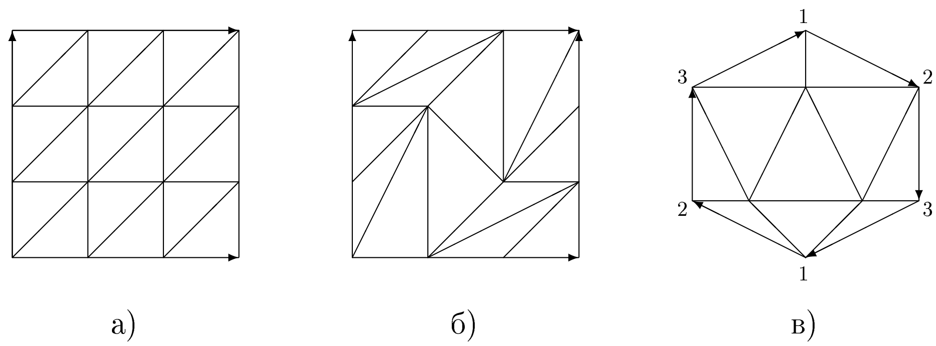


Рис. 1. Триангуляции тора T^2 и проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$.

3. На рис. 1 в) показана триангуляция проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ с 6 вершинами. На границе многоугольника производятся отождествления в соответствии со стрелками и нумерацией вершин.

Триангуляции на рис. 1 б) и в) минимальны по числу вершин (задача).

В классическом подходе симплициальные гомологии пространств определялись через их триангуляции. Однако мы видим, что даже для простых двумерных поверхностей триангуляции содержат большое количество симплексов, что приводит к громоздким вычислениям. Обобщение понятия симплициального комплекса, при котором симплексы могут приклеиваться друг к другу по части границы, а не только по одному симплексу, приводит к более экономным разбиениям пространств на симплексы. Примеры изображены на рис. 2, а определение приводится в следующем параграфе.

1.2. **Полусимплициальные комплексы.** Структура *полусимплициального комплекса* на пространстве X — это такой набор отображений $\sigma_\alpha\colon \Delta^n \to X$, где n зависит от индекса α, что выполняются следующие условия.

а) Ограничение $\sigma_\alpha|_{\dot{\Delta}^n}$ инъективно, и каждая точка пространства X содержится в образе ровно одного такого ограничения $\sigma_\alpha|_{\dot{\Delta}^n}$.

б) Каждое ограничение отображения σ_α на грань симплекса Δ^n — это одно из отображений $\sigma_\beta\colon \Delta^k \to X$, $k \leqslant n$.

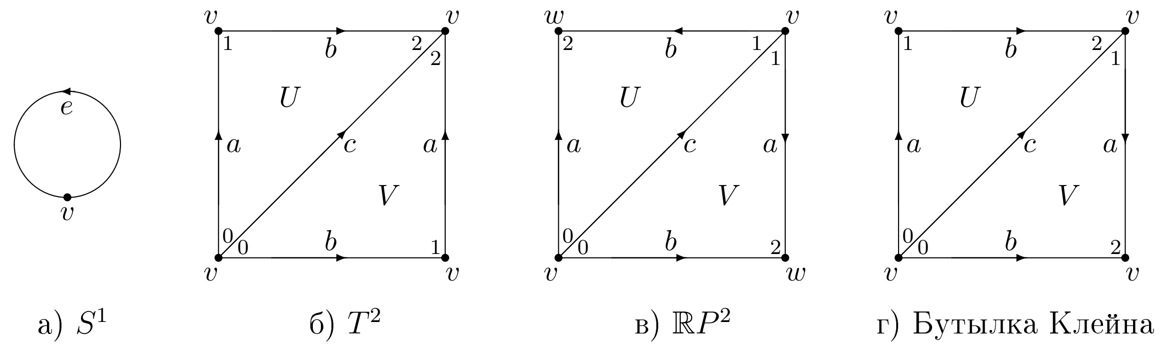


Рис. 2. Полусимплициальные комплексы

в) Множество $A \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда множество $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ открыто в Δ^n для всех σ_α.

Если каждое отображение $\sigma_\alpha \colon \Delta^n \to X$ инъективно, количество этих отображений конечно и пересечение любых двух симплексов $\sigma_\alpha(\Delta^n)$ и $\sigma_\beta(\Delta^m)$ в X является гранью каждого из них (возможно, пустой), то все симплексы можно вложить в одно пространство $\mathbb{R}^N$ так, что $\bigcup_\alpha \Delta^n$ станет симплициальным комплексом, а X — триангулированным пространством. В этом случае условие в) выполнено автоматически. Если же количество симплексов $\sigma_\alpha \colon \Delta^n \to X$ бесконечно, то условие в) даёт «правильный» способ введения топологии на $\bigcup_\alpha \Delta^n$, не зависящий от вложений в $\mathbb{R}^N$. См. задачи 1.10 и 1.11. Таким образом, бесконечные симплициальные комплексы (триангуляции) — это полусимплициальные комплексы, в которых все отображения σ_α инъективны и все пересечения $\sigma_\alpha(\Delta^n) \cap \sigma_\beta(\Delta^m)$ являются гранями.

Из условия в) следует, что X можно построить как факторпространство набора непересекающихся симплексов Δ^n_α, по одному для каждого отображения $\sigma_\alpha \colon \Delta^n \to X$. Отсюда следует, что пространство X должно быть хаусдорфовым, а каждое ограничение $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$ является гомеоморфизмом на свой образ, который поэтому является открытым симплексом в X (задача). Тем самым открытые симплексы $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$ задают клеточное разбиение пространства X. Однако полусимплициальные комплексы образуют весьма ограниченный класс клеточных пространств.

Пример 1.3.

1. На рис. 1.1 а) изображено полусимплициальное разбиение окружности с одной вершиной v и одним ребром (1-мерным симплексом) e.

2. На рис. 1.1 б) изображено полусимплициальное разбиение тора с одной вершиной v, тремя рёбрами a, b, c и двумя треугольниками (2-мерными симплексами) U, V. Рёбра ориентируются в соответствии с порядком отображаемых вершин симплексов, от меньшей к большей. Например, U является образом треугольника $\Delta^2 = [012]$, при этом ребро $[01]$ отображается в a, ребро $[12]$ в b, и ребро $[02]$ в $[c]$, и все три вершины $0, 1, 2$ переходят в v.

3. На рис. 1.1 в) изображено полусимплициальное разбиение проективной плоскости с двумя вершинами v, w, тремя рёбрами a, b, c и двумя треугольниками U, V. Здесь отображение из $\Delta^2 = [012]$, соответствующее треугольнику U, устроено так: вершины 0 и 1 переходят в v, а 2 в w.

4. На рис. 1.1 г) изображено полусимплициальное разбиение бутылки Клейна с одной вершиной v, тремя рёбрами a, b, c и двумя треугольниками U, V.

1.3. **Симплициальные гомологии.** Пусть X — полусимплициальный комплекс. Определим свободную абелеву группу $\varDelta_n(X)$, порождённую n-мерными симплексами $\sigma_\alpha\colon \varDelta^n \to X$ комплекса X. Элементы группы $\varDelta_n(X)$ называются n-мерными *симплициальными цепями* для X. Каждая симплициальная цепь может быть записана в виде конечной формальной суммы $\sum_\alpha k_\alpha\sigma_\alpha$ с коэффициентами $k_\alpha \in \mathbb{Z}$.

Определим *граничный гомоморфизм* $\partial_n\colon \varDelta_n(X) \to \varDelta_{n-1}(X)$, задав его значения на элементах базиса $\sigma_\alpha\colon [v_0, \dots, v_n] \to X$:

$$\partial_n(\sigma_\alpha) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_\alpha|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_n]}, \tag{1}$$

где $\sigma_\alpha|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_n]}$ обозначает $(n-1)$-мерную грань симплекса σ_α, получаемую опусканием i-й вершины v_i. Например,

$$\partial_1[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0],$$
$$\partial_2[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1].$$

Выбор знаков обусловлен согласованием ориентаций, задаваемых порядком вершин, на симплексе и его гранях.

Лемма 1.4. *Композиция* $\varDelta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \varDelta_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \varDelta_{n-2}(X)$ *является нулевым отображением.*

Доказательство. Из соотношения (1) вытекает

$$\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = \sum_{j<i} (-1)^i(-1)^j \sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_j,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_n]} + \sum_{j>i} (-1)^i(-1)^{j-1} \sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,\widehat{v}_j,\dots,v_n]}.$$

Последние две суммы сокращаются, так как после перестановки i и j во второй сумме она становится первой суммой со знаком минус. □

Тем самым мы находимся в следующей алгебраической ситуации. Имеется последовательность гомоморфизмов абелевых групп

$$\dots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

причём $\partial_n\partial_{n+1} = 0$ для всех n. Такая последовательность $C_\bullet = \{C_n, \partial_n\}$ называется *цепным комплексом*. Из равенства $\partial_n\partial_{n+1} = 0$ следует, что $\operatorname{Im}\partial_{n+1} \subset \operatorname{Ker}\partial_n$. Поэтому мы можем определить n-ю *группу гомологий* цепного комплекса как факторгруппу $H_n = \operatorname{Ker}\partial_n / \operatorname{Im}\partial_{n+1}$. Элементы ядра $\operatorname{Ker}\partial_n$ называются *циклами*, а элементы образа $\operatorname{Im}\partial_{n+1}$ — *границами*. Элементы группы H_n называются *классами гомологий*. Класс гомологий цикла $c \in \operatorname{Ker}\partial_n$ обозначается через $[c]$. Два цикла, представляющие один и тот же класс гомологий, называются *гомологичными*. Это означает, что их разность является границей.

Возвращаясь к случаю $C_n = \varDelta_n(X)$, группу гомологий $\operatorname{Ker}\partial_n / \operatorname{Im}\partial_{n+1}$ будем обозначать $H_n^\varDelta(X)$ и называть n-й *группой симплициальных гомологий* комплекса X.

Пример 1.5. Пусть $X = S^1$ с одной вершиной v и одним ребром e, см. рис. 1.1 а). Тогда обе группы $\varDelta_0(X)$ и $\varDelta_1(X)$ равны $\mathbb{Z}$, а граничное отображение ∂_1 нулевое, так как $\partial_1 e = v - v$. Кроме того, $\varDelta_n(S^1) = 0$ при $n \geqslant 2$, так как в этих размерностях нет симплексов. Следовательно,

$$H_n^\varDelta(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } n = 0, 1; \\ 0 & \text{при } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Пример 1.6. Пусть $X = T^2$ — тор с одной вершиной v, тремя рёбрами a, b, c и двумя треугольниками U, V, см. рис. 1.1 б). Как и в предыдущем примере, $\partial_1 = 0$, поэтому $H_0^\Delta(T^2) = \mathbb{Z}$. Так как $\partial_2 U = [12] - [02] + [01] = b - c + a = \partial_2 V$, а $a, b, a+b-c$ — базис группы $\partial_1(T^2)$, получаем, что $H_1^\Delta(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ с базисными классами гомологий $[a]$ и $[b]$. Так как трёхмерных симплексов нет, $H_2^\Delta(T^2) = \operatorname{Ker} \partial_2$, а группа $\operatorname{Ker} \partial_2 \cong \mathbb{Z}$ порождена циклом $U - L$. Таким образом,

$$H_n^\Delta(T^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{при } n = 1; \\ \mathbb{Z} & \text{при } n = 0, 2; \\ 0 & \text{при } n \geqslant 3. \end{cases}$$

Пример 1.7. Пусть $X = \mathbb{R}P^2$ с двумя вершинами v, w, тремя рёбрами a, b, c и двумя треугольниками U, V, см. рис. 1.1 в). Тогда группа $\operatorname{Im} \partial_1$ порождена цепью $w - v$, поэтому $H_0^\Delta(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}$, причём в качестве образующей можно взять $[v]$ или $[w]$. Так как $\partial_2 U = -a+b+c$ и $\partial_2 V = a-b+c$, мы видим, что $\operatorname{Ker} \partial_2 = 0$, поэтому $H_2^\Delta(\mathbb{R}P^2) = 0$. Далее, $\operatorname{Ker} \partial_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ с базисом $a-b$ и c. Отсюда видно, что $\operatorname{Im} \partial_2$ является подгруппой индекса 2 в $\operatorname{Ker} \partial_1$, так как в качестве базиса в $\operatorname{Ker} \partial_1$ можно взять $a - b + c$ и c, а в качестве базиса в $\operatorname{Im} \partial_2$ можно взять $a - b + c$ и $(-a + b + c) + (a - b + c) = 2c$. Таким образом, $H_1^\Delta(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$ и мы имеем

$$H_n^\Delta(\mathbb{R}P^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } n = 0; \\ \mathbb{Z}_2 & \text{при } n = 1; \\ 0 & \text{при } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Симплициальные гомологии в действительности являются топологическими инвариантами пространства X, т.е. не зависят от способа его разбиения на симплексы. Более того, группы симплициальных гомологий гомотопически эквивалентных пространств одинаковы. Для того, чтобы доказать эти свойства, мы определим другой тип гомологий пространств — группы сингулярных гомологии, определение которых не будет использовать разбиение пространства на симплексы. Затем мы докажем, что группы симплициальных и сингулярных гомологий полусимплициального комплекса совпадают.

Задачи и упражнения.

1.8. Докажите, что минимальное число вершин в триангуляции тора равно 7, а в триангуляции проективной плоскости — 6.

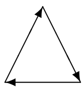
1.9. Постройте какую-нибудь триангуляцию бутылки Клейна. Какое минимальное число вершин у такой триангуляции?

1.10. Пусть I_k — отрезок единичной длины на плоскости $\mathbb{R}^2$ с концами $(0, 0)$ и $(\cos \frac{2\pi}{k}, \sin \frac{2\pi}{k})$. Определим $Y = \bigcup_{k=1}^\infty I_k$ как подпространство в $\mathbb{R}^2$ с индуцированной топологией. Пусть $\sigma_k \colon \Delta^1 \to Y$ — линейное отображение отрезка Δ^1 на I_k. Докажите, что семейство отображений σ_k вместе с их ограничениями на вершины удовлетворяет условиям а) и б) из определения полусимплициального комплекса, но не удовлетворяет условию в). Таким образом, пространство Y представляет собой бесконечное объединение симплексов в $\mathbb{R}^2$, примыкающих друг к другу по граням, но не является полусимплициальным комплексом.

1.11. Рассмотрим букет счётного числа отрезков $X = \bigvee_{k=1}^{\infty} \Delta_k^1$. (По определению, букет — это факторпространство $(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k^1)/(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} 0_k)$.) Докажите, что инъективные отображения $\sigma_k \colon \Delta_k^1 \to X$ вместе с их ограничениями на вершины задают на X структуру бесконечного (полу)симплициального комплекса, но X не вкладывается в $\mathbb{R}^N$ ни для какого N (т. е. не гомеоморфно подмножеству $\mathbb{R}^N$ с индуцированной топологией).

1.12. Докажите, что структура полусимплициального комплекса на пространстве X задаёт на нем структуру клеточного пространства.

1.13. Приведите пример клеточного разбиения пространства, которое не является структурой полусимплициального комплекса.

1.14. Пусть $X = S^1 \cup_\varphi D^2$ — клеточное пространство, получаемое приклеиванием к окружности S^1 (разбитой на две клетки) двумерной клетки по отображению $\varphi \colon S^1 \to S^1$ степени 3, $z \mapsto z^3$. Пространство X можно получить из треугольника отождествлением трёх его сторон в одну в соответствии с направлениями стрелок на рисунке:  Задают ли характеристические отображения $\Delta^0 \to X$, $\Delta^1 \to X$ и $\Delta^2 \to X$ данного клеточного разбиения структуру полусимплициального комплекса?

1.15. Вычислите симплициальные гомологии бутылки Клейна, воспользовавшись структурой полусимплициального комплекса.

1.16. Вычислите симплициальные гомологии 2-мерной сферы S^2, воспользовавшись триангуляцией или структурой полусимплициального комплекса.

2. Сингулярные гомологии

2.1. **Определение и первые свойства.** *Сингулярным n-мерным симплексом* (или просто *n-симплексом*) в пространстве X называется непрерывное отображение $\sigma \colon \Delta^n \to X$. Определим свободную абелеву группу $C_n(X)$, порождённую множеством сингулярных n-мерных симплексов в X. Элементы группы $C_n(X)$, называемые *сингулярными n-мерными цепями*, являются конечными формальными суммами $\sum_i k_i \sigma_i$, где $k_i \in \mathbb{Z}$ и $\sigma_i \colon \Delta^n \to X$. Граничное отображение $\partial_n \colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ задаётся той же формулой, что и для симплициальных цепей:

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n]},$$

где $\sigma \colon [v_0, \ldots, v_n] \to X$ — сингулярный симплекс.

Мы часто будем писать просто ∂ вместо ∂_n. Так же, как и для симплициальных цепей, доказывается, что $\partial_n \partial_{n+1} = 0$, т.е. $\partial^2 = 0$. Таким образом, можно определить группу *сингулярных гомологий* $H_n(X) = \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$.

Из определения очевидно, что гомеоморфные пространства имеют одинаковые группы сингулярных гомологий H_n, в отличие от ситуации с симплициальными гомологиями H_n^Δ. С другой стороны, так как число сингулярных n-мерных симплексов в X обычно несчётно, группы цепей $C_n(X)$ столь велики, что непонятно, почему для конечного симплициального комплекса X группа сингулярных гомологий $H_n(X)$ должна быть конечно порожденной и нулевой при $n > \dim X$. Эти свойства были тривиальны для симплициальных гомологий.

Сингулярные гомологии в действительности можно рассматривать как частный случай симплициальных гомологий при помощи следующей конструкции. Для произвольного пространства X определим *полный сингулярный комплекс* $S(X)$ как полусимплициальный комплекс, имеющий по одному симплексу для каждого сингулярного симплекса $\sigma\colon \Delta^n \to X$. Из определений ясно, что $H_n^\Delta(S(X)) = H_n(X)$ для всех n. Комплекс $S(X)$ задаёт на X структуру полусимплициального комплекса. Эта конструкция обладает свойством функториальности (т.е. отображение $X \to Y$ индуцирует отображение $S(X) \to S(Y)$, переводящее симплексы в симплексы), однако комплекс $S(X)$ слишком велик, чтобы его можно было использовать для явных вычислений.

Перейдём к описанию простейших свойств сингулярных гомологий.

Предложение 2.1. *Если пространство X представлено в виде объединения $\bigsqcup_\alpha X_\alpha$ компонент линейной связности, то $H_n(X) = \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$.*

Доказательство. Так как образ сингулярного симплекса линейно связен, мы имеем $C_n(X) = \bigoplus_\alpha C_n(X_\alpha)$. Граничное отображение ∂_n сохраняет это разложение, т.е. $\partial_n C_n(X_\alpha) \subset C_{n-1}(X_\alpha)$, поэтому подпространства $\operatorname{Ker}\partial_n$ и $\operatorname{Im}\partial_n$ аналогично раскладываются в прямую сумму. Отсюда следует разложение для гомологий. $\square$

Для дальнейшего нам понадобится следующая модификация сингулярного цепного комплекса. Определим гомоморфизм *аугментации* $\varepsilon\colon C_0(X) \to \mathbb{Z}$ по формуле $\varepsilon(\sum_i k_i\sigma_i) = \sum_i k_i$. Теперь рассмотрим последовательность

$$\dots \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

Мы имеем $\varepsilon\partial_1 = 0$, так как для любого 1-симплекса $\sigma\colon [v_0, v_1] \to X$ выполнено $\varepsilon\partial_1(\sigma) = \varepsilon(\sigma|_{[v_1]} - \sigma|_{v_0}) = 1 - 1 = 0$. Следовательно, (2) является цепным комплексом, называемым *аугментированным сингулярным цепным комплексом* для X. Его гомологии называются *приведёнными группами гомологий* и обозначаются $\widetilde{H}_n(X)$.

Так как аугментация ε обращается в нуль на $\operatorname{Im}\partial_1$, она индуцирует отображение $H_0(X) \to \mathbb{Z}$ с ядром $\widetilde{H}_0(X)$. Следовательно,

$$H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что $H_n(X) \cong \widetilde{H}_n(X)$ при $n > 0$.

Предложение 2.2. *Если пространство X линейно связно, то $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$, т.е. $\widetilde{H}_0(X) = 0$.*

Доказательство. Чтобы доказать, что $\widetilde{H}_0(X) = 0$, достаточно убедиться, что $\operatorname{Ker}\varepsilon \subset \operatorname{Im}\partial_1$, см. (2). Пусть $\varepsilon(\sum_i k_i\sigma_i) = 0$, т.е. $\sum_i k_i = 0$. Сингулярные 0-симплексы $\sigma_i\colon [v_0] \to X$ — это просто точки в X. Для каждого σ_i выберем путь $\tau_i\colon I \to X$ из фиксированной точки $x_0 \in X$ в точку $\sigma_i(v_0)$. Пусть σ_0 — сингулярный 0-симплекс с образом x_0. Каждый путь τ_i можно рассматривать как сингулярный 1-симплекс $\tau_i\colon [v_0, v_1] \to X$, причём $\partial\tau_i = \sigma_i - \sigma_0$. Мы имеем

$$\partial\Big(\sum_i k_i\tau_i\Big) = \sum_i k_i\sigma_i - \sum_i k_i\sigma_0 = \sum_i k_i\sigma_i,$$

так как $\sum_i k_i = 0$. Следовательно, $\sum_i k_i\sigma_i$ — граница, а значит $\operatorname{Ker}\varepsilon \subset \operatorname{Im}\partial_1$. $\square$

Предложение 2.3. *Гомологии точки $X = pt$ имеют вид $H_0(pt) = \mathbb{Z}$ и $H_n(pt) = 0$ при $n > 0$.*

Доказательство. Для $X = pt$ имеется единственный сингулярный n-симплекс σ_n для любого n, причём

$$\partial(\sigma_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_{n-1} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечётно или } n = 0,\\ \sigma_{n-1}, & \text{если } n \text{ чётно и } n \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, сингулярный цепной комплекс для $X = pt$ имеет вид

$$\ldots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

а его гомологии тривиальны за исключением $H_0 \cong \mathbb{Z}$. □

2.2. **Функториальность и гомотопическая инвариантность.** Здесь мы покажем, что гомотопически эквивалентные пространства имеют изоморфные группы гомологий. Для этого мы сначала убедимся, что гомологии являются функтором из категории топологических пространств в категорию абелевых групп, т.е. непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизм $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$. Затем мы докажем, что f_* является изоморфизмом, если f — гомотопическая эквивалентность.

Для отображения $f\colon X \to Y$ определим гомоморфизм цепей $f_\#\colon C_n(X) \to C_n(Y)$, взяв композицию сингулярных симплексов $\sigma\colon \varDelta^n \to X$ с f, т.е. $f_\#(\sigma) = f\sigma\colon \varDelta^n \to Y$, с последующим продолжением по линейности. При этом $f_\#\partial = \partial f_\#$, так как

$$f_\#\partial(\sigma) = f_\#\Big(\sum_i(-1)^i\sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v}_i,\ldots,v_n]}\Big) = \sum_i(-1)^i f\sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v}_i,\ldots,v_n]} = \partial f_\#(\sigma).$$

Таким образом, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_\#} & & \downarrow{\scriptstyle f_\#} & & \downarrow{\scriptstyle f_\#} & & \\
\ldots & \longrightarrow & C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_n(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(Y) & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

Эта ситуация описывается следующими алгебраическими понятиями. Пусть $C_\bullet = \{C_n, \partial\}$ и $C'_\bullet = \{C'_n, \partial\}$ — два цепных комплекса. Набор гомоморфизмов $f = \{f_n\colon C_n \to C'_n,\ n \geqslant 0\}$, называется *цепным отображением* цепного комплекса $C_\bullet$ в цепной комплекс $C'_\bullet$, если выполнены соотношения $f_n\partial = \partial f_n$.

Предложение 2.4. *Цепное отображение $f\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ индуцирует гомоморфизмы групп гомологий этих комплексов, $f_*\colon H_n(C_\bullet) \to H_n(C'_\bullet)$, причём*

а) $(fg)_* = f_*g_*$ *для композиции отображений* $C_\bullet \xrightarrow{f} C'_\bullet \xrightarrow{g} C''_\bullet$;
б) $(\mathrm{id})_* = \mathrm{id}$, *где* id *обозначает тождественное отображение.*

Доказательство. Соотношение $f\partial = \partial f$ влечёт, что f переводит циклы в циклы (из $\partial c = 0$ следует, что $\partial f(c) = f(\partial c) = 0$) и переводит границы в границы (так как $f(\partial b) = \partial f(b)$). Следовательно, f индуцирует гомоморфизм $f_*\colon H_n(C_\bullet) \to H_n(C'_\bullet)$. Свойства а) и б) очевидны. □

Возвращаясь к топологической ситуации, мы получаем, что отображение топологических пространств $f\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизмы их групп сингулярных гомологий $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$, удовлетворяющие соотношениям а) и б) из предложения 2.4. Это свойство и называется функториальностью групп гомологий.

Далее мы покажем, что гомотопные отображения пространств индуцируют одинаковые гомоморфизмы их групп гомологий. Пусть $F\colon X \times I \to Y$ — гомотопия между отображениями $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Y$. Для сингулярного симплекса $\sigma\colon \Delta^n \to X$ рассмотрим композицию $\Delta^n \times I \xrightarrow{\sigma\times\mathrm{id}} X \times I \xrightarrow{F} Y$. Это отображение вместе с разбиением призмы $\Delta^n \times I$ на симплексы даст сингулярную $(n+1)$-мерную цепь в Y. Тем самым мы построим горморфизм $P\colon C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$, который является алгебраическим аналогом гомотопии. Его формальное определение заключается в следующем.

Два цепных отображения $f\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ и $g\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ называются *цепно гомотопными*, если существует набор гомоморфизмов $P = \{P_n\colon C_n \to C'_{n+1},\ n \geqslant 0\}$ (называемый *цепной гомотопией* между f и g), удовлетворяющих соотношениям

$$\partial P + P\partial = g - f.$$

Это описывается коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "g-f"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d] \arrow[dl, "P_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "P_{n-1}"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "\partial_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Геометрический смысл соотношения цепной гомотопии поясняется ниже в доказательстве теоремы 2.6.

Предложение 2.5. *Цепно гомотопные отображения $f, g\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ индуцируют один и тот же гомоморфизм гомологий: $f_* = g_*$.*

Доказательство. Если $c \in C_n$ — цикл, то $g(c) - f(c) = \partial P(c) + P\partial(c) = \partial P(c)$, так как $\partial c = 0$. Таким образом $g(c) - f(c)$ — граница, т.е. $g_*[c] - f_*[c] = 0$. □

Теперь мы снова вернёмся к сингулярным гомологиям.

Теорема 2.6. *Гомотопные отображения пространств $f, g\colon X \to Y$ индуцируют один и тот же гомоморфизм сингулярных гомологий: $f_* = g_*$.*

Доказательство. Для доказательства мы построим цепную гомотопию $P\colon C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ между $f_\#$ и $g_\#$. Нам понадобится триангуляция (разбиение на симплексы) призмы $\Delta^n \times I$. Пусть $v_0, \ldots, v_n$ — вершины основания $\Delta^n \times \{0\}$, а $w_0, \ldots, w_n$ — вершины основания $\Delta^n \times \{1\}$. Наша триангуляция призмы $\Delta^n \times I$ имеет $n+1$ симплексов размерности $n+1$, каждый из которых имеет вид $[v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots, w_n]$, $i = 0, \ldots, n$. Можно проверить (задача), что это — действительно симплициальный комплекс. Случаи $n = 1$ и $n = 2$ показаны на рис. 3.

Пусть теперь дана гомотопия $F\colon X \times I \to Y$ между отображениями f и g. Определим *призменные операторы* $P\colon C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ по формуле

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i F \circ (\sigma \times \mathrm{id})|_{[v_0,\ldots,v_i,w_i,\ldots,w_n]},$$

где $\sigma\colon \Delta^n \to X$, а $F \circ (\sigma \times \mathrm{id})$ — композиция $\Delta^n \times I \to X \times I \to Y$. Мы покажем, что призменные операторы задают цепную гомотопию между $f_\#$ и $g_\#$, т.е. удовлетворяют

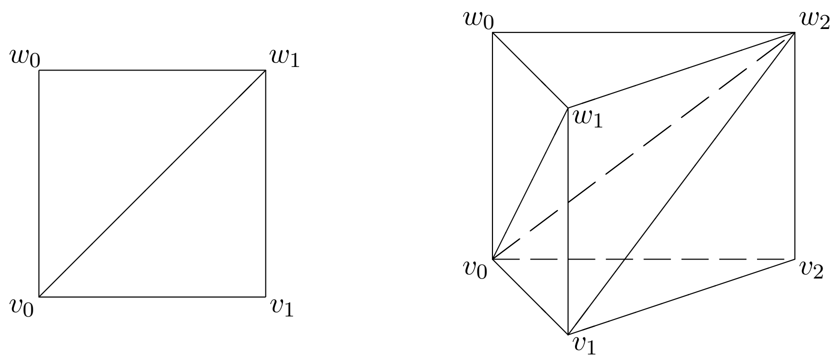


Рис. 3. Триангуляция призмы $\Delta^n \times I$.

соотношению

$$\partial P = g_\# - f_\# - P\partial.$$

Геометрически левая часть этого соотношения представляет границу призмы, а три члена в правой части представляют верхнее основание $\Delta^n \times \{1\}$, нижнее основание $\Delta^n \times \{0\}$ и боковую поверхность $\partial\Delta^n \times I$ призмы. Для доказательства соотношения проведём вычисление:

$$\partial P(\sigma) = \sum_{j\leqslant i}(-1)^i(-1)^j F\circ(\sigma\times\mathrm{id})|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_j},\ldots,v_i,w_i,\ldots,w_n]} + \\ + \sum_{j\geqslant i}(-1)^i(-1)^{j+1} F\circ(\sigma\times\mathrm{id})|_{[v_0,\ldots,v_i,w_i,\ldots,\widehat{w_j},\ldots,w_n]}.$$

Члены с $i=j$ в этих двух суммах взаимно сокращаются, за исключением членов

$$F\circ(\sigma\times\mathrm{id})|_{[\widehat{v_0},w_0,\ldots,w_n]} = g\circ\sigma = g_\#(\sigma) \quad \text{и} \quad -F\circ(\sigma\times\mathrm{id})|_{[v_0,\ldots,v_n,\widehat{w_n}]} = -f\circ\sigma = -f_\#(\sigma).$$

Члены с $i\neq j$ — это в точности $-P\partial(\sigma)$, так как

$$P\partial(\sigma) = \sum_{i<j}(-1)^i(-1)^j F\circ(\sigma\times\mathrm{id})|_{[v_0,\ldots,v_i,w_i,\ldots,\widehat{w_j},\ldots,w_n]} + \\ + \sum_{i>j}(-1)^{i-1}(-1)^j F\circ(\sigma\times\mathrm{id})|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_j},\ldots,v_i,w_i,\ldots,w_n]}.$$

Мы доказали, что P — это цепная гомотопия между $f_\#$ и $g_\#$, а значит $f_* = g_*$. □

Из теоремы 2.6 и свойств а), б) из предложения 2.4 немедленно вытекает

Следствие 2.7. *Если $f\colon X\to Y$ — гомотопическая эквивалентность, то индуцированное отображение гомологий $f_*\colon H_n(X)\to H_n(Y)$ является изоморфизмом для любого n.*

Следствие 2.8. *Гомотопически эквивалентные пространства имеют изоморфные группы гомологий. В частности, если X стягиваемо, то $\widetilde{H}_n(X)=0$ для любого n.*

2.3. **Длинная точная последовательность гомологий.** Напомним, что последовательность гомоморфизмов абелевых групп

$$\ldots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots$$

называется *точной*, если $\operatorname{Ker} f_n = \operatorname{Im} f_{n+1}$ для любого n. Такая последовательность является цепным комплексом с тривиальными группами гомологий.

Точная последовательность вида

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

называется *короткой точной последовательностью*. В ней гомоморфизм f инъективен, g сюръективен и $C \cong B/\operatorname{Im} f$.

Коммутативная диаграмма вида

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\dots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "i"] & A_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "i"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "j"] & B_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "j"] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "j"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

в которой строки являются цепными комплексами, а столбцы — короткими точными последовательностями групп, называется *короткой точной последовательностью цепных комплексов*. Мы будем использовать обозначение $0 \to A_\bullet \xrightarrow{i} B_\bullet \xrightarrow{j} C_\bullet \to 0$. Так как отображения i и j в короткой последовательности являются цепными, они индуцируют гомоморфизмы групп гомологий $H_n(A_\bullet) \xrightarrow{i} H_n(B_\bullet) \xrightarrow{j} H_n(C_\bullet)$.

Далее мы опишем ещё один гомоморфизм $\partial\colon H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$, называемый *граничным гомоморфизмом*. Рассмотрим класс гомологий $[c] \in H_n(C_\bullet)$, представленный циклом $c \in C_n$. Так как j — эпиморфизм, $c = j(b)$ для некоторого $b \in B_n$. Тогда $j(\partial b) = \partial j(b) = \partial c = 0$, т.е. $\partial b \in \operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i$. Следовательно, $\partial b = i(a)$ для некоторого $a \in A_{n-1}$. При этом $\partial a = 0$, так как $i(\partial a) = \partial i(a) = \partial\partial b = 0$, а i — мономорфизм. Теперь определим $\partial[c] = [a]$. Необходимо проверить, что полученное отображение $\partial\colon H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$ определено корректно (т.е. не зависит от произвола в выборе c, b и a) и является гомоморфизмом. Эти проверки мы оставляем в качестве задачи.

Вот одна из первых теорем гомологической алгебры.

Теорема 2.9. *Короткая точная последовательность цепных комплексов*

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{i} B_\bullet \xrightarrow{j} C_\bullet \longrightarrow 0$$

индуцирует «длинную» точную последовательность групп гомологий:

$$\dots \longrightarrow H_n(A_\bullet) \xrightarrow{i_*} H_n(B_\bullet) \xrightarrow{j_*} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A_\bullet) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B_\bullet) \longrightarrow \dots$$

Доказательство. Рассуждения, используемые при доказательстве называются «диаграммным поиском». Необходимо доказать 6 включений.

$\operatorname{Im} i_* \subset \operatorname{Ker} j_*$. Действительно, равенство $ji = 0$ влечёт $j_* i_* = 0$.

$\operatorname{Im} j_* \subset \operatorname{Ker} \partial$. Если $[c] \in \operatorname{Im} j_*$, то $c = j(b)$, где $\partial b = 0$. Так как при определении граничного гомоморфизма мы полагаем $i(a) = \partial b$, получаем $a = 0$, т.е. $\partial[c] = [a] = 0$.

$\operatorname{Im}\partial \subset \operatorname{Ker} i_*$. Пусть $[a] = \partial[c]$. Тогда $i(a) = \partial b$, а значит $i_*[a] = [\partial b] = 0$.

$\operatorname{Ker} j_* \subset \operatorname{Im} i_*$. Пусть $j_*[b] = 0$. Тогда $j(b) = \partial c'$ для некоторого $c' \in C_{n+1}$, Так как j — эпиморфизм, $c' = j(b')$ для некоторого $b' \in B_{n+1}$. При этом $j(b - \partial b') = j(b) - \partial j(b') = j(b) - \partial c' = 0$. Следовательно, $b - \partial b' = i(a)$ для некоторого $a \in A_n$. Элемент a является циклом, так как $i(\partial a) = \partial i(a) = \partial(b - \partial b') = \partial b = 0$, а i — мономорфизм. Следовательно, $i_*[a] = [b - \partial b'] = [b]$, т.е. $[b] \in \operatorname{Im} i_*$.

$\operatorname{Ker}\partial \subset \operatorname{Im} j_*$. Пусть $\partial[c] = 0$. В обозначениях из определения граничного гомоморфизма ∂ мы имеем $\partial[c] = [a]$, т.е. в нашей ситуации $a = \partial a'$ для некоторого $a' \in A_n$. Далее, $i(a) = \partial b$. Рассмотрим элемент $b - i(a')$. Это — цикл, т.к. $\partial(b - i(a')) = \partial b - i\partial(a') = \partial b - i(a) = 0$. Кроме того, $j(b - i(a')) = j(b) = c$, а значит $j_*[b - i(a')] = [c]$.

$\operatorname{Ker} i_* \subset \operatorname{Im}\partial$. Пусть $i_*[a] = 0$. Тогда $i(a) = \partial b$ для некоторого $b \in B_n$. Элемент $j(b)$ является циклом, так как $\partial j(b) = j(\partial b) = ji(a) = 0$. Тогда по определению граничного гомоморфизма мы имеем $\partial[j(b)] = [a]$. □

2.4. **Относительные группы гомологий и точная последовательность пары.** Теперь мы применим алгебраические построения предыдущего раздела в топологической ситуации.

Пусть $A \subset X$ — подпространство, т. е. (X, A) — *топологическая пара*. Обозначим через $C_n(X, A)$ факторгруппу $C_n(X)/C_n(A)$. Так как граничный гомоморфизм $\partial\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ переводит $C_n(A)$ в $C_{n-1}(A)$, он индуцирует граничный гомоморфизм $\partial\colon C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$. В результате мы получаем цепной комплекс

$$\ldots \longrightarrow C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \ldots$$

(соотношение $\partial^2 = 0$ выполнено, так как оно выполнялось до перехода к факторгруппам). Его гомологии $H_n(X, A)$ называются *относительными группами гомологий* пары (X, A). Таким образом

а) элементы из $H_n(X, A)$ представлены *относительными циклами*, т. е. такими цепями $a \in C_n(X)$, что $\partial a \in C_{n-1}(A)$;
б) относительный цикл a представляет 0 в $H_n(X, A)$ тогда и только тогда, когда он является *относительной границей*, т. е. $a = \partial b + c$ для некоторых $b \in C_{n+1}(X)$ и $c \in C_n(A)$.

Мы имеем короткую точную последовательность цепных комплексов

$$0 \longrightarrow C_\bullet(A) \xrightarrow{i} C_\bullet(X) \xrightarrow{j} C_\bullet(X, A) \longrightarrow 0$$

Из теоремы 2.9 вытекает

Теорема 2.10. *Для пары пространств (X, A) имеет место точная последовательность групп гомологий*

$$\ldots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \longrightarrow \ldots$$

Из алгебраического определения граничного гомоморфизма в длинной точной последовательности групп гомологий непосредственно вытекает следующее описание граничного отображения $\partial\colon H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$. Если класс $[a] \in H_n(X, A)$ представлен относительным циклом a, то $\partial[a]$ — класс цикла ∂a в $H_{n-1}(A)$.

Ниже мы покажем, что для достаточно хороших пар (X, A) относительная группа гомологий $H_n(X, A)$ в точной последовательности выше может быть заменена на «абсолютную» группу $\widetilde{H}_n(X/A)$. Получаемая точная последовательность даст нам первый эффективный инструмент для вычисления сингулярных гомологий пространств.

2.5. **Теорема вырезания и её следствия.** Свойство вырезания является одним из ключевых свойств сингулярных гомологий, наряду гомотопической инвариантностью и точными последовательностями пар. В качестве следствия из теоремы вырезания в следующем подразделе мы докажем изоморфизм $H_n(X, A) \cong \widetilde{H}_n(X/A)$ для «хороших» пар. Вот классическая формулировка теоремы вырезания.

Теорема 2.11. *Пусть даны пространства $Z \subset A \subset X$, причём замыкание пространства Z содержится во внутренности пространства A. Тогда включение $(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$ индуцирует изоморфизмы*

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A), \quad n \geqslant 0.$$

Имеется следующая эквивалентная формулировка теоремы вырезания, которая также будет полезна для приложений.

Теорема 2.12. *Пусть даны подпространства $A, B \subset X$, внутренности которых покрывают X. Тогда включение $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ индуцирует изоморфизмы*

$$H_n(B, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A), \quad n \geqslant 0.$$

Чтобы убедиться, что две формулировки теоремы вырезания эквивалентны, положим $B = X \setminus Z$ и $Z = X \setminus B$. Тогда $A \cap B = A \setminus Z$, а условие $\overline{Z} \subset \operatorname{int} A$ эквивалентно условию $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$, так как $X \setminus \operatorname{int} B = \overline{Z}$.

Доказательство теоремы вырезания будет дано в следующем параграфе, а пока мы получим ряд её важных следствий.

Для пары (X, A) рассмотрим пространство $X \cup CA$, которое получается из X присоединением конуса CA над A (т.е. *конус отображения* вложения $A \hookrightarrow X$).

Предложение 2.13. *Имеют место изоморфизмы*

$$\widetilde{H}_n(X \cup CA) \cong H_n(X, A), \quad n \geqslant 0.$$

Доказательство. Мы имеем

$$\widetilde{H}_n(X \cup CA) \cong H_n(X \cup CA, CA) \cong H_n(X \cup CA \setminus \{v\}, CA \setminus \{v\}) \cong H_n(X, A),$$

где первый изоморфизм вытекает из точной последовательности пары (так как конус CA стягиваем), второй изоморфизм следует из теоремы вырезания (теорема 2.11; здесь v — вершина конуса), а третий изоморфизм происходит из деформационной ретракции $CA \setminus \{v\} \xrightarrow{\simeq} A$. □

Напомним, что отображение вложения $A \hookrightarrow X$ называется *корасслоением*, если оно удовлетворяет свойству продолжения гомотопии (см. [Топ1, §4.2]). Примерами являются вложения клеточных подпространств в клеточные пространства (*клеточные пары* (X, A)), а также подмножества $A \subset X$, которые являются деформационными ретрактами своих окрестностей в X.

Предложение 2.14. *Если вложение $A \hookrightarrow X$ является корасслоением, то факторотображение $q\colon (X, A) \to (X/A, A/A) = (X/A, pt)$ индуцирует изоморфизмы*

$$q_*\colon H_n(X, A) \to H_n(X/A, pt) = \widetilde{H}_n(X/A), \quad n \geqslant 0.$$

Доказательство. Если $A \hookrightarrow X$ является корасслоением, то факторотображение $X \cup CA \to (X \cup CA)/CA = X/A$ является гомотопической эквивалентностью (см. [Топ1, предложение 4.9]), так что утверждение следует из предложения 2.13. □

Предложение 2.15. *Для сферы S^n, $n \geqslant 0$, имеем*

$$\widetilde{H}_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = n, \\ 0 & \text{при } i \neq n. \end{cases}$$

Доказательство. При $n > 0$ рассмотрим пару $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$; тогда $X/A = S^n$. Точная последовательность для приведённых гомологий имеет вид:

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{H}_i(D^n) & \to & H_i(D^n, S^{n-1}) & \to & \widetilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) & \to & \widetilde{H}_{i-1}(D^n) \\ \| & & \| & & & & \| \\ 0 & & \widetilde{H}_i(S^n) & & & & 0 \end{array}$$

Из точности следует, что $\widetilde{H}_i(S^n) \cong \widetilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$. При помощи индукции мы сводим утверждение к случаю $i = 0$ либо $n = 0$, тогда S^0 — две точки и результат следует из предложений 2.2 и 2.3. □

Обобщением предыдущего утверждения является следующая теорема.

Теорема 2.16 (изоморфизм надстройки)**.** *Для любого пространства X имеют место изоморфизмы*

$$\widetilde{H}_i(\Sigma X) \cong \widetilde{H}_{i-1}(X).$$

Доказательство. Это вытекает из точной гомологической последовательности пары (CX, X), где CX стягиваемо, $X \hookrightarrow CX$ является корасслоением для любого X и $CX/X = \Sigma X$. □

Теорема 2.17. *Пусть (X_α, x_α) — набор пространств с отмеченными точками, для которых вложения $x_\alpha \hookrightarrow X_\alpha$ являются корасслоениями. Тогда имеют место изоморфизмы*

$$\widetilde{H}_n\Big(\bigvee_\alpha X_\alpha\Big) \cong \bigoplus_\alpha \widetilde{H}_n(X_\alpha), \quad n \geqslant 0.$$

Доказательство. Это вытекает из точной последовательности пары $(\bigsqcup_\alpha X_\alpha, \bigsqcup_\alpha \{x_\alpha\})$ и определения букета $\bigvee_\alpha X_\alpha = \bigsqcup_\alpha X_\alpha / \bigsqcup_\alpha \{x_\alpha\}$. □

При помощи гомологий легко доказывается следующий классический результат.

Теорема 2.18 («инвариантность размерности»)**.** *Если непустые открытые множества $U \subset \mathbb{R}^m$ и $V \subset \mathbb{R}^n$ гомеоморфны, то $m = n$.*

Доказательство. Для любой точки $x \in U$ мы имеем

$$H_i(U, U \setminus x) \cong H_i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus x) \cong \widetilde{H}_{i-1}(\mathbb{R}^m \setminus x) \cong \widetilde{H}_{i-1}(S^{m-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = m, \\ 0 & \text{при } i \neq m, \end{cases}$$

где первый изоморфизм следует из теоремы вырезания, второй — из точной последовательности пары $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus x)$, а третий — из деформационной ретракции $\mathbb{R}^m \setminus x \to S^{m-1}$. Аналогично,

$$H_i(V, V \setminus y) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = n, \\ 0 & \text{при } i \neq n. \end{cases}$$

Так как гомеоморфизм $h\colon U \to V$ индуцирует изоморфизмы $H_i(U, U \setminus x) \xrightarrow{\cong} H_i(V, V \setminus \{h(x)\})$ для всех i, должно быть $m = n$. □

2.6. **Доказательство теоремы вырезания.** Доказательство будет основано на ключевой лемме, позволяющей вычислять группы гомологий, используя лишь «малые» сингулярные симплексы. Малость мы будем определять в терминах покрытий, а основным комбинаторным инструментом будет барицентрическое подразделение.

Пусть $\mathcal{U} = \{U_j\}$ — набор подпространств в X, внутренности которых образуют открытое покрытие пространства X. Определим подгруппу $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ в $C_n(X)$, состоящую из таких цепей $\sum_i n_i \sigma_i$, что образ каждого отображения $\sigma_i\colon \Delta^n \to X$ содержится в некотором множестве из покрытия $\mathcal{U}$. Граничное отображение $\partial\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ переводит $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ в $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$, поэтому группы $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ образуют цепной комплекс. Обозначим его группы гомологий через $H_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Лемма 2.19. *Включение $\iota\colon C_n^{\mathcal{U}}(X) \to C_n(X)$ является цепной гомотопической эквивалентностью, т. е. существует такое цепное отображение $\rho\colon C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$, что $\iota\rho$ и $\rho\iota$ цепно гомотопны тождественным отображениям. Следовательно, ι индуцирует изоморфизмы $H_n^{\mathcal{U}}(X) \cong H_n(X)$, $n \geqslant 0$.*

Доказательство. Напомним, что барицентром (или центром тяжести) симплекса $[v_0, \ldots, v_n]$ в пространстве $\mathbb{R}^N$ называется точка $b = \frac{1}{n+1}(v_0 + \ldots + v_n)$. *Барицентрическим подразбиением* симплекса $[v_0, \ldots, v_n]$ называется симплициальный комплекс, вершинами которого являются барицентры всех граней симплекса $[v_0, \ldots, v_n]$ (включая сам симплекс); при этом набор барицентров граней является множеством вершин симплекса в барицентрическом подразбиении только тогда, когда эти грани образуют цепочку вложенных друг в друга. По-другому барицентрическое подразбиение симплекса можно определить индуктивно: барицентрическое подразбиение 0-мерного симплекса (точки) есть сама эта точка, а при $k > 0$ барицентрическое подразбиение k-мерного симплекса получается взятием конусов над барицентрическими подразбиениями всех его граней. Аналогично, индуктивным образом определяется барицентрическое подразбиение произвольного симплициального комплекса.

Барицентрическое подразбиение обладает следующим важным свойством: если диаметр симплекса $[v_0, \ldots, v_n]$ (максимальное расстояние между его точками) равен d, то диаметры симплексов его барицентрического подразбиения не превосходят $\frac{n}{n+1}d$ (задача). Таким образом, многократно применяя барицентрическое подразбиение, можно получать сколь угодно мелкие триангуляции.

Далее мы построим оператор подразбиения $S\colon C_n(X) \to C_n(X)$ и проверим, что он цепно гомотопен тождественному отображению.

Пусть $\sigma\colon [v_0, \ldots, v_n] \to X$ — сингулярный симплекс. Для любого набора точек $w_0, \ldots, w_k \in [v_0, \ldots, v_n]$ ограничение отображения σ задаёт сингулярный k-симплекс

$[w_0, \dots, w_k] \to X$. Определим на таких симплексах оператор b_σ по формуле

$$b_\sigma[w_0, \dots, w_k] = [b, w_0, \dots, w_k],$$

где b — барицентр симплекса $[v_0, \dots, v_n]$. По определению граничного оператора ∂ мы имеем соотношение

$$\partial b_\sigma[w_0, \dots, w_k] = [w_0, \dots, w_k] - b_\sigma\partial[w_0, \dots, w_k],$$

которое можно переписать в виде

$$\partial b_\sigma + b_\sigma \partial = \mathrm{id}\,.$$

Теперь определим оператор подразбиения $S\colon C_n(X) \to C_n(X)$, для $n = 0$ положив $S = \mathrm{id}\colon C_0(X) \to C_0(X)$, а для $n > 0$ при помощи индуктивной формулы

$$S\sigma = b_\sigma S\partial\sigma. \tag{3}$$

Геометрически эта формула означает, что S переводит сингулярный симплекс $\sigma\colon [v_0, \dots, v_n] \to X$ в сингулярную цепь, представляющую собой сумму ограничений σ на симплексы барицентрического подразбиения симплекса $[v_0, \dots, v_n]$, взятые с некоторыми знаками.

Оператор $S\colon C_n(X) \to C_n(X)$ является цепным отображением. Действительно, при $n = 0$ мы имеем $S = \mathrm{id}$ и $\partial = 0$, т. е. $\partial S = S\partial = 0$, а при $n > 0$

$$\partial S\sigma = \partial(b_\sigma S\partial\sigma) = (\mathrm{id} - b_\sigma\partial)S\partial\sigma = S\partial\sigma - b_\sigma\partial S\partial\sigma = S\partial\sigma - b_\sigma S\partial\partial\sigma = S\partial\sigma,$$

где в предпоследнем равенстве мы воспользовались предположением индукции (соотношение $\partial S = S\partial$ имеет место для сингулярной $(n-1)$-мерной цепи $\partial\sigma$).

Теперь определим оператор цепной гомотопии $T\colon C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ между S и тождественным отображением. Для $n = 0$ положим $T\sigma = b_\sigma\sigma$ (это — сингулярный 1-мерный симплекс, переводящий обе вершины в точку $\sigma[v_0]$). Для $n > 0$ определим T при помощи индуктивной формулы

$$T\sigma = b_\sigma(\sigma - T\partial\sigma).$$

Геометрическая интерпретация этой формулы заключается в следующем. Определим индуктивно подразбиение призмы $\Delta^n \times I$, полученное в результате соединения всех симплексов в $\Delta \times \{0\} \cup \partial\Delta^n \times I$ с барицентром симплекса $\Delta \times \{1\}$, см. рис. 4. Тогда сингулярная $(n+1)$-мерная цепь $T\sigma$ есть сумма ограничений композиции

$$\Delta^n \times I \xrightarrow{\mathrm{pr}} \Delta^n = [v_0, \dots, v_n] \xrightarrow{\sigma} X$$

на симплексы подразбиения призмы, взятые с некоторыми знаками.

Формула цепной гомотопии $\partial T + T\partial = \mathrm{id} - S$ выполнена на $C_0(X)$, где $S = \mathrm{id}$, $\partial = 0$ и $\partial T = 0$. Для сингулярного n-мерного симплекса σ, $n > 0$, мы имеем

$$\begin{aligned}\partial T\sigma = \partial(b_\sigma(\sigma - T\partial\sigma)) = (\mathrm{id} - b_\sigma\partial)(\sigma - T\partial\sigma) = \sigma - T\partial\sigma - b_\sigma(\mathrm{id} - \partial T)\partial\sigma = \\ = \sigma - T\partial\sigma - b_\sigma(T\partial + S)\partial\sigma = \sigma - T\partial\sigma - b_\sigma S\partial\sigma = (\mathrm{id} - T\partial - S)\sigma.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались предположением индукции (соотношение $\mathrm{id} - \partial T = T\partial + S$ имеет место для сингулярной $(n-1)$-мерной цепи $\partial\sigma$) и формулой (3).

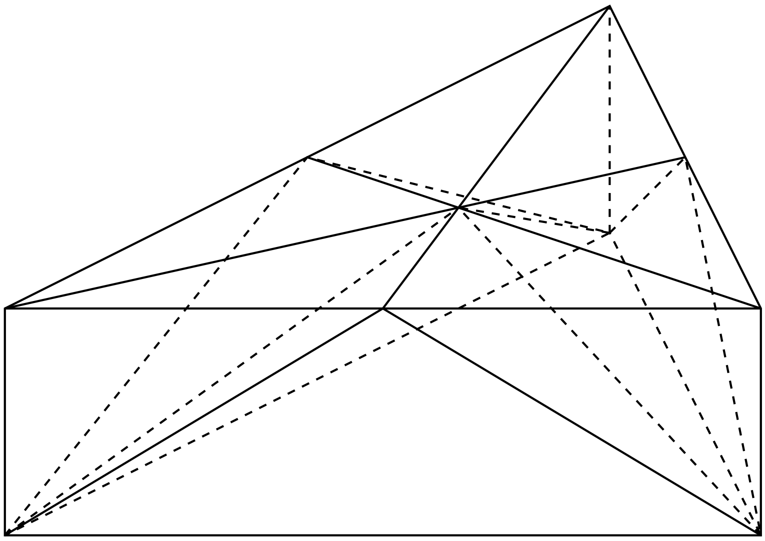


Рис. 4. Триангуляция призмы $\Delta^n \times I$.

Рассмотрим оператор m-кратного барицентрического подразбиения $S^m\colon C_n(X) \to C_n(X)$. Тогда оператор $D_m = \sum_{0\leqslant i<m} TS^i$ задаёт цепную гомотопию между id и S^m:

$$\partial D_m + D_m\partial = \sum_{0\leqslant i<m} (\partial TS^i + TS^i\partial) = \sum_{0\leqslant i<m} (\partial TS^i + T\partial S^i) = \sum_{0\leqslant i<m} (\partial T + T\partial)S^i = \\ = \sum_{0\leqslant i<m} (\mathrm{id} - S)S^i = \sum_{0\leqslant i<m} (S^i - S^{i+1}) = \mathrm{id} - S^m.$$

Для каждого сингулярного симплекса $\sigma\colon \Delta^n \to X$ и достаточно большого m сингулярная цепь $S^m\sigma$ будет лежать в $C_n^{\mathcal{U}}(X)$, так как диаметры симплексов в $S^m(\Delta^n)$ при больших m будут меньше числа Лебега покрытия симплекса Δ^n открытыми множествами $\sigma^{-1}(\operatorname{int} U_j)$. (Число Лебега открытого покрытия компактного метрического пространства — это такое число $\varepsilon > 0$, что любое множество диаметра меньше ε содержится в некотором множестве покрытия.) Если бы можно было выбрать одно число m для всех сингулярных симплексов σ, то мы могли бы положить $\rho = S^m\colon C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$, и тогда соотношение $\partial D_m + D_m\partial = \mathrm{id} - S^m$ означало бы, что D_m является цепной гомотопией между $\iota\rho$ и id (а также между $\rho\iota$ и id).

На практике, однако, мы не можем выбрать одно m для всех σ. Поэтому определим $m(\sigma)$ как наименьшее m, для которого $S^m\sigma \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Определим теперь оператор

$$D\colon C_n(X) \to C_{n+1}(X), \quad D\sigma = D_{m(\sigma)}\sigma.$$

Ниже мы покажем, что D является цепной гомотопией между id и $\iota\rho$ для некоторого цепного отображения $\rho\colon C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Рассмотрим соотношение

$$\partial D_{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma = \sigma - S^{m(\sigma)}\sigma.$$

Мы имеем $\partial D_{m(\sigma)}\sigma = \partial D\sigma$, но $D_{m(\sigma)}\partial\sigma \neq D\partial\sigma$. Прибавив $D\partial\sigma$ к обеим частям соотношения выше, после преобразования получим

$$\partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - \bigl(S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma\bigr).$$

Теперь положим
$$\rho(\sigma) = S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma.$$
Смысл этого отображения ρ заключается в том, что мы сначала барицентрически подразбиваем каждый сингулярный симплекс минимальное требуемое число раз, а затем подправляем на границе так, чтобы результат был цепным отображением. Тогда предпоследнее соотношение принимает вид
$$\partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - \rho(\sigma) \tag{4}$$
При этом ρ является цепным отображением. Действительно, из формулы (4), применённой к σ и $\partial\sigma$, следует, что $\partial\rho(\sigma) = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma = \rho(\partial\sigma)$.

Покажем, что $\rho(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Это очевидно для члена $S^{m(\sigma)}\sigma$. Для остальной части $D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma$ заметим, что если σ_j обозначает ограничение σ на j-ю грань симплекса Δ^n, то $m(\sigma_j) \leqslant m(\sigma)$, поэтому каждый член $TS^i(\sigma_j)$ в $D\partial\sigma$ будет входить и в $D_{m(\sigma)}\partial\sigma$. Таким образом, $D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma$ — сумма членов $TS^i(\sigma_j)$, где $i \geqslant m(\sigma_j)$, а все такие члены лежат в $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ (заметим, что T переводит $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ в $C_n^{\mathcal{U}}(X)$).

Таким образом, мы можем рассматривать ρ как цепное отображение $\rho\colon C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Тогда соотношение (4) перепишется в виде $\partial D + D\partial = \mathrm{id} - \iota\rho$, где $\iota\colon C_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$ — включение. Кроме того, $\rho\iota = \mathrm{id}$, так как D тождественно равно нулю на $C_n^{\mathcal{U}}(X)$, поскольку $m(\sigma) = 0$ для $\sigma \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Итак, отображение ρ цепно гомотопически обратно к ι. □

Теперь мы можем доказать теорему вырезания.

Доказательство теоремы 2.12. Нам даны подпространства $A, B \subset X$, внутренности которых покрывают X. Для покрытия $\mathcal{U} = \{A, B\}$ будем обозначать группы $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ через $C_n(A+B)$, что указывает на то, что они состоят из сумм цепей в A и цепей в B.

В конце доказательства леммы 2.19 мы получили формулы $\partial D + D\partial = \mathrm{id} - \iota\rho$ и $\rho\iota = \mathrm{id}$. Все отображения в этих формулах переводят $C_n(A)$ в $C_n(A)$, поэтому включение
$$C_n(A+B)/C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)/C_n(A)$$
индуцирует изоморфизм гомологий. С другой стороны, отображение
$$C_n(B)/C_n(A\cap B) \to C_n(A+B)/C_n(A),$$
индуцированное включением, является изоморфизмом, так как обе факторгруппы выше свободные и их базисом служат сингулярные n-симплексы в B, не лежащие в A. Следовательно, мы получаем требуемый изоморфизм $H_n(B, A\cap B) \cong H_n(X, A)$, индуцированный включением. □

2.7. **Точная последовательность Майера–Виеториса.**

Теорема 2.20. *Пусть даны подпространства $A, B \subset X$, внутренности которых покрывают X. Тогда имеет место точная последовательность групп гомологий*
$$\ldots \to H_n(A\cap B) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(A)\oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A\cap B) \to \ldots \to H_0(X) \to 0$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2.12, рассмотрим подгруппу $C_n(A+B) \subset C_n(X)$, состоящую из цепей, которые являются суммами цепей в A

и цепей в B. Мы имеем точную последовательность цепных комплексов, образованную короткими точными последовательностями

$$0 \longrightarrow C_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{\psi} C_n(A + B) \longrightarrow 0,$$

где $\varphi(x) = (x, -x)$ и $\psi(x, y) = x + y$. Соответствующая длинная точная последовательность гомологий и есть последовательность Майера–Виеториса, так как включение $C_n(A + B) \hookrightarrow C_n(X)$ индуцирует изоморфизм групп гомологий согласно лемме 2.19. $\square$

Граничное отображение $\partial\colon H_n(X) \to H_{n-1}(A \cap B)$ легко описать явно. Пусть класс $\alpha \in H_n(X)$ представлен циклом a. С помощью барицентрического подразбиения цикл a можно выбрать так, чтобы он был суммой $x + y$ цепей в A и B соответственно. Мы имеем $\partial a = \partial x + \partial y = 0$. Тогда элемент $\partial\alpha \in H_{n-1}(A \cap B)$ представлен циклом $\partial x = -\partial y$.

Имеется также следующая относительная последовательность Майера–Виеториса, доказательство которой остаётся в качестве задачи.

Теорема 2.21. *Пусть дана пара пространств $(X, Y) = (A \cup B, C \cup D)$, где $C \subset A$, $D \subset B$, внутренности A и B покрывают X, а внутренности C и D покрывают Y. Тогда имеет место точная последовательность групп гомологий*

$$\ldots \to H_n(A \cap B, C \cap D) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(A, C) \oplus H_n(B, D) \xrightarrow{\psi_*} H_n(X, Y) \xrightarrow{\partial} \ldots$$

2.8. **Эквивалентность симплициальных и сингулярных гомологий.** Пусть на X задана структура полусимплициального комплекса, т. е. заданы отображения $\sigma_\alpha\colon \Delta^n \to X$, удовлетворяющие свойствам а)–в), см. параграф 1.2. Мы определили комплекс симплициальных цепей $\{\Delta_n(X), \partial\}$ и симплициальные гомологии $H_n^\Delta(X)$.

Определим также группы относительных симплициальных гомологий $H_n^\Delta(X, A)$. Пусть $A \subset X$ — полусимплициальный подкомплекс, т. е. полусимплициальный комплекс, образованный объединением некоторых симплексов комплекса X. Тогда группа $H_n^\Delta(X, A)$ определяется как группа гомологий комплекса относительных цепей $\Delta_n(X, A) = \Delta_n(X)/\Delta_n(A)$. Как и для сингулярных гомологий, имеет место длинная точная последовательность пары (X, A) для симплициальных гомологий.

Имеется канонический гомоморфизм $H_n^\Delta(X, A) \to H_n(X, A)$ из симплициальных в сингулярные гомологии, индуцированный цепным отображением $\Delta_n(X, A) \to C_n(X, A)$, переводящим каждый n-мерный симплекс комплекса X в его характеристическое отображение $\sigma_\alpha\colon \Delta^n \to X$. При $A = \varnothing$ относительные группы гомологий сводятся к абсолютным: $H_n^\Delta(X, \varnothing) = H_n^\Delta(X)$ и $H_n(X, \varnothing) = H_n(X)$.

Теорема 2.22. *Гомоморфизмы $H_n^\Delta(X, A) \to H_n(X, A)$ являются изоморфизмами.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда комплекс X конечномерен, а $A = \varnothing$. Пусть X^k — это k-мерный остов комплекса X, состоящий из всех симплексов размерности $\leqslant k$. Тогда мы имеем коммутативную диаграмму точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \to & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \to & H_n^\Delta(X^k) & \to & H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \to & H_{n-1}^\Delta(X^{k-1}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \to & H_n(X^{k-1}) & \to & H_n(X^k) & \to & H_n(X^k, X^{k-1}) & \to & H_{n-1}(X^{k-1})
\end{array}$$

Покажем, что первое и четвёртое вертикальные отображения — изоморфизмы. Группа симплициальных цепей $\Delta_n(X^k, X^{k-1})$ нулевая при $n \neq k$ и свободная абелева с базисом из k-мерных симплексов комплекса X при $n = k$. Следовательно, группы симплициальных гомологий $H_n^{\Delta}(X^k, X^{k-1})$ имеют точно такое же описание. Для вычисления групп сингулярных гомологий $H_n(X^k, X^{k-1})$ рассмотрим отображение

$$\Phi\colon \Big(\bigsqcup_\alpha \Delta_\alpha^k, \bigsqcup_\alpha \partial\Delta_\alpha^k\Big) \to (X^k, X^{k-1}),$$

образованное характеристическими отображениями $\Delta_\alpha^k \to X$ для всех k-мерных симплексов комплекса X. Отображение Φ индуцирует гомеоморфизм

$$\bigsqcup_\alpha \Delta_\alpha^k / \bigsqcup_\alpha \partial\Delta_\alpha^k \xrightarrow{\cong} X^k/X^{k-1},$$

а значит оно индуцирует изоморфизмы групп сингулярных гомологий. В левой части выше стоит букет k-мерных сфер, поэтому группа $H_n(X^k, X^{k-1})$ равна нулю при $n \neq k$ и является свободной абелевой группой с базисом, соответствующим характеристическим отображениям $\Delta_\alpha^k \to X$ всех k-мерных симплексов комплекса X, при $n = k$. Поэтому отображение $H_n^{\Delta}(X^k, X^{k-1}) \to H_n(X^k, X^{k-1})$ является изоморфизмом для всех n.

Применяя индукцию по k, мы можем предположить, что второе и пятое вертикальные отображения в коммутативной диаграмме выше также изоморфизмы. Тогда и среднее вертикальное отображение — изоморфизм согласно алгебраическому утверждению, известному как *лемма о пяти гомоморфизмах (5-лемма)*, см. задачу 2.41. Итак, утверждение доказано в случае, когда X конечномерен, а $A = \varnothing$.

Рассмотрим теперь случай, когда X — бесконечномерный комплекс. Докажем следующий факт: компактное подмножество K в X может пересекать только конечное число открытых симплексов. (На самом деле это — общий факт о клеточных пространствах.) Действительно, предположим, что K пересекает бесконечно много открытых симплексов. Выбирая по одной точке внутри каждого из таких открытых симплексов, получим бесконечный набор точек x_i. Каждое из множеств $U_i = X \setminus \bigcup_{j \neq i}\{x_j\}$ открыто, так как открыт его прообраз при любом характеристическом отображении $\sigma_\alpha\colon \Delta^n \to X$. Множества U_i образуют открытое покрытие множества K, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Противоречие.

Теперь докажем, что $H_n^{\Delta}(X) \to H_n(X)$ есть изоморфизм. Сначала докажем сюръективность. Пусть элемент $\gamma \in H_n(X)$ представлен циклом c. Так как c — конечная линейная комбинация сингулярных симплексов, его образ содержится в X^N для некоторого N, согласно утверждению из предыдущего абзаца. Так как X^N конечномерен, $H_n^{\Delta}(X^N) \to H_n(X^N)$ есть изоморфизм. Следовательно, цикл c гомологичен в X^N (а значит, и в X) симплициальному циклу. Это доказывает сюръективность отображения $H_n^{\Delta}(X) \to H_n(X)$. Теперь докажем инъективность. Пусть s — симплициальный цикл, причём $s = \partial d$ для некоторой сингулярной цепи d в X. Цепь d имеет компактный образ, а значит содержится в некотором X^N. Поэтому цикл s представляет элемент из ядра отображения $H_n^{\Delta}(X^N) \to H_n(X^N)$. Но это отображение — изоморфизм, а потому s является границей симплициальной цепи в X^N, а значит и в X.

Осталось рассмотреть случай, когда X произвольно и $A \neq \varnothing$. В этому случае мы применим лемму о пяти гомоморфизмах к каноническому отображению длинных точных последовательностей симплициальных и сингулярных гомологий:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n^{\Delta}(A) & \to & H_n^{\Delta}(X) & \to & H_n^{\Delta}(X,A) & \to & H_{n-1}^{\Delta}(A) & \to & H_{n-1}^{\Delta}(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(A) & \to & H_n(X) & \to & H_n(X,A) & \to & H_{n-1}(A) & \to & H_{n-1}(X) \end{array}$$ □

Задачи и упражнения.

2.23. Докажите, что разбиение призмы $\Delta^n \times I$ на симплексы, описанное в начале доказательства теоремы 2.6, действительно является симплициальным комплексом.

2.24. Постройте какую-нибудь триангуляцию произведения симплексов $\Delta^n \times \Delta^m$.

2.25. Покажите, что если A — ретракт пространства X, то отображение $H_n(A) \to H_n(X)$, индуцированное включением $A \hookrightarrow X$, является мономорфизмом.

2.26. Покажите, что цепная гомотопия цепных отображений — отношение эквивалентности.

2.27. Проверьте, что граничное отображение $\partial\colon H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$ гомологий цепных комплексов определено корректно и является гомоморфизмом.

2.28. Докажите, что $H_n(X, x_0) \cong \widetilde{H}_n(X)$ для любых $x_0 \in X$ и $n \geqslant 0$.

2.29. Выведите точную последовательность пары для приведённых гомологий:

$$\ldots \longrightarrow \widetilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \ldots$$

2.30. Напомним, что *отображением пар* $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ называется отображение $f\colon X \to Y$, для которого $f(A) \subset B$. Докажите, что отображение пар индуцирует гомоморфизмы $f_*\colon H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$, $n \geqslant 0$.

2.31. Докажите, что если отображения $f, g\colon (X,A) \to (Y,B)$ гомотопны в классе отображений пар (т.е. существует гомотопия $F\colon X \times I \to Y$ между f и g, такая, что $F(A \times I) \subset B$), то индуцируемые ими отображения гомологий пар совпадают: $f_* = g_*\colon H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$, $n \geqslant 0$.

2.32. Докажите следующее свойство *естественности* гомологической последовательности пары: для отображения пар $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \ldots \\ \ldots \arrow[r] & H_n(B) \arrow[r, "i_*"] & H_n(Y) \arrow[r, "j_*"] & H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

2.33. Определите и докажите точность *гомологической последовательности тройки* для (X,A,B), где $B \subset A \subset X$:

$$\ldots \longrightarrow H_n(A,B) \xrightarrow{i_*} H_n(X,B) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A,B) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X,B) \longrightarrow \ldots$$

2.34. Докажите, что включение $A \hookrightarrow X$ индуцирует изоморфизмы всех групп гомологий тогда и только тогда, когда $H_n(X,A) = 0$ для всех n.

2.35. Докажите теорему 2.21 (последовательность Майера–Виеториса для пар).

2.36. Докажите при помощи групп гомологий *общую теорему Брауэра*: непрерывное отображение шара D^n в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку.

2.37. Вычислите группы гомологий для дополнения двух зацепленных и двух незацепленных окружностей в $\mathbb{R}^3$; сравните с вычислением фундаментальных групп.

2.38. Вычислите гомологии дополнения трёх координатных осей в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{C}^3$.

2.39. Докажите, что если диаметр симплекса $[v_0, \ldots, v_n]$ равен d, то диаметры симплексов его барицентрического подразбиения не превосходят $\frac{n}{n+1}d$.

2.40. Вычислите гомологии сферы S^n и докажите изоморфизм $\widetilde{H}_i(\Sigma X) \cong \widetilde{H}_{i-1}(X)$ при помощи точной последовательности Майера–Виеториса.

2.41. Докажите следующее утверждение, известное как *лемма о пяти гомоморфизмах*. Пусть дана коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

абелевых групп с точными строками. Тогда

а) если f_2 и f_4 — мономорфизмы, а f_1 — эпиморфизм, то f_3 — мономорфизм;

б) если f_2 и f_4 — эпиморфизмы, а f_5 — мономорфизм, то f_3 — эпиморфизм.

Таким образом, если f_1, f_2, f_4, f_5 — изоморфизмы, то и f_3 — изоморфизм.

2.42. Для отображения $f\colon S^n \to S^n$, $n > 0$, индуцированный гомоморфизм $f_*\colon H_n(S_n) \to H_n(S_n)$ есть отображение $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}$ умножения на некоторое целое число d. Это число называется *степенью отображения* f и обозначается $\deg f$.

Докажите следующие свойства степени:

а) $\deg \mathrm{id} = 1$.

б) $\deg f = 0$, если отображение $f\colon S^n \to S^n$ не сюръективно.

в) Если отображения f и g гомотопны, то $\deg f = \deg g$. (Верно и обратное утверждение: если $\deg f = \deg g$, то f и g гомотопны. Это вытекает из утверждения $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, известного как *теорема Хопфа*.)

г) $\deg(f \circ g) = \deg f \deg g$.

д) Если $f\colon S^n \to S^n$ — симметрия относительно гиперплоскости, например, $f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (-x_0, x_1, \ldots, x_n)$, то $\deg f = -1$.

е) Антиподальное отображение $-\mathrm{id}\colon S^n \to S^n$, $\boldsymbol{x} \mapsto -\boldsymbol{x}$, имеет степень $(-1)^{n+1}$.

2.43. Докажите, что если отображение $f\colon S^n \to S^n$ не имеет неподвижных точек, то $\deg f = (-1)^{n+1}$.

2.44. Докажите, что на сфере S^n существует непрерывное поле ненулевых касательных векторов тогда и только тогда, когда n нечётно.

2.45. Говорят, что группа G *действует* на пространстве X , если для каждого элемента $g \in G$ задано непрерывное отображение $\alpha_g\colon X \to X$, такое, что $\alpha_e = \mathrm{id}$ (тождественное отображение) и $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$ (композиция). Действие группы G на X называется *свободным*, если для любого $g \neq e$ и $x \in X$ выполнено $\alpha_g(x) \neq x$.

Докажите, что для чётного n единственной нетривиальной группой, которая может действовать свободно на S^n, является $\mathbb{Z}_2$.

2.46. Для любых $n > 0$ и $k \in \mathbb{Z}$ постройте отображение $f\colon S^n \to S^n$ степени k.

3. Клеточные гомологии

Пусть X — клеточное пространство (определение см. в [Топ1, §4]). Будем обозначать n-мерный остов пространства X через X^n.

Клеточные гомологии обобщают симплициальные гомологии. Элементами группы n-мерных клеточных цепей $\mathcal{C}_n(X)$ являются формальные линейные комбинации n-мерных клеток e^n_α пространства X, и имеется более-менее явная формула для описания клеточного граничного отображения $\partial^c\colon \mathcal{C}_n(X) \to \mathcal{C}_{n-1}(X)$.

Перейдём к формальным определениям и конструкциям.

3.1. **Клеточный цепной комплекс и его гомологии.**

Сначала докажем несколько вспомогательных фактов.

Лемма 3.1. *Пусть X — клеточное пространство. Тогда*

а) *Группа $H_k(X^n, X^{n-1})$ равна нулю при $k \neq n$ и является свободной абелевой группой, порождённой n-мерным клетками пространства X, при $k = n$.*

б) *$H_k(X^n) = 0$ при $k > n$. В частности, если пространство X конечномерно, то $H_k(X) = 0$ при $k > \dim X$.*

в) *Включение $i\colon X^n \hookrightarrow X$ индуцирует изоморфизм $i_*\colon H_k(X^n) \xrightarrow{\cong} H_k(X)$ при $k < n$.*

Доказательство. Так как вложение $X^{n-1} \hookrightarrow X^n$ является корасслоением, мы имеем $H_k(X^n, X^{n-1}) \cong \widetilde{H}_k(X^n/X^{n-1})$, а X^n/X^{n-1} — букет сфер, по одной сфере для каждой n-мерной клетки пространства X. Это доказывает утверждение а).

Далее рассмотрим фрагмент точной последовательности пары (X^n, X^{n-1}):

$$\ldots \to H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \to H_k(X^{n-1}) \to H_k(X^n) \to H_k(X^n, X^{n-1}) \to \ldots$$

Если $k \neq n, n-1$, то обе внешние группы равны нулю согласно утверждению а), и мы получаем $H_k(X^{n-1}) \cong H_k(X^n)$ при $k \neq n$, $n-1$. Тогда при $k > n$ имеем

$$H_k(X^n) \cong H_k(X^{n-1}) \cong \ldots \cong H_k(X^0) = 0,$$

что доказывает утверждение б). При $k < n$ мы имеем

$$H_k(X^n) \cong H_k(X^{n+1}) \cong H_k(X^{n+2}) \cong \ldots,$$

что доказывает утверждение в), если X конечномерно.

Для бесконечномерного X воспользуемся тем, что компактное подмножество в X пересекает лишь конечно число клеток. Таким образом, каждая сингулярная цепь лежит в некотором конечном остове X^N. Поэтому k-мерный цикл c в X является циклом в некотором X^N, а тогда согласно конечномерному случаю утверждения в) цикл c гомологичен циклу в X^n при $n > k$, а значит гомоморфизм $i_*\colon H_k(X^n) \to H_k(X)$ сюръективен. Аналогично доказывается его инъективность: если k-мерный цикл c в X^n является границей цепи d в X, то d лежит в некотором X^N, $N \geqslant n$, а потому согласно конечномерному случаю c является границей в X^n при $n > k$. $\square$

Группа $\mathcal{C}_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$ называется *группой n-мерных клеточных цепей* клеточного пространства X. Согласно лемме 3.1 а), клеточную цепь можно представлять линейной комбинацией n-мерных клеток.

Определим *клеточный граничный гомоморфизм* $\partial^c_n\colon \mathcal{C}_n(X) \to \mathcal{C}_{n-1}(X)$ как граничный гомоморфизм $H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ в точной последовательности тройки (X^n, X^{n-1}, X^{n-2}), т.е. $\partial^c_n = j_{n-1}\partial_n$, см. коммутативную диаграмму ниже. В этой диаграмме наклонные линии — фрагменты длинных последовательностей пар:

(5)

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & \\
0 \arrow[dr] & & H_n(X^{n+1}) \arrow[ur] \arrow[r, equal] & H_n(X) & \\
 & H_n(X^n) \arrow[ur] \arrow[dr, "j_n"] & & & \\
H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \arrow[ur, "\partial_{n+1}"] \arrow[rr, "\partial^c_{n+1}"] & & H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[rr, "\partial^c_n"] \arrow[dr, "\partial_n"] & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \\
 & & & H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[ur, "j_{n-1}"] & \\
 & & 0 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Из этой же диаграммы следует, что $\partial^c\partial^c = 0$, так как $\partial^c_n\partial^c_{n+1} = j_{n-1}\partial_n j_n \partial_{n+1}$, а $\partial_n j_n = 0$.

Цепной комплекс $\mathcal{C}_\bullet(X) = \{\mathcal{C}_n(X), \partial^c_n\}$ называется *клеточным цепным комплексом*, а его гомологии $\mathcal{H}_n(X)$ — *группами клеточных гомологий* пространства X.

Теорема 3.2. *Имеет место изоморфизм $\mathcal{H}_n(X) \cong H_n(X)$.*

Доказательство. Из диаграммы (5) имеем

$$H_n(X) = H_n(X^n)/\operatorname{Im}\partial_{n+1}, \quad \mathcal{H}_n(X) = \operatorname{Ker}\partial^c_n/\operatorname{Im}\partial^c_{n+1}.$$

Так как j_n — мономорфизм, он отображает $\operatorname{Im}\partial_{n+1}$ изоморфно на $\operatorname{Im}(j_n\partial_{n+1}) = \operatorname{Im}\partial^c_{n+1}$ и отображает $H_n(X^n)$ изоморфно на $\operatorname{Im} j_n = \operatorname{Ker}\partial_n$. Так как j_{n-1} — мономорфизм, $\operatorname{Ker}\partial_n = \operatorname{Ker}\partial^c_n$. Таким образом, j_n индуцирует изоморфизм $H_n(X)$ на $\mathcal{H}_n(X)$. □

Из изоморфности сингулярных и клеточных гомологий сразу вытекают следующие важные свойства.

Следствие 3.3.

а) *Если X имеет k клеток размерности n, то группа $H_n(X)$ порождена не более чем k элементами. В частности, если X не имеет клеток размерности n, то $H_n(X) = 0$.*

б) *Если X не имеет пар клеток в соседних размерностях (например, если все клетки в X имеют чётную размерность), то $H_n(X)$ — свободная абелева группа, порождённая n-мерными клетками пространства X.*

Пример 3.4. Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ имеет по одной клетке в каждой чётной размерности $2k \leqslant 2n$. Таким образом,

$$H_i(\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = 0, 2, 4, \dots, 2n, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

3.2. **Явный вид граничного гомоморфизма.** При $n = 1$ клеточное граничное отображение $\partial^c\colon \mathcal{C}_n(X) \to \mathcal{C}_{n-1}(X)$ представляет собой граничный гомоморфизм

$$\partial\colon H_1(X^1, X^0) \to H_0(X^0).$$

Если X связно и имеет только одну 0-мерную клетку, то этот гомоморфизм должен быть нулевым. Это следует из точной последовательности пары (X^1, X^0) и изоморфизма $H_0(X^1) \cong H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Далее мы будем отождествлять клетку $e^n_\alpha \subset X$ с соответствующей образующей группы клеточных цепей $\mathcal{C}_n(X)$.

Теорема 3.5. *При $n > 1$ имеет место равенство*

$$\partial^c(e^n_\alpha) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e^{n-1}_\beta, \tag{6}$$

где $d_{\alpha\beta}$ — степень отображения

$$f_{\alpha\beta}\colon S^{n-1} \xrightarrow{\varphi_\alpha} X^{n-1} \xrightarrow{q_\beta} S^{n-1},$$

представляющего собой композицию приклеивающего отображения $\varphi_\alpha\colon S^{n-1} \to X^{n-1}$ клетки e^n_α и отображения факторизации $q_\beta\colon X^{n-1} \to S^{n-1}$, стягивающего $X^{n-1} \setminus e^{n-1}_\beta$ в точку.

Доказательство. Прежде всего заметим, что сумма в формуле (6) содержит конечное число членов, так как образ приклеивающего отображения φ_α компактен, а потому пересекает лишь конечное число клеток e^{n-1}_β.

Пусть $\Phi_\alpha\colon D^n_\alpha \to X^n$ — характеристическое отображение клетки e^n_α; его ограничение на $S^{n-1}_\alpha = \partial D^n_\alpha$ есть приклеивающее отображение $\varphi_\alpha\colon S^{n-1}_\alpha \to X^{n-1}$. Ясно, что отображение факторизации $q_\beta\colon X^{n-1} \to S^{n-1}_\beta$ раскладывается в композицию $X^{n-1} \to X^{n-1}/X^{n-2} \xrightarrow{\widehat{q}_\beta} S^{n-1}_\beta$ для некоторого отображения $\widehat{q}_\beta$, выделяющего сферу S^{n-1}_β из букета X^{n-1}/X^{n-2}.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_n(D^n_\alpha, S^{n-1}_\alpha) \arrow[r, "\partial", "\cong"'] \arrow[d, "\Phi_{\alpha*}"] & \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}_\alpha) \arrow[r, "f_{\alpha\beta*}"] \arrow[d, "\varphi_{\alpha*}"] & \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}_\beta) \\
H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[dr, "\partial^c"'] & \widetilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[ur, "q_{\beta*}"'] \arrow[d, "j"] & \\
& H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[uur, "\widehat{q}_{\beta*}"'] &
\end{tikzcd}$$

Отображение $\Phi_{\alpha*}$ переводит стандартную образующую $[D^n_\alpha] \in H_n(D^n_\alpha, S^{n-1}_\alpha)$ в образующую $e^n_\alpha \in H_n(X^n, X^{n-1})$. Из коммутативности левой части диаграммы следует, что $\partial^c(e^n_\alpha) = j\varphi_{\alpha*}\partial[D^n_\alpha]$. В терминах базиса для $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$, соответствующего $(n-1)$-мерным клеткам, отображение $\widehat{q}_{\beta*}$ — это проекция группы $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ на слагаемое, соответствующее клетке e^{n-1}_β. Теперь требуемая формула следует из коммутативности правой части диаграммы. $\square$

Пример 3.6. Пусть S_g — сфера с g ручками, т. е. замкнутая ориентируемая поверхность рода g. Введём на S_g стандартную клеточную структуру с одной нульмерной клеткой, $2g$ одномерными клетками $a_1, \ldots, a_g$, $b_1, \ldots, b_g$ и одной двумерной клеткой, приклеенной по произведению коммутаторов $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$. Соответствующий клеточный цепной комплекс имеет вид

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2^c} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{\partial_1^c} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Мы имеем $\partial_1^c = 0$, так как S_g имеет всего одну 0-мерную клетку. Кроме того, $\partial_2^c = 0$, так как каждое ребро a_i и b_i входит в $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$ вместе с его обратным, а значит все отображения $f_{\alpha\beta}\colon S^1 \to S^1$ гомотопны отображению в точку. Поэтому группы гомологий поверхности S_g совпадают с группами клеточных цепей, т. е.

$$H_0(S_g) = H_2(S_g) = \mathbb{Z}, \quad H_1(S_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}, \quad H_i(S^g) = 0 \text{ при } i > 2.$$

Пример 3.7. Пусть $X = \mathbb{R}P^n$ — вещественное проективное пространство. Оно имеет клеточную структуру с одной клеткой e^k в каждой размерности $k \leqslant n$. Приклеивающее отображение для клетки e^k — это двулистное накрытие $\varphi\colon S^{k-1} \to \mathbb{R}P^{k-1}$. Согласно формуле (6), $\partial^c(e^k) = d_k e^{k-1}$, где d_k — это степень композиции

$$S^{k-1} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}P^{k-1} \xrightarrow{q} \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} = S^{k-1}.$$

При ограничении на каждую компоненту связности пространства $S^{k-1} \setminus S^{k-2}$ отображение $q\varphi$ является гомеоморфизмом. Один из этих гомеоморфизмов — тождественный, а другой является ограничением антиподального отображения сферы S^{k-1}, которое имеет степень $(-1)^k$. Поэтому $\deg q\varphi = 1 + (-1)^k$, что есть 0 или 2 в зависимости от чётности k. Таким образом, клеточный цепной комплекс для $\mathbb{R}P^n$ имеет вид

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \ldots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \quad \text{если } n \text{ чётно;}$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \ldots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \quad \text{если } n \text{ нечётно.}$$

Следовательно,

$$H_k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } k = 0 \text{ и при нечётном } k = n; \\ \mathbb{Z}_2 & \text{при нечётном } k, \text{ где } 0 < k < n; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3.3. **Эйлерова характеристика.** *Эйлерова характеристика* конечного клеточного пространства X определяется как

$$\chi(X) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n c_n,$$

где $c_n = \operatorname{rank} \mathcal{C}_n(X)$ — число n-мерных клеток пространства X (ранг конечно порождённой абелевой группы $\mathcal{C}_n(X)$).

Классическая *теорема Эйлера* утверждает, что для выпуклого 3-мерного многогранника имеет место формула $B - P + \varGamma = 2$, где B, P и $\varGamma$ — число вершин, рёбер и граней соответственно. Обобщением этого факта является следующий результат, который показывает, что эйлерова характеристика является топологическим (и даже гомотопическим) инвариантом клеточного пространства X. В частности, она не зависит от клеточного разбиения.

Теорема 3.8. *Для конечного клеточного пространства X справедливо соотношение*

$$\chi(X) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \operatorname{rank} H_n(X).$$

Доказательство. Это — чисто алгебраический факт. Рассмотрим конечный цепной комплекс

$$0 \longrightarrow C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

конечно порождённых абелевых групп. Обозначим $Z_n = \operatorname{Ker}\partial_n$ — циклы, $B_n = \operatorname{Im}\partial_{n+1}$ — границы, $H_n = Z_n/B_n$ — гомологии. Из коротких точных последовательностей $0 \to Z_n \to C_n \to B_{n-1} \to 0$ и $0 \to B_n \to Z_n \to H_n \to 0$ получаем соотношения

$$\operatorname{rank} C_n = \operatorname{rank} Z_n + \operatorname{rank} B_{n-1}$$
$$\operatorname{rank} Z_n = \operatorname{rank} B_n + \operatorname{rank} H_n.$$

Подставим второе соотношение в первое, умножим полученное соотношение на $(-1)^n$ и просуммируем по n. В результате получим

$$\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \operatorname{rank} C_n = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \operatorname{rank} H_n.$$

Осталось применить это соотношение к случаю $C_n = \mathcal{C}_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$. $\square$

Пример 3.9. Эйлерова характеристика замкнутой ориентированной поверхности S_g рода g равна $2-2g$. Таким образом, все замкнутые ориентированные поверхности различаются их эйлеровыми характеристиками.

Задачи и упражнения.

3.10. Вычислите гомологии произведения сфер $S^n \times S^n$ при $n \geqslant 2$, пользуясь клеточным разбиением.

3.11. Пусть N_g — замкнутая неориентируемая поверхность рода g, т. е. сфера с g вклеенными листами Мёбиуса. Вычислите гомологии поверхности N_g, пользуясь клеточной структурой с одной нульмерной клеткой, g одномерными клетками $c_1, \ldots, c_g$ и одной двумерной клеткой, приклеенной по слову $c_1^2 c_2^2 \ldots c_g^2$.

3.12. Вычислите гомологии пространства X, полученного приклеиванием к $S^1 \vee S^1$ двух двумерных клеток по произвольным словам. В частности, рассмотрите случай приклеивания клеток по словам $a^5 b^{-3}$ и $b^3(ab)^{-2}$. Что можно сказать о фундаментальной группе такого пространства?

3.13. Вычислите гомологии трёхмерного тора $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$, пользуясь клеточным разбиением.

3.14. Докажите, что для конечных клеточных пространств X, Y имеет место соотношение $\chi(X \times Y) = \chi(X) \times \chi(Y)$.

3.15. Докажите, что если $X = A \cup B$, где X — клеточное пространство, а A, B — клеточные подпространства в X, то $\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$.

3.16. Докажите, что для n-листного накрытия $p\colon \widetilde{X} \to X$ над конечным клеточным пространством X имеет место соотношение $\chi(\widetilde{X}) = n\chi(X)$.

4. Фундаментальная группа и гомологии

Здесь мы докажем утверждение о том, что первая группа гомологий линейно связного пространства совпадает с абеленизацией фундаментальной группы (теорема Пуанкаре).

Пусть (X, x_0) — пространство с отмеченной точкой. Элементами фундаментальной группы $\pi_1(X, x_0)$ являются классы гомотопных петель $\varphi\colon I \to X$, где $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$. Каждую такую петлю можно рассматривать как сингулярный 1-симплекс, который является циклом, так как $\partial\varphi = \varphi(1) - \varphi(0) = 0$.

Напомним, что *абеленизацией* группы G называется факторгруппа $G/[G, G]$ по нормальной подгруппе $[G, G]$, порождённой всевозможными коммутаторами $ghg^{-1}h^{-1}$ (эта подгруппа называется *коммутантом* группы G). Например, абеленизацией свободной группы F_n является свободная абелева группа $\mathbb{Z}^n$.

Теорема 4.1 (Пуанкаре)**.** *Рассматривая петли как сингулярные* 1*-циклы, мы получаем гомоморфизм* $h\colon \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$*. Если* X *линейно связно, то* h *является эпиморфизмом, а его ядро — коммутант группы* $\pi_1(X, x_0)$*. Таким образом, группа* $H_1(X)$ *изоморфна абеленизации группы* $\pi_1(X, x_0)$*.*

Доказательство. Мы будем использовать обозначение $\varphi \simeq \psi$ для отношения гомотопии петель и $\varphi \sim \psi$ для отношения гомологии соответствующих 1-циклов (т. е. $\varphi \sim \psi$, если $\varphi - \psi$ является границей 2-мерной цепи).

Сначала проверим, что сопоставление гомотопическому классу петли φ класса гомологий 1-мерного цикла φ задаёт корректно определённое отображение $h\colon \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$. Т. е. проверим, что если $\varphi \simeq \psi$, то $\varphi \sim \psi$. Заметим, что если φ — постоянная петля $I \to x_0$, то $\varphi \sim 0$. Это следует из того, что $H_1(pt) = 0$. Теперь рассмотрим гомотопию $F\colon I \times I \to X$ между петлями φ и ψ. Разбив квадрат $I \times I$ на треугольники $[v_0, v_1, v_3]$ и $[v_0, v_2, v_3]$ как показано слева на рис. 5, мы получим сингулярные 2-симплексы σ_1, σ_2. Мы имеем

$$\begin{aligned} &\partial(\sigma_1 - \sigma_2) = \partial[v_0, v_1, v_3] - \partial[v_0, v_2, v_3] = \\ &\quad = [v_1, v_3] - [v_0, v_3] + [v_0, v_1] - [v_2, v_3] + [v_0, v_3] - [v_0, v_2] \sim [v_0, v_1] - [v_2, v_3] = \varphi - \psi, \end{aligned}$$

так как боковые стороны $[v_0, v_2]$ и $[v_1, v_3]$ отображаются в отмеченную точку, а значит гомологичны нулю. Следовательно, $\varphi \sim \psi$.

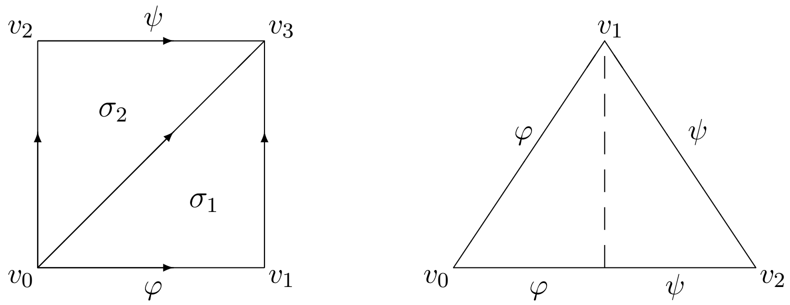


Рис. 5.

Теперь проверим, что $h\colon \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$ — гомоморфизм, т. е. $\varphi \cdot \psi \sim \varphi + \psi$, где $\varphi \cdot \psi$ обозначает произведение петель. Рассмотрим сингулярный 2-симплекс $\sigma\colon \Delta^2 \to$

X, задаваемый композицией проекции треугольника $\Delta^2 = [v_0, v_1, v_2]$ на ребро $[v_0, v_2]$ и отображения $\varphi \cdot \psi \colon [v_0, v_2] \to X$, как показано справа на рис. 5. Тогда

$$\partial\sigma = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1] = \psi - \varphi \cdot \psi + \varphi,$$

т. е. $\psi - \varphi \cdot \psi + \varphi \sim 0$, что и требовалось.

В предыдущем рассуждении мы не использовали тот факт, что φ и ψ — петли, так что мы имеем $\varphi \cdot \psi \sim \varphi + \psi$ для любых путей φ, ψ, удовлетворяющих условию $\varphi(1) = \psi(0)$. В частности, $\bar{\varphi} \sim -\varphi$ (где $\bar{\varphi}$ — обратный путь для φ), так как $\varphi + \bar{\varphi} \sim \varphi \cdot \bar{\varphi} \sim 0$.

Покажем, что $h \colon \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$ — эпиморфизм, если X линейно связно. Пусть $\sum_i n_i\sigma_i$ — одномерный цикл, представляющий данный элемент группы $H_1(X)$. Перенумеровав симплексы σ_i, можно считать, что $n_i = \pm 1$. Так как $-\sigma_i \sim \bar{\sigma}_i$, мы можем считать, что наш 1-цикл имеет вид $\sum_i \sigma_i$. Если какой-то из путей σ_i не является петлёй, то из условия $\partial(\sum_i \sigma_i) = 0$ следует, что в сумме найдётся другой путь σ_j, для которого определено произведение путей $\sigma_i \cdot \sigma_j$. Так как $\sigma_i + \sigma_j \sim \sigma_i \cdot \sigma_j$, мы можем в записи $\sum_i \sigma_i$ заменить $\sigma_i + \sigma_j$ на $\sigma_i \cdot \sigma_j$. Повторяя эту процедуру, мы приходим к случаю, когда каждый путь σ_i является петлей с началом и концом в некоторой точке $x_i \in X$. Так как X линейно связно, существуют пути γ_i из отмеченной точки x_0 в x_i. Так как $\gamma_i \cdot \sigma_i \cdot \bar{\gamma}_i \sim \sigma_i$, мы можем считать, что все σ_i — петли с началом и концом в точке x_0. Тогда цикл $\sum_i \sigma_i$ гомологичен произведению всех петель σ_i, которое представляет элемент образа гомоморфизма $h \colon \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$.

Коммутант группы $\pi_1(X)$ лежит в ядре гомоморфизма h, так как группа $H_1(X)$ абелева. Чтобы получить обратное включение, покажем, что если $[\varphi] \in \operatorname{Ker} h$, то петля φ представляет тривиальный элемент в абеленизации $\pi_1(X)_{ab}$.

Пусть $[\varphi] \in \operatorname{Ker} h$. Тогда 1-мерный цикл φ является границей 2-мерной цепи $\sum_i n_i\sigma_i$. Как и выше, перенумеровав сингулярные 2-симплексы $\sigma_i \colon \Delta_i^2 \to X$, мы можем считать $n_i = \pm 1$, а изменив порядок вершин симплекса Δ_i^2 мы можем заменить $-\sigma_i$ на σ_i. В результате мы получим $\varphi = \partial(\sum_i \sigma_i)$. Мы сопоставим цепи $\sum_i \sigma_i$ двумерный полусимплициальный комплекс K, который получается склейкой 2-мерных симплексов Δ_i^2, соответствующих сингулярным симплексам $\sigma_i \colon \Delta_i^2 \to X$, следующим образом. Записав $\partial\sigma_i = \tau_{i0} - \tau_{i1} + \tau_{i2}$ для сингулярных 1-симплексов τ_{ij}, получаем

$$\varphi = \partial(\sum_i \sigma_i) = \sum_{i,j} (-1)^j \tau_{ij}. \tag{7}$$

Отсюда следует, что мы можем сгруппировать все τ_{ij}, кроме одного, в пары так, что в каждой паре сингулярные 1-симплексы совпадают, а коэффициенты при них — 1 и -1. Оставшийся сингулярный 1-симплекс есть φ. Теперь мы отождествим рёбра симплексов Δ_i^2, соответствующие объединённым в пары симплексам τ_{ij}, с учётом ориентации рёбер. В результате получим полусимплициальный комплекс K, для которого 1-цикл φ будет «границей».

Отображения σ_i согласованы и вместе дают отображение $\sigma \colon K \to X$. Отображение σ можно заменить на гомотопное ему отображение σ', которое переводит все вершины $v \in K$ в отмеченную точку x_0, причём гомотопию между σ и σ' можно выбрать постоянной на ребре, соответствующем циклу φ. Это вытекает из свойства продолжения гомотопии: выбрав для каждой вершины $v \in K$ путь из $\sigma(v)$ в x_0 мы тем самым зададим гомотопию на $K^0 \cup \varphi$, а затем продолжим её на весь K. Отображение $\sigma' \colon K \to X$ задаёт новую 2-цепь $\sum_i \sigma'_i$, граница которой равна φ, причём все её рёбра τ'_{ij} — петли с началом и концом в x_0.

Так как в правой части соотношения (7) все τ_{ij}, кроме одного, разбиваются на сокращающиеся пары, мы также имеем соотношение $[\varphi] = \prod_{i,j}[\tau'_{ij}]^{(-1)^j}$ в абеленизации $\pi_1(X)_{ab}$. Используя аддитивные обозначения, мы получаем

$$[\varphi] = \sum_{i,j}(-1)^j[\tau'_{ij}] = \sum_i[\partial\sigma'_i] = \sum_i([\tau'_{i0}] - [\tau'_{i1}] + [\tau'_{i2}]).$$

Так как каждый симплекс σ_i задаёт стягивание петли $\tau'_{i0} - \tau'_{i1} + \tau'_{i2}$ (в мультипликативных обозначениях $\tau'_{i0}\bar{\tau}'_{i1}\tau'_{i2}$), мы получаем, что $[\varphi] = 0$ в $\pi_1(X)_{ab}$. □

Пример 4.2. Напомним, что фундаментальная группа ориентируемой поверхности рода g изоморфна факторгруппе свободной группы F_{2g} по одному соотношению, заданному произведением коммутаторов:

$$\pi_1(S_g) \cong \langle\, a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g \mid a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdot a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \cdot \ldots \cdot a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}\,\rangle.$$

В результате абеленизации мы получаем свободную абелеву группу $Z^{2g} \cong H_1(S_g)$.

Задачи и упражнения.

4.3. Вычислите первую группу гомологий бутылки Клейна как абеленизацию её фундаментальной группы.

5. Гомологии с коэффициентами и когомологии

5.1. **Определения и основные свойства.** Напомним, что *тензорное произведение* $G \otimes H$ абелевых групп G и H определяется как факторгруппа свободной абелевой группы с образующими $g\otimes h$, $g \in G$, $h \in H$, по соотношениям $(g+g')\otimes h = g\otimes h+g'\otimes h$ и $g \otimes (h + h') = g \otimes h + g \otimes h'$. Кроме того, определена абелева группа $\mathrm{Hom}(G, H)$, элементами которой являются гомоморфизмы $G \to H$.

Пусть теперь дана фиксированная абелева группа G. Тогда определены, соответственно, ковариантный и контравариантный функторы

$$-\otimes G\colon H \mapsto H \otimes G, \qquad \mathrm{Hom}(-, G)\colon H \mapsto \mathrm{Hom}(H, G),$$

из абелевых групп в абелевы группы.

Пусть теперь X — топологическое пространство. Применяя функторы $-\otimes G$ и $\mathrm{Hom}(-, G)$ к группам сингулярных цепей $C_n(X)$, мы получаем группы

$$C_n(X; G) = C_n(X) \otimes G \quad \text{и} \quad C^n(X; G) = \mathrm{Hom}(C_n(X), G),$$

которые называются *группами сингулярных цепей с коэффициентами в* G и *группами сингулярных коцепей с коэффициентами в* G, соответственно. В более явном виде сингулярная цепь $a \in C_n(X; G)$ представляет собой линейную комбинацию $a = \sum_i k_i\sigma_i$, где $k_i \in G$ и $\sigma_i\colon \Delta^n \to X$ — сингулярные симплексы. Сингулярная коцепь $c \in C^n(X; G)$ представляет собой функцию на множестве n-мерных сингулярных симплексов пространства X со значениями в группе G. Значение коцепи c на сингулярном симплексе σ обозначается $c(\sigma)$ или $\langle c, \sigma\rangle$.

Применяя $-\otimes G$ и $\mathrm{Hom}(-, G)$ к граничному гомоморфизму $\partial_n\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$, мы получаем граничный гомоморфизм $\partial_n\colon C_n(X; G) \to C_{n-1}(X; G)$,

$$\partial_n\sigma = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v}_i,\ldots,v_n]},$$

где $\sigma\colon \varDelta^n = [v_0, \dots, v_n] \to X$ — сингулярный симплекс, и *кограничный гомоморфизм (дифференциал)* $d_{n-1}\colon C^{n-1}(X;G) \to C^n(X;G)$, задаваемый формулой

$$(d_{n-1}c)(\sigma) = c(\partial_n \sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i c\big(\sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_n]}\big). \tag{8}$$

Мы имеем $\partial_n\partial_{n+1} = 0$ и $d_n d_{n-1} = 0$. Таким, образом, мы получаем цепной комплекс

$$\ldots \longrightarrow C_{n+1}(X;G) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X;G) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X;G) \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X;G) \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

а также *коцепной комплекс*

$$0 \longrightarrow C^0(X;G) \xrightarrow{d_0} \ldots \longrightarrow C^{n-1}(X;G) \xrightarrow{d_{n-1}} C^n(X;G) \xrightarrow{d_n} C^{n+1}(X;G) \longrightarrow \ldots$$

Группа гомологий $H_n(X;G) = \operatorname{Ker}\partial_n / \operatorname{Im}\partial_{n+1}$ называется n-й *группой сингулярных гомологий пространства X с коэффициентами в G.*

Группа $H^n(X;G) = \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n-1}$ называется n-й *группой сингулярных когомологий пространства X с коэффициентами в G.* Коцепи из $\operatorname{Ker} d_n$ называются n-мерными *коциклами*, а коцепи из $\operatorname{Im} d_{n-1}$ называются *кограницами.*

Ясно, что $H_n(X;\mathbb{Z}) = H_n(X)$. Для когомологий $H^n(X;\mathbb{Z})$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ используется сокращённое обозначение $H^n(X)$.

При определении приведённых гомологий $\widetilde{H}_n(X;G)$ мы рассматривали гомоморфизм аугментации $\varepsilon\colon C_0(X;G) \to G$, заданный формулой $\varepsilon(\sum_i k_i\sigma_i) = \sum_i k_i$. Двойственный гомоморфизм $\varepsilon^*\colon G \to C^0(X;G)$ переводит $g \in G$ в функцию, принимающую постоянное значение g на всех 0-симплексах. Мы получаем *коаугментированный коцепной комплекс*

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\varepsilon^*} C^0(X;G) \xrightarrow{d_0} C^1(X;G) \xrightarrow{d_1} C^2(X;G) \longrightarrow \ldots$$

Его когомологии называются *приведёнными группами когомологий* и обозначаются $\widetilde{H}^n(X;G)$. Мы имеем $\widetilde{H}^0 = \operatorname{Ker} d_0 / \operatorname{Im}\varepsilon^* = H^0/\operatorname{Im}\varepsilon^*$ и $\widetilde{H}^n = H^n$, $n \geqslant 1$.

Свойства групп гомологий с коэффициентами полностью аналогичны свойствам обычных групп гомологий (с коэффициентами в $\mathbb{Z}$). Свойства групп когомологий получаются «формальным обращением стрелок». Приведём формулировки утверждений, в которых имеются некоторые отличия; для простоты будем рассматривать когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

Теорема 5.1. *Непрерывное отображение пространств $f\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизмы групп когомологий $f^*\colon H^*(Y) \to H^*(X)$.*

Если отображения $f, g\colon X \to Y$ гомотопны, то $f^* = g^*$.

Для пары (X, A) группа *относительных коцепей* $C^n(X, A)$ определяется как подгруппа в $C^n(X)$, состоящая из коцепей, обращающихся в нуль на сингулярных симплексах, образы которых лежат в A. (Напомним, что относительные цепи $C_n(X, A)$ определялись как *факторгруппа* $C_n(X)/C_n(A)$). Так как d_n переводит $C^n(X, A)$ в $C^{n+1}(X, A)$, группы $C^n(X, A)$ образуют коцепной комплекс, когомологий которого — *относительные когомологии* $H^n(X, A)$.

Теорема 5.2. *Для пары (X, A) имеет место точная последовательность*

$$\ldots \longrightarrow H^{n-1}(X) \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(A) \xrightarrow{d} H^n(X, A) \xrightarrow{j^*} H^n(X) \xrightarrow{i^*} H^n(A) \longrightarrow \ldots$$

Если вложение $i\colon A \hookrightarrow X$ является корасслоением (например, если (X, A) — клеточная пара), то $H^n(X, A) \cong \widetilde{H}^n(X/A)$.

Кограничный (или *связывающий*) гомоморфизм $d\colon H^{n-1}(A) \to H^n(X, A)$ в точной последовательности пары определяется следующим образом. Пусть класс $[c] \in H^{n-1}(A)$ представлен коциклом $c \in C^{n-1}(A)$. Продолжим c до коцепи $\overline{c} \in C^{n-1}(X)$, положив функцию $\overline{c}$ равной нулю на сингулярных симплексах, которые не лежат в A. Коцепь $d_{n-1}\overline{c} \in C^n(X)$ на самом деле является коциклом в $C^n(X, A)$, так как $d_{n-1}c = 0$. Тогда $d[c] = [d_{n-1}\overline{c}] \in H^n(X, A)$.

Теорема 5.3. *Пусть (X_α, x_α) — набор пространств с отмеченными точками, для которых вложения $x_\alpha \hookrightarrow X_\alpha$ являются корасслоениями. Тогда*

$$\widetilde{H}^n\Big(\bigvee_\alpha X_\alpha\Big) \cong \prod_\alpha \widetilde{H}^n(X_\alpha), \quad n \geqslant 0.$$

Как и в случае гомологий, это вытекает из точной последовательности пары $(\bigsqcup_\alpha X_\alpha, \bigsqcup_\alpha \{x_\alpha\})$. Отличие (которое проявляется только для бесконечных наборов пространств) в том, что $H_n(\bigsqcup_\alpha X_\alpha) = \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$ — прямая сумма, а $H^n(\bigsqcup_\alpha X_\alpha) = \prod_\alpha H^n(X_\alpha)$ — прямое произведение. Это вытекает из алгебраического факта: $\mathrm{Hom}(\bigoplus_\alpha G_\alpha, H) \cong \prod_\alpha \mathrm{Hom}(G_\alpha, H)$.

Для клеточного пространства X можно определить группу *клеточных коцепей* $\mathcal{C}^n(X; G)$ либо как $H^n(X^n, X^{n-1}; G)$, либо как $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_n(X), G)$, где $\mathcal{C}_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$ — группа клеточных цепей. Эти два подхода эквивалентны (задача). Когомологии $\mathcal{H}^n(X; G)$ получаемого коцепного комплекса называются *клеточными когомологиями* пространства X с коэффициентами в G. Тогда $\mathcal{H}^n(X; G) \cong H^n(X; G)$.

Клеточную коцепь $c \in \mathcal{C}^{n-1}(X; G)$ можно представлять себе как функцию на $(n-1)$-мерных ориентированных клетках $e^{n-1}_\beta \in X$ со значениями в G, такую, что замена ориентации клетки приводит к изменению знака значения функции. Тогда кограничное отображение $d\colon \mathcal{C}^{n-1}(X; G) \to \mathcal{C}^n(X; G)$ задаётся формулой

$$dc(e^n_\alpha) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} c(e^{n-1}_\beta),$$

где определение чисел $d_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$ дано в теореме 3.5.

Пример 5.4. Напомним (см. пример 3.7), что клеточный цепной комплекс для $\mathbb{R}P^n$ имеет вид

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ 2\ } \mathbb{Z} \xrightarrow{\ 0\ } \ldots \xrightarrow{\ 2\ } \mathbb{Z} \xrightarrow{\ 0\ } \mathbb{Z} \xrightarrow{\ 2\ } \mathbb{Z} \xrightarrow{\ 0\ } \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \quad \text{если } n \text{ чётно;}$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ 0\ } \mathbb{Z} \xrightarrow{\ 2\ } \ldots \xrightarrow{\ 2\ } \mathbb{Z} \xrightarrow{\ 0\ } \mathbb{Z} \xrightarrow{\ 2\ } \mathbb{Z} \xrightarrow{\ 0\ } \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \quad \text{если } n \text{ нечётно.}$$

После применения функторов $-\otimes \mathbb{Z}_2$ и $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z}_2)$ все гомоморфизмы в получаемом комплексе становятся нулевыми. Поэтому $H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ при $0 \leqslant k \leqslant n$. Однако группы целочисленных когомологий $H^k(\mathbb{R}P^n)$ отличаются от групп гомологий $H_k(\mathbb{R}P^n)$ (задача).

5.2. **Коэффициентные точные последовательности.** Рассмотрим короткую точную последовательность абелевых групп

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0 \tag{9}$$

Применяя к ней функторы $C_n(X)\otimes -$, получаем короткую точную последовательность цепных комплексов

$$0 \longrightarrow C_\bullet(X;F) \longrightarrow C_\bullet(X;G) \longrightarrow C_\bullet(X;H) \longrightarrow 0$$

(применение функтора $G\otimes -$ не обязательно сохраняет точные последовательности, см. следующий подраздел, однако в нашем случае это верно, так как группа $C_n(X)$ свободна). Короткая точная последовательность цепных комплексов приводит к длинной точной последовательности гомологий (см. теорему 2.9)

$$(10)\qquad \ldots \longrightarrow H_n(X;F) \longrightarrow H_n(X;G) \longrightarrow H_n(X;H) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X;F) \longrightarrow \ldots$$

Аналогично, применяя к (9) функторы $\operatorname{Hom}(C_n(X),-)$, получаем короткую точную последовательность коцепных комплексов

$$0 \longrightarrow C^\bullet(X;F) \longrightarrow C^\bullet(X;G) \longrightarrow C^\bullet(X;H) \longrightarrow 0$$

и длинную точную последовательность когомологий

$$(11)\qquad \ldots \longrightarrow H^n(X;F) \longrightarrow H^n(X;G) \longrightarrow H^n(X;H) \xrightarrow{d} H^{n+1}(X;F) \longrightarrow \ldots$$

Последовательности (10) и (11) называются *коэффициентными точными последовательностями.*

Особый интерес представляют короткие точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0 \quad \text{и} \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_{m^2} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0$$

Граничные гомоморфизмы $\widetilde{b}\colon H_n(X;\mathbb{Z}_m)\to H_{n-1}(X)$ и $b\colon H_n(X;\mathbb{Z}_m)\to H_{n-1}(X;\mathbb{Z}_m)$ из соответствующих коэффициентных точных последовательностей, а также кограничные гомоморфизмы $\widetilde{\beta}\colon H^n(X;\mathbb{Z}_m)\to H^{n+1}(X;\mathbb{Z})$ и $\beta\colon H^n(X;\mathbb{Z}_m)\to H^{n+1}(X;\mathbb{Z}_m)$ называются *гомоморфизмами Бокштейна.*

Гомологический гомоморфизм Бокштейна $\widetilde{b}\colon H_n(X;\mathbb{Z}_m)\to H_{n-1}(X;\mathbb{Z})$ описывается следующим образом в явном виде. Для $\alpha\in H_n(X;\mathbb{Z}_m)$ выберем представителя $a\in C_n(X;\mathbb{Z}_m)$. «Поднимем» цепь $a\in C_n(X;\mathbb{Z}_m)$ до цепи $\widetilde{a}\in C_n(X;\mathbb{Z})$, рассматривая коэффициенты-вычеты по модулю m как целые числа. Тогда граница $\partial\widetilde{a}$ делится на m (её приведение по модулю m есть $\partial a=0$). Поделим: $\frac{1}{m}\partial\widetilde{a}$ есть целочисленный цикл, который и представляет класс $\widetilde{b}(\alpha)\in H_{n-1}(X;\mathbb{Z})$. Его приведение по модулю m есть $b(\alpha)\in H_{n-1}(X;\mathbb{Z}_m)$.

Когомологический гомоморфизм Бокштейна $\widetilde{\beta}\colon H^n(X;\mathbb{Z}_m)\to H^{n+1}(X;\mathbb{Z})$ описывается так. Для $\gamma\in H^n(X;\mathbb{Z}_m)$ выберем представителя $c\in C^n(X;\mathbb{Z}_m)$. «Поднимем» коцепь $c\in C^n(X;\mathbb{Z}_m)$ до коцепи $\widetilde{c}\in C^n(X;\mathbb{Z})$, считая её значения целыми числами, а не вычетами. Тогда кограница $d\widetilde{c}$ делится на m, и мы имеем $\widetilde{\beta}(\gamma)=[\frac{1}{m}d\widetilde{c}]\in H^{n+1}(X;\mathbb{Z})$. Кроме того, приведение класса $[\frac{1}{m}d\widetilde{c}]$ по модулю m есть $\beta(\gamma)\in H_{n+1}(X;\mathbb{Z}_m)$. Это выражается коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
H^n(X;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\rho"] & H^n(X;\mathbb{Z}_m) \arrow[r, "\widetilde{\beta}"] \arrow[dr, "\beta"'] & H^{n+1}(X;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cdot m"] \arrow[d, "\rho"] & H^{n+1}(X;\mathbb{Z}) \\
& & H^{n+1}(X;\mathbb{Z}_m) &
\end{tikzcd}$$

где ρ — приведение по модулю m.

5.3. **Функторы** Tor **и** Ext**.** Мы определим Tor и Ext для модулей над произвольным коммутативным кольцом R с единицей, так как это более естественный контекст, хотя для наших целей достаточно ограничиться абелевыми группами (т. е. $\mathbb{Z}$-модулями).

Напомним, что *модулем* над кольцом R (или R-*модулем*) называется абелева группа M с операцией $\cdot\colon R \times M \to M$, $(r, m) \mapsto r \cdot m$, которая удовлетворяет условиям $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$, $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$, $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$ и $1 \cdot m = m$ для любых $r_i \in R$ и $m_i \in M$. Примерами являются абелевы группы (модули над $\mathbb{Z}$) и векторные пространства (модули над полем).

R-модуль F называется *свободным*, если он изоморфен прямой сумме $\bigoplus_\alpha R_\alpha$, где каждый R_α есть кольцо R, рассматриваемое как R-модуль.

Тензорным произведением модулей M и N над R (обозначается $M \otimes_R N$) называется фактормодуль свободного модуля с множеством образующих $\{(m, n) \in M \times N\}$ по подмодулю, порождённому всевозможными элементами вида

$$(m + m', n) - (m, n) - (m', n), \quad (m, n + n') - (m, n) - (m, n'),$$
$$(rm, n) - r(m, n), \quad (m, rn) - r(m, n),$$

где $m, m' \in M$, $n, n' \in N$, $r \in R$. Гомоморфизмы R-модулей $M \to N$ образуют R-модуль, который обозначается $\mathrm{Hom}_R(M, N)$.

Свободной резольвентой R-модуля M называется точная последовательность модулей

$$\ldots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0, \tag{12}$$

в которой все модули F_i свободны.

Пусть N — другой R-модуль. После применения функтора $- \otimes_R N$ к свободной резольвенте (12) получаемая последовательность может не быть точной, но является цепным комплексом. Исключив из этого комплекса член $M \otimes_R N$, получим цепной комплекс

$$\ldots \longrightarrow F_2 \otimes_R N \longrightarrow F_1 \otimes_R N \longrightarrow F_0 \otimes_R N \longrightarrow 0.$$

Его n-я группа гомологий обозначается $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$, т. е.

$$\mathrm{Tor}_n^R(M, N) = \frac{\mathrm{Ker}(F_n \otimes_R N \to F_{n-1} \otimes_R N)}{\mathrm{Im}(F_{n+1} \otimes_R N \to F_n \otimes_R N)}.$$

Аналогично, применив функтор $\mathrm{Hom}_R(-, N)$ к (12) и исключив член $\mathrm{Hom}_R(M, N)$, получим коцепной комплекс

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_0, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_1, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_2, N) \longrightarrow \ldots$$

Его n-я группа когомологий обозначается $\mathrm{Ext}_R^n(M, N)$, т. е.

$$\mathrm{Ext}_R^n(M, N) = \frac{\mathrm{Ker}\big(\mathrm{Hom}_R(F_n, N) \to \mathrm{Hom}_R(F_{n+1}, N)\big)}{\mathrm{Im}\big(\mathrm{Hom}_R(F_{n-1}, N) \to \mathrm{Hom}_R(F_n, N)\big)}.$$

Вот основные свойства Tor и Ext.

Теорема 5.5.

а) *Модули* $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$ *и* $\mathrm{Ext}_R^n(M, N)$ *не зависят, с точностью до изоморфизма, от выбора свободной резольвенты* (12).

б) $\mathrm{Tor}_n^R(-, N)$, $\mathrm{Tor}_n^R(M, -)$ *и* $\mathrm{Ext}_R^n(M, -)$ *являются ковариантным функторами, а* $\mathrm{Ext}_R^n(-, N)$ *является контравариантным функтором.*

в) $\mathrm{Tor}_0^R(M, N) = M \otimes_R N$ *и* $\mathrm{Ext}_R^0(M, N) = \mathrm{Hom}_R(M, N)$.

г) $\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_n^R(N,M)$.

Доказательство. Мы лишь приведём основные идеи доказательства, оставляя детали в качестве задач. При доказательства свойства а) используется следующее утверждение. Пусть $F_\bullet$ — свободная резольвента модуля M, $F'_\bullet$ — свободная резольвента модуля M'. Тогда любой гомоморфизм R-модулей $f\colon M \to M'$ продолжается до цепного отображения $f_\bullet\colon F_\bullet \to F'_\bullet$:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & F_2 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_2"] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_1"] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & F'_2 \arrow[r] & F'_1 \arrow[r] & F'_0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

причём любые два таких продолжения цепно гомотопны. Это утверждение проверяется диаграммным поиском.

Для доказательства г) рассмотрим свободную резольвенту $F_\bullet$ модуля M и свободную резольвенту $G_\bullet$ модуля N. Тогда мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
\ldots \arrow[r] & F_2 \otimes_R G_2 \arrow[r] \arrow[d] & F_2 \otimes_R G_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_2 \otimes_R G_0 \arrow[r] \arrow[d] & F_2 \otimes_R N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & F_1 \otimes_R G_2 \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \otimes_R G_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \otimes_R G_0 \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \otimes_R N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & F_0 \otimes_R G_2 \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \otimes_R G_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \otimes_R G_0 \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \otimes_R N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & M \otimes_R G_2 \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes_R G_1 \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes_R G_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes_R N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Гомологии самого правого ненулевого столбца — это $\mathrm{Tor}_R^\bullet(M,N)$, а гомологии самой нижней ненулевой строки изоморфны $\mathrm{Tor}_R^\bullet(N,M)$. Можно доказать, что гомологии каждого из этих цепных комплексов изоморфны гомологиям комплекса, составленного из модулей $H_n = \bigoplus_{p+q=n} F_p \otimes_R G_q$. $\square$

5.4. **Формулы универсальных коэффициентов.** Модули над кольцом $R = \mathbb{Z}$ — это абелевы группы. Свободную резольвенту абелевой группы G можно построить следующим образом. Возьмём в качестве F_0 свободную абелеву группу с базисом, элементы которого соответствуют любому набору образующих группы G. Мы имеем эпиморфизм $F_0 \to G$, ядро которого мы обозначим через F_1. Тогда F_1 — также свободная абелева группа (подгруппа свободной абелевой группы свободна, но подмодуль свободного R-модуля, вообще говоря, может не быть свободным). В результате мы получаем «короткую» свободную резольвенту группы G:

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow G \longrightarrow 0.$$

Таким образом, нетривиальными Tor-модулями при $R = \mathbb{Z}$ являются лишь $\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(G,H) = G \otimes H$ и $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G,H)$, который обозначается $\mathrm{Tor}(G,H)$. Мы имеем

$$\mathrm{Tor}(G,H) = \mathrm{Ker}\big(F_1 \otimes H \to F_0 \otimes H\big). \tag{13}$$

Аналогично, нетривиальными Ext-модулями при $R = \mathbb{Z}$ являются лишь $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(G,H) = \mathrm{Hom}(G,H)$ и $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G,H)$, который обозначается $\mathrm{Ext}(G,H)$. Мы имеем

$$\mathrm{Ext}(G,H) = \mathrm{Coker}\big(\mathrm{Hom}(F_0,H) \to \mathrm{Hom}(F_1,H)\big). \tag{14}$$

Короткая точная последовательность R-модулей $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$ называется *расщепимой*, если выполнено одно из эквивалентных условий:

1) существует гомоморфизм $s\colon C \to B$, для которого $js = \mathrm{id}\colon C \to C$;
2) существует гомоморфизм $q\colon B \to A$, для которого $qi = \mathrm{id}\colon A \to A$.

Для расщепимой короткой последовательности имеем изоморфизм $A \oplus C \xrightarrow{\cong} B$, $(a,c) \mapsto i(a) + s(c)$.

Теорема 5.6 (формулы универсальных коэффициентов)**.** *Для любой абелевой группы G и любого $n \geqslant 0$ существуют естественные по X расщепимые короткие точные последовательности*

а) $0 \to H_n(X) \otimes G \to H_n(X;G) \to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X);G) \to 0,$

б) $0 \to H^n(X) \otimes G \to H^n(X;G) \to \mathrm{Tor}(H^{n+1}(X);G) \to 0,$
если G конечно порождена,

в) $0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X),G) \to H^n(X;G) \to \mathrm{Hom}(H_n(X),G) \to 0.$

Замечание. Расщепимые точные последовательности выше дают изоморфизмы

$$\begin{aligned}
&H_n(X;G) \cong (H_n(X) \otimes G) \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X),G),\\
&H^n(X;G) \cong (H^n(X) \otimes G) \oplus \mathrm{Tor}(H^{n+1}(X),G) \quad (G \text{ конечно порождена}),\\
&H^n(X;G) \cong \mathrm{Hom}(H_n(X),G) \oplus \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X),G),
\end{aligned}$$

которые, однако, не являются естественными по X.

Доказательство теоремы 5.6. Первые две точные последовательности легко вытекают из коэффициентных точных последовательностей (10) и (11). Выведем точную последовательность а). Рассмотрим короткую точную последовательность (резольвенту) $0 \to F_1 \to F_0 \to G \to 0$, где F_0, F_1 — свободные абелевы группы. Тогда

$$H_n(X;F_i) = H_n(X;\oplus_\alpha \mathbb{Z}) = \oplus_\alpha H_n(X;\mathbb{Z}) = H_n(X) \otimes F_i,$$

где второе равенство следует из равенства групп коцепей $C_n(X;\oplus_\alpha\mathbb{Z}) = C_n(X) \otimes (\oplus_\alpha\mathbb{Z}) = \oplus_\alpha C_n(X)$. Рассмотрим фрагмент точной последовательности (10):

$$\longrightarrow H_n(X;F_1) \xrightarrow{f_n} H_n(X;F_0) \longrightarrow H_n(X;G) \longrightarrow H_{n-1}(X;F_1) \xrightarrow{f_{n-1}} H_{n-1}(X;F_0) \longrightarrow$$

Отсюда получаем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, f_n \longrightarrow H_n(X;G) \longrightarrow \mathrm{Ker}\, f_{n-1} \longrightarrow 0,$$

где

$$\operatorname{Coker} f_n = \operatorname{Coker}\big(H_n(X)\otimes F_1 \to H_n(X)\otimes F_0\big) = H_n(X)\otimes G,$$
$$\operatorname{Ker} f_{n-1} = \operatorname{Ker}\big(H_{n-1}(X)\otimes F_1 \to H_{n-1}(X)\otimes F_0\big) = \operatorname{Tor}(H_{n-1}(X), G),$$

см. (13). Подставляя это в предыдущую точную последовательность, получаем а).

Для доказательства б) рассмотрим резольвенту $0 \to F_1 \to F_0 \to G \to 0$, где F_0, F_1 — конечно порождённые свободные абелевы группы. Тогда

$$H^n(X; F_i) = H^n(X; \oplus_\alpha \mathbb{Z}) = \oplus_\alpha H^n(X;\mathbb{Z}) = H^n(X)\otimes F_i,$$

где второе равенство следует из равенства $C^n(X;\oplus_\alpha\mathbb{Z}) = \operatorname{Hom}(C_n(X),\oplus_\alpha\mathbb{Z}) = \oplus_\alpha \operatorname{Hom}(C_n(X),\mathbb{Z}) = \oplus_\alpha C^n(X;\mathbb{Z})$ для конечной прямой суммы $\oplus_\alpha\mathbb{Z}$. Далее используем точную последовательность (11) аналогично доказательству а).

Однако это метод не работает для точной последовательности в). Мы приведём другой способ доказательства, который вместо резольвенты группы G использует резольвенту группы $H_n(X)$.

Будем обозначать $C_n = C_n(X)$, $Z_n = \operatorname{Ker}\partial_n$ — циклы, $B_n = \operatorname{Im}\partial_{n+1}$ — границы, $H_n = Z_n/B_n$ — гомологии. Мы имеем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \longrightarrow 0,$$

которая расщепляется, так как в ней все абелевы группы свободны. Применив $\operatorname{Hom}(-, G)$, получим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(B_{n-1}, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}(C_n, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}(Z_n, G) \longrightarrow 0.$$

Эту последовательность можно рассматривать как короткую точную последовательность коцепных комплексов

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(B_{\bullet-1}, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}(C_\bullet, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}(Z_\bullet, G) \longrightarrow 0,$$

где $\operatorname{Hom}(B_{\bullet-1}, G)$ и $\operatorname{Hom}(Z_\bullet, G)$ — комплексы с нулевым дифференциалом. Соответствующая длинная точная последовательность когомологий имеет вид

$$\to \operatorname{Hom}(Z_{n-1}, G) \xrightarrow{i_{n-1}^*} \operatorname{Hom}(B_{n-1}, G) \to H^n(X;G) \to \operatorname{Hom}(Z_n, G) \xrightarrow{i_n^*} \operatorname{Hom}(B_n, G) \to$$

Связывающим гомоморфизмом здесь является $i_n^*\colon \operatorname{Hom}(Z_n, G) \to \operatorname{Hom}(B_n, G)$; он представляет собой просто ограничение гомоморфизмов $Z_n \to G$ на $B_n \subset Z_n$. Из этой последовательности мы получаем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker} i_{n-1}^* \longrightarrow H^n(X;G) \longrightarrow \operatorname{Ker} i_n^* \longrightarrow 0$$

Теперь заметим, что $0 \to B_n \xrightarrow{i_n} Z_n \to H_n \to 0$ — резольвента группы H_n, поэтому

$$\operatorname{Ker} i_n^* = \operatorname{Ker}\big(\operatorname{Hom}(Z_n, G) \to \operatorname{Hom}(B_n, G)\big) = \operatorname{Hom}(H_n, G),$$
$$\operatorname{Coker} i_{n-1}^* = \operatorname{Coker}\big(\operatorname{Hom}(Z_{n-1}, G) \to \operatorname{Hom}(B_{n-1}, G)\big) = \operatorname{Ext}(H_{n-1}, G),$$

см. (14). Подставляя это в предыдущую точную последовательность, получаем в).

Докажем расщепимость точной последовательности в). В ней гомоморфизм $h\colon H^n(X;G) \to \operatorname{Hom}(H_n(X), G)$ сопоставляет классу когомологий $[c]$ коцикла $c\colon C_n \to G$ гомоморфизм $H_n = Z_n/B_n \to G$, задаваемый ограничением c на группу циклов Z_n с последующим переходом к факторгруппе. Для h существует правый обратный $s\colon \operatorname{Hom}(H_n(X), G) \to H^n(X;G)$, который строится следующим образом.

Гомоморфизм $f\colon H_n \to G$ задаёт гомоморфизм $\widetilde{f}\colon Z_n \to G$, который можно продолжить до гомоморфизма $\widetilde{f}'\colon C_n \to G$ (так как $Z_n \subset C_n$ — прямое слагаемое). Тогда положим $s(f) = [\widetilde{f}']$. Очевидно, что $hs = \mathrm{id}$, так что точная последовательность в) расщепима.

Для доказательства расщепимости точной последовательности а) рассмотрим расщепляющие гомоморфизмы $C_n \to Z_n$ для точных последовательностей $0 \to Z_n \to C_n \to B_{n-1} \to 0$. Взяв композицию с фактор-отображениями $Z_n \to H_n$, получим гомоморфизмы $C_n \to H_n$. Вместе они образуют цепное отображение $C_\bullet \to H_\bullet$, где справа комплекс с нулевым граничным отображением. Тензорно умножив на G, получим цепное отображение $C_\bullet \otimes G \to H_\bullet \otimes G$. Перейдя к гомологиям, получим расщепляющий гомоморфизм $q\colon H_n(X;G) \to H_n(X) \otimes G$ для точной последовательности а). Доказательство для последовательности б) аналогично. □

Задачи и упражнения.

5.7. Докажите, что группа $H^1(X)$ не содержит кручения.

5.8. Пусть $A, B \subset X$ — подпространства, внутренности которых покрывают X. Выведите *когомологическую точную последовательность Майера–Виеториса*:

$$\ldots \longrightarrow H^n(X) \xrightarrow{\psi^*} H^n(A) \oplus H^n(B) \xrightarrow{\varphi^*} H^n(A \cap B) \xrightarrow{d} H^{n+1}(X) \longrightarrow \ldots$$

и опишите явно кограничное отображение $d\colon H^n(A \cap B) \to H^{n+1}(X)$.

5.9. Определим $d^n\colon H^n(X^n, X^{n-1}; G) \to H^{n+1}(X^{n+1}, X^n; G)$ как композицию отображений $j^*\colon H^n(X^n, X^{n-1}; G) \to H^n(X^n; G)$ и $d\colon H^n(X^n; G) \to H^{n+1}(X^{n+1}, X^n; G)$ из когомологических точных последовательностей пар. Докажите, что коцепные комплексы $\{H^n(X^n, X^{n-1}; G), d^n\}$ и $\{\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_n(X), G), \partial_n^*\}$ изоморфны.

5.10. Вычислите группы целочисленных когомологий $H^k(\mathbb{R}P^n)$ и $H^k(\mathbb{R}P^\infty)$.

5.11. Опишите гомоморфизм Бокштейна $\beta\colon H^k(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \to H^{k+1}(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$.

5.12. Докажите, что модули $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$ и $\mathrm{Ext}_R^n(M, N)$ не зависят, с точностью до изоморфизма, от выбора свободной резольвенты модуля M.

5.13. Докажите, что $\mathrm{Tor}_n^R(-, N)$, $\mathrm{Tor}_n^R(M,_{)}$ и $\mathrm{Ext}_R^n(M, -)$ являются ковариантным функторами, а $\mathrm{Ext}_R^n(-, N)$ является контравариантным функтором.

5.14. Докажите, что $\mathrm{Tor}_0^R(M, N) = M \otimes_R N$ и $\mathrm{Ext}_R^0(M, N) = \mathrm{Hom}_R(M, N)$.

5.15. Докажите, что $\mathrm{Tor}_n^R(M, N) \cong \mathrm{Tor}_n^R(N, M)$.

5.16. Докажите, что короткая точная последовательность R-модулей

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

даёт следующие длинные точные последовательности:

$$\begin{aligned} &\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(M_1, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(M_2, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(M_3, N) \longrightarrow \ldots \\ &\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M_1, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M_2, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M_3, N) \longrightarrow \\ &\qquad \longrightarrow \mathrm{Tor}_0^R(M_1, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_0^R(M_2, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_0^R(M_3, N) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^0_R(M_3,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^0_R(M_2,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^0_R(M_1,N) \longrightarrow\\ \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(M_3,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(M_2,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(M_1,N) \longrightarrow \ldots\\ \ldots \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_R(M_3,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_R(M_2,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_R(M_1,N) \longrightarrow \ldots,\end{aligned}$$

а короткая точная последовательность R-модулей

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0$$

даёт длинную точную последовательность

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^0_R(M,N_1) \longrightarrow \operatorname{Ext}^0_R(M,N_2) \longrightarrow \operatorname{Ext}^0_R(M,N_3) \longrightarrow\\ \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(M,N_1) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(M,N_2) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(M,N_3) \longrightarrow \ldots\\ \ldots \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_R(M,N_1) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_R(M,N_2) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_R(M,N_3) \longrightarrow \ldots.\end{aligned}$$

5.17. Докажите, что $\operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{(m,n)}$, где (m,n) — наибольший общий делитель m и n, а $\operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}) = \operatorname{Tor}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_m) = 0$.

5.18. Докажите, что $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_{(m,n)}$, $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_m$ и $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_m) = 0$.

5.19. Постройте свободную резольвенту $\mathbb{Z}_4$-модуля $\mathbb{Z}_2$ и вычислите $\operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}_4}_n(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)$ и $\operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)$.

5.20. Докажите, что если отображение пространств $f\colon X \to Y$ индуцирует изоморфизм $f_*\colon H_n(X) \xrightarrow{\cong} H_n(Y)$ для любого n, то оно индуцирует изоморфизмы гомологий и когомологий с коэффициентами в любой группе G. [*Указание:* используйте формулы универсальных коэффициентов.]

6. Кольцо когомологий

Для любого коммутативного кольца R с единицей мы определим отображения

$$\smile\colon H^p(X;R) \times H^q(X;R) \longrightarrow H^{p+q}(X;R),$$

которые превращают прямую сумму $H^*(X;R) = \bigoplus_{p\geqslant 0} H^p(X;R)$ в ассоциативное, градуированно коммутативное кольцо (R-алгебру) с единицей. Наряду с группами (ко)гомологий, структура этого кольца является важным гомотопическим инвариантом топологического пространства X.

6.1. **Произведение Колмогорова–Александера.** Определим $\smile$*-произведение* (также известное как *произведение Колмогорова–Александера*) сингулярных коцепей $a \in C^p(X;R)$ и $b \in C^q(X;R)$ как коцепь $a \smile b \in C^{p+q}(X;R)$, значение которой на сингулярном симплексе $\sigma\colon \Delta^{p+q} = [v_0,\ldots,v_{p+q}] \to X$ задаётся формулой

$$(a \smile b)(\sigma) = a(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_p]})\, b(\sigma|_{[v_p,\ldots,v_{p+q}]}). \tag{15}$$

Лемма 6.1. *Для $a \in C^p(X;R)$ и $b \in C^q(X;R)$ выполнено равенство*

$$d(a \smile b) = da \smile b + (-1)^p a \smile db,$$

где $d\colon C^*(X;R) \to C^{*+1}(X;R)$ — кограничный гомоморфизм (8).

Доказательство. Для $\sigma\colon \Delta^{p+q+1} = [v_0, \ldots, v_{p+q+1}] \to X$ мы имеем

$$(da \smile b)(\sigma) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i a(\sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v}_i,\ldots,v_{p+1}]})\, b(\sigma|_{[v_{p+1},\ldots,v_{p+q+1}]}),$$

$$(-1)^p(a \smile db)(\sigma) = \sum_{i=p}^{p+q+1} (-1)^i a(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_p]})\, b(\sigma|_{[v_p,\ldots,\widehat{v}_i,\ldots,v_{p+q}]}).$$

При сложении эти выражений последний член первой суммы сократится с первым членом второй суммы, а оставшиеся члены дадут $d(a \smile b)(\sigma) = (a \smile b)(\partial\sigma)$, так как

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{p+q+1} (-1)^i \sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v}_i,\ldots,v_{p+q+1}]}. \qquad \square$$

Напомним, что *градуированное кольцо* — это кольцо A, представленное в виде прямой суммы $\bigoplus_{i\geqslant 0} A^i$ подгрупп A^i таким образом, что если $a \in A^i$ и $b \in A^j$, то $ab \in A^{i+j}$. Если все A^i являются модулями над коммутативным кольцом R с единицей, и умножение в кольце A является R-билинейным, то A называется градуированной *алгеброй* над кольцом R (или кратко *R-алгеброй*). Градуированное кольцо (или алгебра) $A = \bigoplus_{i\geqslant 0} A^i$ называется *градуированно коммутативным*, если для любых $a \in A^i$ и $b \in A^j$ выполнено соотношение $ab = (-1)^{ij}ba$.

Теорема 6.2. *Пусть R — коммутативное кольцо с единицей. Тогда $\smile$-произведение коцепей задаёт на $H^*(X;R) = \bigoplus_{p\geqslant 0} H^p(X;R)$ структуру градуированной, ассоциативной, градуированно-коммутативной алгебры с единицей над R.*

Доказательство. Из леммы 6.1 следует, что $\smile$-произведение двух коциклов снова является коциклом, а произведение коцикла и кограницы (в любом порядке) является кограницей. Поэтому $\smile$-произведение коцепей задаёт $\smile$-произведение в когомологиях, $\smile\colon H^p(X;R) \times H^q(X;R) \to H^{p+q}(X;R)$, которое превращает $H^*(X;R) = \bigoplus_{p\geqslant 0} H^p(X;R)$ в градуированное кольцо (R-алгебру). Единицей этого кольца является класс 0-мерного коцикла, принимающего значение 1 на каждом сингулярном 0-симплексе. Умножение в когомологиях ассоциативно, так как оно ассоциативно на уровне коцепей. Однако умножение коцепей не является градуированно коммутативным, поэтому градуированная коммутативность умножения в когомологиях нуждается в дополнительной проверке.

Пусть $\omega\colon \Delta^n \to \Delta^n$ — аффинный автоморфизм симплекса, обращающий порядок вершин. Для сингулярного симплекса $\sigma\colon [v_0, \ldots, v_n] \to X$ обозначим $\overline{\sigma} = \sigma \circ \omega$, т. е. $\overline{\sigma}(v_i) = \sigma(v_{n-i})$. Теперь определим гомоморфизм

$$\rho\colon C_n(X) \to C_n(X), \qquad \sigma \mapsto \varepsilon_n\overline{\sigma},$$

где $\varepsilon_n = (-1)^{n(n+1)/2}$ — определитель оператора ω.

Для $a \in C^p(X;R)$, $b \in C^q(X;R)$ и $\rho^*\colon C^n(X) \to C^n(X)$ имеем

$$(\rho^*a \smile \rho^*b)(\sigma) = a(\varepsilon_p\sigma|_{[v_p,\ldots,v_0]})\, b(\varepsilon_q\sigma|_{[v_{p+q},\ldots,v_p]})$$

$$\rho^*(b \smile a)(\sigma) = \varepsilon_{p+q} b(\sigma|_{[v_{p+q},\ldots,v_p]})\, a(\sigma|_{[v_p,\ldots,v_0]}).$$

Так как $\varepsilon_{p+q} = (-1)^{pq}\varepsilon_p\varepsilon_q$, а кольцо R коммутативно, отсюда получаем $(\rho^*a \smile \rho^*b) = (-1)^{pq}\rho^*(b \smile a)$. Ниже мы покажем, что ρ — цепное отображение, цепно гомотопное тождественному. Поэтому при переходе к классам когомологий ρ^* можно опустить и мы получаем требуемую формулу $[a] \smile [b] = (-1)^{pq}[b] \smile [a]$.

Проверим, что ρ — цепное отображение. Для $\sigma\colon [v_0, \ldots, v_n] \to X$ имеем

$$\partial\rho(\sigma) = \varepsilon_n \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_n, \ldots, \widehat{v}_{n-i}, \ldots, v_0]},$$

$$\rho\partial(\sigma) = \rho\Big(\sum_j (-1)^j \sigma|_{[v_0, \ldots, \widehat{v}_j, \ldots, v_n]}\Big) = \varepsilon_{n-1} \sum_i (-1)^{n-i} \sigma|_{[v_n, \ldots, \widehat{v}_{n-i}, \ldots, v_0]}.$$

Так как $\varepsilon_n = (-1)^n \varepsilon_{n-1}$, получаем требуемое соотношение $\partial\rho = \rho\partial$.

Осталось построить цепную гомотопию между ρ и id. Это построение похоже на построение цепной гомотопии в доказательстве теоремы 2.6. Там же была построена триангуляция призмы $\Delta^n \times I$ с вершинами $v_0, \ldots, v_n$ на основании $\Delta^n \times \{0\}$ и вершинами $w_0, \ldots, w_n$ на основании $\Delta^n \times \{1\}$. Симплексы этой триангуляции имеют вид $[v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots, w_n]$, $i = 0, \ldots, n$. Пусть $\pi\colon \Delta^n \times I \to \Delta^n$ — проекция. Определим призменный оператор $P\colon C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ по формуле

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i \varepsilon_{n-i} (\sigma\pi)|_{[v_0, \ldots, v_i, w_n, \ldots, w_i]}.$$

Чтобы показать, что $\partial P + P\partial = \rho - \mathrm{id}$, сначала вычислим ∂P, опустив для краткости σ и $\sigma\pi$:

$$\partial P = \sum_{j \leqslant i} (-1)^i (-1)^j \varepsilon_{n-i} [v_0, \ldots, \widehat{v}_j, \ldots, v_i, w_n, \ldots, w_i] + \\ + \sum_{j \geqslant i} (-1)^i (-1)^{i+1+n-j} \varepsilon_{n-i} [v_0, \ldots, v_i, w_n, \ldots, \widehat{w}_j, \ldots, w_i]. \tag{16}$$

Члены с $j = i$ в этих двух суммах дают

$$\varepsilon_n [w_n, \ldots, w_0] + \sum_{i>0} \varepsilon_{n-i} [v_0, \ldots, v_{i-1}, w_n, \ldots, w_i] + \\ + \sum_{j<n} (-1)^{n+j+1} \varepsilon_{n-j} [v_0, \ldots, v_j, w_n, \ldots, w_{j+1}] - [v_0, \ldots, v_n].$$

В этом выражении две суммы сокращаются, так как замена j на $i - 1$ во второй сумме приводит к новому знаку $(-1)^{n+i} \varepsilon_{n-i+1} = -\varepsilon_{n-i}$. Оставшиеся два члена дают $\varepsilon_n [w_n, \ldots, w_0] - [v_0, \ldots, v_n] = \rho(\sigma) - \sigma$. Поэтому, чтобы показать, что $\partial P + P\partial = \rho - \mathrm{id}$, остаётся проверить, что члены с $j \neq i$ в (16) дают $-P\partial$. Мы имеем

$$P\partial = \sum_{i<j} (-1)^i (-1)^j \varepsilon_{n-i-1} [v_0, \ldots, v_i, w_n, \ldots, \widehat{w}_j, \ldots, w_i] + \\ + \sum_{i>j} (-1)^{i-1} (-1)^j \varepsilon_{n-i} [v_0, \ldots, \widehat{v}_j, \ldots, v_i, w_n, \ldots, w_i].$$

Так как $\varepsilon_{n-i} = (-1)^{n-i} \varepsilon_{n-i-1}$, мы действительно получаем $\partial P + P\partial = \rho - \mathrm{id}$. □

Предложение 6.3. *Отображение $f\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизм колец когомологий $f^*\colon H^*(Y; R) \to H^*(X; R)$, т. е. $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$.*

Доказательство. Из определения произведения (15) следует, что уже на уровне коцепей имеет место формула $f^*(a \smile b) = f^*(a) \smile f^*(b)$. □

6.2. **Относительные произведения и $\times$-произведение.** Формула

$$(a \smile b)(\sigma) = a(\sigma|_{[v_0,\dots,v_p]})\, b(\sigma|_{[v_p,\dots,v_{p+q}]})$$

для $a \in C^p(X;R)$ и $b \in C^q(X;R)$ также задаёт относительные $\smile$-произведения

$$\smile\colon H^p(X;R) \times H^q(X,A;R) \longrightarrow H^{p+q}(X,A;R),$$

$$\smile\colon H^p(X,A;R) \times H^q(X,A;R) \longrightarrow H^{p+q}(X,A;R),$$

так как если коцепи $a \in C^p(X;R)$ и $b \in C^q(X;R)$ обращаются в нуль на цепях в A, то это верно и для $a \smile b$.

Если A и B — открытые подмножества в X или (X,A) и (X,B) — клеточные пары, то имеется более общее *относительное $\smile$-произведение*

$$\smile\colon H^p(X,A;R) \times H^q(X,B;R) \longrightarrow H^{p+q}(X,A\cup B;R). \tag{17}$$

Оно определяется следующим образом. $\smile$-произведение коцепей даёт отображение

$$C^p(X,A;R) \times C^q(X,B;R) \longrightarrow C^{p+q}(X,A+B;R), \tag{18}$$

где $C^n(X,A+B;R)$ — подгруппа в $C^n(X;R)$, состоящая из коцепей, обращающихся в нуль на суммах цепей в A и цепей в B. Включения $C^n(X,A\cup B;R) \to C^n(X,A+B;R)$ индуцируют изоморфизмы когомологий; это следует из 5-леммы и леммы 2.19 (из когомологического варианта этой леммы следует, что ограничение $C^n(A\cup B) \to C^n(A+B)$ индуцирует изоморфизм в когомологиях). Следовательно, $\smile$-произведение коцепей (18) даёт относительное $\smile$-произведение когомологий (17).

Определим также абсолютное и относительное $\times$*-произведение* (или *внешнее произведение*)

$$\times\colon H^p(X;R) \times H^q(Y;R) \longrightarrow H^{p+q}(X\times Y;R),$$

$$\times\colon H^p(X,A;R) \times H^q(Y,B;R) \longrightarrow H^{p+q}(X\times Y, A\times Y \cup X\times B;R)$$

формулой $\alpha \times \beta = p_X^*(\alpha) \smile p_Y^*(\beta)$, где p_X и p_Y — проекции $X\times Y$ на X и на Y.

6.3. **Клеточное определение умножения.** Имеется другой подход к определению умножения в когомологиях, использующий клеточные коцепи. Мы изложим этот подход схематично, оставляя доказательства основных утверждений в качестве задач; эти доказательства можно найти в [ФФ] или [Ха].

Пусть X, Y – клеточные пространства. Напомним, что произведение $X\times Y$ имеет клеточную структуру, клетками которой являются произведения $e^m_\alpha \times e^n_\beta$ клеток $e^m_\alpha \subset X$ и $e^n_\beta \subset Y$. Таким образом, мы получаем билинейное отображение

$$\times\colon \mathcal{C}_m(X) \times \mathcal{C}_n(Y) \to \mathcal{C}_{m+n}(X\times Y), \qquad (e^m_\alpha, e^n_\beta) \mapsto e^m_\alpha \times e^n_\beta. \tag{19}$$

Лемма 6.4. *Клеточный граничный гомоморфизм $\partial\colon \mathcal{C}_i(X\times Y) \to \mathcal{C}_{i-1}(X\times Y)$ удовлетворяет соотношению*

$$\partial(e^m_\alpha \times e^n_\beta) = \partial e^m_\alpha \times e^n_\beta + (-1)^m e^m_\alpha \times \partial e^n_\beta. \tag{20}$$

Из (20) следует, что произведение двух циклов — цикл, а произведение цикла и границы — граница. Следовательно, определено отображение в клеточных гомологиях (с коэффициентами в кольце R)

$$\times\colon H_m(X;R) \times H_n(Y;R) \to H_{m+n}(X\times Y;R), \tag{21}$$

которое называется *(гомологическим) $\times$-произведением.*

Теперь рассмотрим клеточные коцепи. Существует R-билинейное отображение

$$\times\colon \mathcal{C}^p(X;R)\times\mathcal{C}^q(Y;R)\to\mathcal{C}^{p+q}(X\times Y;R), \tag{22}$$

переводящее пару коцепей (c_1,c_2) в коцепь $c_1\times c_2$, значение которой на клетке $e^m_\alpha\times e^n_\beta$ равно $c_1(e^m_\alpha)c_2(e^n_\beta)$. Так как клеточный дифференциал $d\colon \mathcal{C}^{i-1}(X;R)\to\mathcal{C}^i(X;R)$ задаётся соотношением $(dc)(e^n)=c(\partial e^n)$, простая проверка с использованием (20) показывает, что имеет место формула

$$d(c_1\times c_2)=dc_1\times c_2+(-1)^p c_1\times dc_2,\qquad c_1\in\mathcal{C}^p(X;R), c_2\in\mathcal{C}^q(Y;R). \tag{23}$$

Отсюда получаем отображение в клеточных когомологиях

$$\times\colon H^p(X;R)\times H^q(Y;R)\to H^{p+q}(X\times Y;R), \tag{24}$$

которое называется *(комологическим клеточным) $\times$-произведением.*

Замечание. В некоторых монографиях и учебниках клеточный дифференциал $d\colon \mathcal{C}^p(X;R)\to\mathcal{C}^{p+1}(X;R)$ задаётся соотношением

$$\langle dc,e^n\rangle=(-1)^p\langle c,\partial e^n\rangle,\qquad c\in\mathcal{C}^p(X;R),$$

а $\times$-произведение коцепей задаётся соотношением

$$\langle c_1\times c_2, e^m_\alpha\times e^n_\beta\rangle=(-1)^{qm}c_1(e^m_\alpha)c_2(e^n_\beta),\qquad c_1\in\mathcal{C}^p(X;R), c_2\in\mathcal{C}^q(Y;R).$$

При этом формула (23) по-прежнему имеет место.

Теперь мы можем определить *клеточное $\smile$-произведение* как композицию

$$\smile\colon H^p(X;R)\times H^q(X;R)\xrightarrow{\times}H^{p+q}(X\times X;R)\xrightarrow{\Delta^*}H^{p+q}(X;R),$$

где Δ^* — отображение, индуцированное диагональю $\Delta\colon X\to X\times X$.

Теорема 6.5. *Клеточные $\times$- и $\smile$-произведения совпадают с произведениями, определёнными при помощи сингулярных коцепей. В частности, клеточное $\smile$-произведение не зависит от клеточной структуры и является гомотопическим инвариантом пространства.*

Замечание. Клеточное $\smile$-произведение нельзя естественным образом определить для коцепей. Дело в том, что диагональ $\Delta\colon X\to X\times X$ не является клеточным отображением, и для построения отображения $\mathcal{C}^{p+q}(X\times X)\to\mathcal{C}^{p+q}(X)$ необходимо перейти к клеточной аппроксимации диагонали. Однако не существует конструкции клеточной аппроксимации $\widetilde{\Delta}\colon X\to X\times X$, которая была бы функториальной относительно всех отображений $X\to Y$. Иногда это можно сделать относительно выделенных классов пространств и отображений.

6.4. **Формула Кюннета.** Пусть заданы цепные комплексы $C=\{C_n,\partial_n\}$ и $C'=\{C'_n,\partial_n\}$ абелевых групп или R-модулей. *Тензорное произведение* $C\otimes_R C'$ определяется как цепной комплекс, состоящий из модулей

$$(C\otimes_R C')_n=\bigoplus_i C_i\otimes_R C'_{n-i}$$

с граничным гомоморфизмом $\partial\colon (C\otimes_R C')_n\to(C\otimes_R C')_{n-1}$, заданным формулой

$$\partial(c\otimes c')=\partial c\otimes c'+(-1)^i c\otimes\partial c',\qquad c\in C_i, c'\in C'_{n-i}. \tag{25}$$

Непосредственная проверка показывает, что $\partial^2 = 0$:

$$\partial^2(c\otimes c') = \partial(\partial c\otimes c' + (-1)^i c\otimes\partial c') = \partial^2 c\otimes c' + (-1)^{i-1}\partial c\otimes\partial c' + (-1)^i\partial c\otimes\partial c' + c\otimes\partial^2 c' = 0.$$

Из (25) следует, что тензорное произведение циклов — цикл, а тензорное произведение цикла и границы — граница. Поэтому мы получаем индуцированный гомоморфизм гомологий $H_i(C)\otimes_R H_{n-i}(C') \to H_n(C\otimes_R C')$. Просуммировав по i получаем гомоморфизм

$$\bigoplus_i H_i(C)\otimes_R H_{n-i}(C') \to H_n(C\otimes_R C'). \tag{26}$$

Формула Кюннета описывает этот гомоморфизм при некоторых ограничениях на R и C. Основное её применение — в следующей топологической ситуации.

Пример 6.6. Пусть $C = \{\mathcal{C}_n(X), \partial_n\}$ и $C' = \{\mathcal{C}_n(Y), \partial_n\}$ — клеточные цепные комплексы для X и Y. Билинейные отображения (19) дают изоморфизм

$$\bigoplus_i \mathcal{C}_i(X)\otimes\mathcal{C}_{n-i}(Y) \to \mathcal{C}_n(X\times Y), \qquad e^i_\alpha\otimes e^{n-i}_\beta \mapsto e^i_\alpha\times e^{n-i}_\beta$$

а формула (20) превращается в (25). Следовательно, мы имеем изоморфизм цепных комплексов $\mathcal{C}_\bullet(X)\otimes\mathcal{C}_\bullet(Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}_\bullet(X\times Y)$, а гомоморфизм (26) превращается в гомоморфизм

$$\bigoplus_i H_i(X)\otimes H_{n-i}(Y) \to H_n(X\times Y).$$

Теорема 6.7 (алгебраическая формула Кюннета)**.** *Пусть R — область главных идеалов (например, $R=\mathbb{Z}$ или поле) и цепной комплекс C состоит из свободных R-модулей C_i. Тогда для любого n существует естественная расщепимая короткая точная последовательность*

$$0 \to \bigoplus_i H_i(C)\otimes_R H_{n-i}(C') \to H_n(C\otimes_R C') \to \bigoplus_i \mathrm{Tor}_R\big(H_i(C), H_{n-1-i}(C')\big) \to 0.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда все граничные отображения в комплексе C нулевые, т. е. $H_i(C) = C_i$. Тогда $\partial(c\otimes c') = (-1)^i c\otimes\partial c'$ и цепной комплекс $C\otimes_R C'$ — это прямая сумма комплексов $C_i\otimes_R C'$, каждый из которых, в свою очередь, является прямой суммой комплексов C', так как C_i — свободный модуль. Поэтому

$$\begin{aligned} H_n(C\otimes_R C') = H_n\Big(\bigoplus_i C_i\otimes_R C'\Big) = \bigoplus_i H_n(C_i\otimes_R C') \cong \\ \cong \bigoplus_i C_i\otimes_R H_{n-i}(C') = \bigoplus_i H_i(C)\otimes_R H_{n-i}(C'), \end{aligned}$$

так что в этом случае теорема верна.

В общем случае рассмотрим подгруппы $B_i\subset Z_i\subset C_i$ границ и циклов, как в доказательстве части в) формул универсальных коэффициентов (теорема 5.6). Мы имеем короткую точную последовательность цепных комплексов $0\to Z_\bullet\to C_\bullet\to B_{\bullet-1}\to 0$, состоящую из расщепимых коротких точных последовательностей $0\to Z_i\to C_i\to B_{i-1}\to 0$. Умножая тензорно на C', получим короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow (Z\otimes_R C')_\bullet \longrightarrow (C\otimes_R C')_\bullet \longrightarrow (B\otimes_R C')_{\bullet-1} \longrightarrow 0$$

и соответствующую ей длинную точную последовательность гомологий

$$\ldots \xrightarrow{i_n} H_n(Z \otimes_R C') \longrightarrow H_n(C \otimes_R C') \longrightarrow H_{n-1}(B \otimes_R C') \xrightarrow{i_{n-1}} H_{n-1}(Z \otimes_R C') \longrightarrow \ldots$$

Здесь связывающим гомоморфизмом является гомоморфизм, индуцированный вложением $i\colon B \to Z$. Так как B и Z — комплексы с нулевым граничным гомоморфизмом, частный случай, разобранный в начале доказательства, позволяет преобразовать предыдущую точную последовательность в

$$\ldots \xrightarrow{i_n} \bigoplus_i \bigl(Z_i \otimes_R H_{n-i}(C')\bigr) \longrightarrow H_n(C \otimes_R C') \longrightarrow \bigoplus_i \bigl(B_i \otimes_R H_{n-1-i}(C')\bigr) \xrightarrow{i_{n-1}} \\ \xrightarrow{i_{n-1}} \bigoplus_i \bigl(Z_i \otimes_R H_{n-1-i}(C')\bigr) \longrightarrow \ldots$$

Отсюда получаем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker} i_n \longrightarrow H_n(C \otimes_R C') \longrightarrow \operatorname{Ker} i_{n-1} \longrightarrow 0$$

Теперь заметим, что $0 \to B_i \to Z_i \to H_i(C) \to 0$ — свободная резольвента для $H_i(C)$ (здесь мы используем то, что R — область целостности). Поэтому

$$\operatorname{Coker}\bigl(B_i \otimes_R H_{n-i}(C') \xrightarrow{i_n} Z_i \otimes_R H_{n-i}(C')\bigr) = H_i(C) \otimes_R H_{n-i}(C'),$$
$$\operatorname{Ker}\bigl(B_i \otimes_R H_{n-1-i}(C') \xrightarrow{i_{n-1}} Z_i \otimes_R H_{n-1-i}(C')\bigr) = \operatorname{Tor}_R\bigl(H_i(C), H_{n-1-i}(C')\bigr).$$

Суммируя по i и подставляя это в предыдущую точную последовательность, получаем точную последовательность из формулировки теоремы.

Осталось установить расщепимость точной последовательности. Мы докажем расщепимость при дополнительном условии, что цепной комплекс C' состоит из свободных R-модулей C'_i. Этого будет достаточно для топологических приложений. Так как $Z_i \subset C_i$ — прямое слагаемое, гомоморфизм факторизации $Z_i \to H_i(C)$ продолжается до $C_i \to H_i(C)$. Аналогично получаем $C'_i \to H_i(C')$. Рассматривая гомологии $H(C')$ и $H(C')$ как цепные комплексы с нулевым граничным гомоморфизмом, получаем цепное отображение $C \otimes_R C' \to H(C) \otimes_R H(C')$. Переходя к гомологиям, получаем требуемое расщепляющее отображение $H_n(C \otimes_R C') \to \bigoplus_i (H_i(C) \otimes_R H_{n-i}(C'))$. $\square$

Теперь применим алгебраическую формулу Кюннета в ситуации из примера 6.6.

Теорема 6.8 (топологическая формула Кюннета)**.** *Пусть X, Y — клеточные пространства и R — область главных идеалов (например, $\mathbb{Z}$ или поле). Тогда для любого n существует естественная расщепимая короткая точная последовательность*

$$0 \to \bigoplus_i H_i(X) \otimes H_{n-i}(Y) \to H_n(X \times Y) \to \bigoplus_i \operatorname{Tor}\bigl(H_i(X), H_{n-i-1}(Y)\bigr) \to 0$$

(где мы опустили кольцо коэффициентов R).

Для приложений выделим следующий важный частный случай, который включает и когомологическую формулировку.

Теорема 6.9. *Пусть X, Y — клеточные пространства, R — область главных идеалов, причём $H_i(Y; R)$ является свободным R-модулем для любого i (это условие* *автоматически выполнено, если R — поле). Тогда гомоморфизмы*

$$\bigoplus_i H_i(X;R)\otimes H_{n-i}(Y;R)\longrightarrow H_n(X\times Y;R),$$
$$\bigoplus_i H^i(X;R)\otimes H^{n-i}(Y;R)\longrightarrow H^n(X\times Y;R),$$

задаваемые $\times$-произведением, являются изоморфизмами.

Доказательство. Для гомологий это непосредственно вытекает из теоремы 6.8, так как в нашем случае $\mathrm{Tor}(H_i(X),H_{n-1-i}(Y))=0$.

Для когомологий заметим, что требуемый гомоморфизм можно разложить в композицию

$$\bigoplus_i H^i(X;R)\otimes H^{n-i}(Y;R)\xrightarrow{\cong}\bigoplus_i H^i(X,H^{n-i}(Y;R))\longrightarrow H^n(X\times Y;R),$$

где первый изоморфизм получается из формулы универсальных коэффициентов (теорема 5.6 б)), так как $H^{n-i}(Y;R)$ — свободный R-модуль. Поэтому достаточно доказать, что второй гомоморфизм в композиции выше — изоморфизм.

Рассмотрим короткую точную последовательность из формулы универсальных коэффициентов (теорема 5.6 в)):

$$0\longrightarrow \mathrm{Ext}\big(H_{n-1}(X\times Y),R\big)\longrightarrow H^n(X\times Y;R)\longrightarrow \mathrm{Hom}\big(H_n(X\times Y),R\big)\longrightarrow 0. \tag{27}$$

Имеют место изоморфизмы

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}\big(H_n(X\times Y),R\big)&\cong \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_i H_i(X)\otimes H_{n-i}(Y),R\Big)\cong\\ &\cong\bigoplus_i \mathrm{Hom}\big(H_i(X),\mathrm{Hom}(H_{n-i}(Y),R)\big)\cong\bigoplus_i \mathrm{Hom}\big(H_i(X),H^{n-i}(Y;R)\big).\end{aligned}$$

Здесь в первом изоморфизме мы воспользовались уже доказанным утверждением для гомологий, второй изоморфизм вытекает из соотношения $\mathrm{Hom}(A\otimes B,C)\cong\mathrm{Hom}(A,\mathrm{Hom}(B,C))$ (задача), а третий следует из формулы универсальных коэффициентов, так как $H_{n-i}(Y)$ — свободная абелева группа. Далее, имеем изоморфизмы

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}\big(H_{n-1}(X\times Y),R\big)&\cong \mathrm{Ext}\Big(\bigoplus_i H_i(X)\otimes H_{n-1-i}(Y),R\Big)\cong\\ &\cong\bigoplus_i \mathrm{Ext}\big(H_i(X),\mathrm{Hom}(H_{n-1-i}(Y),R)\big)\cong\bigoplus_i \mathrm{Ext}\big(H_i(X),H^{n-1-i}(Y;R)\big),\end{aligned}$$

где второй изоморфизм вытекает из соотношения $\mathrm{Ext}(A\otimes B,C)\cong\mathrm{Ext}(A,\mathrm{Hom}(B,C))$ для свободной абелевой группы B (задача). Из последних двух изоморфизмов и точной последовательности (27) получаем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd}
0\arrow[r] & \mathrm{Ext}\big(H_{n-1}(X\times Y),R\big)\arrow[r] & H^n(X\times Y;R)\arrow[r] & \mathrm{Hom}\big(H_n(X\times Y),R\big)\arrow[r] & 0\\
0\arrow[r] & \bigoplus_i \mathrm{Ext}\big(H_i(X),H^{n-1-i}(Y;R)\big)\arrow[r]\arrow[u, "\cong"'] & \bigoplus_i H^i\big(X,H^{n-i}(Y;R)\big)\arrow[r]\arrow[u] & \bigoplus_i \mathrm{Hom}\big(H_i(X),H^{n-i}(Y;R)\big)\arrow[r]\arrow[u, "\cong"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Тогда из 5-леммы следует, что средняя стрелка является изоморфизмом. $\square$

6.5. **Кольца когомологий тора и проективных пространств.** Пусть R — коммутативное кольцо с единицей. Напомним, что *R-алгеброй* называется кольцо A, которое также является R-модулем, причем умножение $A \times A \to A$ является R-билинейным.

Внешней алгеброй с n образующими над кольцом R называется ассоциативная алгебра с 1, порождённая элементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, которые удовлетворяют соотношениям $\alpha_i^2 = 0, \quad \alpha_i\alpha_j = -\alpha_j\alpha_i$. Внешняя алгебра обозначается $\Lambda_R[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ или просто $\Lambda[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Внешнюю алгебру можно сделать градуированной, положив $\deg \alpha_i = 1$. При этом алгебра $\Lambda[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ становится градуированно коммутативной, и мы имеем $\Lambda[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k$, где Λ^k — свободный R-модуль, порождённый мономами $\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$.

Предложение 6.10. *Пусть $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ — n-мерный тор. Тогда имеет место изоморфизм*

$$H^*(T^n) \cong \Lambda[\alpha_1, \ldots, \alpha_n],$$

при котором $\alpha_i \in \Lambda[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ переходит в $p_i^*(\alpha) \in H^1(T^n)$, где $\alpha \in H^1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ — образующая, а $p_i \colon T^n \to S^1$ — проекция на i-й сомножитель.

Доказательство. Будем вести индукцию по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение верно для T^n и докажем его для T^{n+1}. Достаточно доказать, что для любого k группа $H^k(T^{n+1})$ является свободной абелевой с базисом из мономов $\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n+1$. Из теоремы 6.9 получаем изоморфизм

$$H^k(T^n) \oplus (H^{k-1}(T^n) \otimes H^1(S^1)) \xrightarrow{\cong} H^k(T^n \times S^1) = H^k(T^{n+1}),$$

при котором $\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k} + \alpha_{j_1} \ldots \alpha_{j_{k-1}} \otimes \alpha$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{k-1} \leqslant n$, переходит в $\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k} + \alpha_{j_1} \ldots \alpha_{j_{k-1}}\alpha_{n+1}$. Отсюда следует требуемое утверждение. □

Наряду с внешними алгебрами важный класс градуированных колец образуют кольца многочленов $R[v_1, \ldots, v_n]$. Градуировка в кольце $R[v_1, \ldots, v_n]$ задаётся степенями образующих, $\deg v_i = d_i$. Если все элементы кольца R имеют порядок 2, то кольцо $R[v_1, \ldots, v_n]$ будет градуированно коммутативным при любых степенях образующих. Если же в R имеются элементы порядка, отличного от 2, то для градуированной коммутативности кольца $R[v_1, \ldots, v_n]$ необходимо, чтобы все степени d_i были чётными. Например, можно положить $\deg v_i = 2$.

Также рассматриваются «усечённые» кольца $R[v]/(v^k)$, состоящие из многочленов степени меньше k.

Предложение 6.11. *Имеют место изоморфизмы*

$$H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[u]/(u^{n+1}), \quad H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[u], \qquad \deg u = 1,$$
$$H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[v]/(v^{n+1}), \quad H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[v], \qquad \deg v = 2.$$

Доказательство. Сначала разберём случай $\mathbb{R}P^n$. Для упрощения обозначений будем писать P^n вместо $\mathbb{R}P^n$ и не указывать явно коэффициенты $\mathbb{Z}_2$. Имеем $H^i(P^n) = \mathbb{Z}_2$ при $i \leqslant n$. Если мы докажем, что произведение образующей группы $H^1(P^n)$ на образующую группы $H^{n-1}(P^n)$ даёт образующую группы $H^n(P^n)$, то изоморфизм $H^*(P^n) \cong \mathbb{Z}_2[u]/(u^{n+1})$ получится индукцией по n, так как включение $P^{n-1} \to P^n$ индуцирует изоморфизм групп H^i при $i \leqslant n-1$.

Мы докажем больше, а именно, что $\smile\colon H^i(P^n)\otimes H^{n-i}(P^n)\to H^n(P^n)$ — изоморфизм. Вложим P^i и P^{n-i} в P^n в качестве следующих подмножеств:

$$\{[x_0:\ldots:x_n]\in P^n\colon x_{i+1}=\ldots=x_n=0\}\cong P^i,$$
$$\{[x_0:\ldots:x_n]\in P^n\colon x_0=\ldots=x_{i-1}=0\}\cong P^{n-i}.$$

Тогда $P^i\cap P^{n-i}$ — одна точка $p=[0:\ldots:1:\ldots:0]$, где 1 стоит на i-м месте. Пусть $U_i\subset P^n$ — i-я аффинная карта, задаваемая условием $x_i\neq 0$. Тогда $U_i\cong\mathbb{R}^n$, и при этом изоморфизме $p\in U_i$ переходит в $0\in\mathbb{R}^n$. Мы имеем деформационную ретракцию $P^n\setminus P^{n-i}\to P^{i-1}$; гомотопия между ней и тождественным отображением задаётся формулой

$$f_t\colon P^n\setminus P^{n-i}\to P^n\setminus P^{n-i},\quad [x_0:\ldots:x_n]\mapsto[x_0,\ldots,x_{i-1},tx_i,\ldots,tx_n].$$

Теперь рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H^i(P^n)\otimes H^{n-i}(P^n) \arrow[r, "\smile"] & H^n(P^n) \\
H^i\big(P^n,P^n\setminus P^{n-i}\big)\otimes H^{n-i}\big(P^n,P^n\setminus P^i\big) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "\smile"] & H^n\big(P^n,P^n\setminus\{p\}\big) \arrow[u] \arrow[d] \\
H^i\big(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^{n-i}\big)\otimes H^{n-i}\big(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^i\big) \arrow[r, "\smile"] & H^n\big(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\big) \arrow[d, equal] \\
H^i\big(\mathbb{R}^i,\mathbb{R}^i\setminus\{0\}\big)\otimes H^{n-i}\big(\mathbb{R}^{n-i},\mathbb{R}^{n-i}\setminus\{0\}\big) \arrow[u] \arrow[r, "\times"] & H^n\big(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\big) \\
H^i(I^i,\partial I^i)\otimes H^{n-i}(I^{n-i},\partial I^{n-i}) \arrow[u] \arrow[r, "\times"] & H^n(I^n,\partial I^n) \arrow[u] \\
H^i(T^i,\dot T^i)\otimes H^{n-i}(T^{n-i},\dot T^{n-i}) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "\times"] & H^n(T^n,\dot T^n) \arrow[u] \arrow[d] \\
H^i(T^i)\otimes H^{n-i}(T^{n-i}) \arrow[r, "\times"] & H^n(T^n)
\end{tikzcd}$$

Здесь горизонтальные стрелки представляют собой разные варианты относительных $\times$- и $\smile$-произведений (17), а $\dot T^n$ обозначает $(n-1)$-мерный остов n-мерного тора со стандартной клеточной структурой. Первая (сверху) пара вертикальных стрелок является изоморфизмами, так как $H^i(P^n,P^n\setminus P^{n-i})\cong H^i(P^n,P^{i-1})$ (см. выше), а $H^i(P^n)\to H^i(P^n,P^{i-1})$ — изоморфизм (это следует из клеточных когомологий, так как все клеточные дифференциалы нулевые). Вторая пара вертикальных стрелок является изоморфизмами согласно вырезанию. Левая вертикальная стрелка из третьей пары индуцирована проекциями $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^i$ и $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n-i}$, поэтому третий квадрат коммутативен по определению $\times$-произведения. Кроме того, третья и четвёртая пары вертикальных стрелок являются изоморфизмами, так как там имеются очевидные деформационные ретракции. Пятая пара вертикальных стрелок являются изоморфизмами индуцированными фактор-отображениями $I^n\to T^n$. Нижняя пара вертикальных стрелок является изоморфизмами, так как все дифференциалы в клеточном коцепном комплексе тора нулевые. Наконец, нижняя горизонтальная стрелка является изоморфизмом благодаря предложению 6.10. Итак, верхняя горизонтальная стрелка — также изоморфизм, что завершает описание кольца $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$.

Изоморфизм $H^*(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2[u]$ следует из конечномерного случая, так как вложение $\mathbb{R}P^n\hookrightarrow\mathbb{R}P^\infty$ индуцирует изоморфизм групп H^i при $i\leqslant n$.

Доказательство для $\mathbb{C}P^n$ и $\mathbb{C}P^\infty$ аналогично, надо лишь рассматривать коэффициенты в $\mathbb{Z}$ и удвоить размерности групп и пространств. □

Задачи и упражнения.

6.12. Докажите, что для произвольных R-модулей A,B,C существует естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_R(A\otimes_R B,C)\cong\mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_R(B,C)).$$

6.13. Докажите, что если R — область главных идеалов, то для R-модулей A,C и свободного R-модуля B существует естественный изоморфизм

$$\mathrm{Ext}_R(A\otimes_R B,C)\cong\mathrm{Ext}_R(A,\mathrm{Hom}_R(B,C)).$$

6.14. Докажите следующую формулу, связывающую $\smile$- и $\times$-произведения:

$$(\varphi_1\times\psi_1)\smile(\varphi_2\times\psi_2)=(-1)^{q_1p_2}(\varphi_1\smile\varphi_2)\times(\psi_1\smile\psi_2)$$

для $\varphi_1\in H^{p_1}(X)$, $\psi_1\in H^{q_1}(Y)$, $\varphi_2\in H^{p_2}(X)$, $\psi_2\in H^{q_2}(Y)$.

6.15. Докажите изоморфизм $H^*(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}[v]/(2v)$, где $\deg v=2$. Опишите кольцо когомологий $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z})$.

6.16. Докажите изоморфизм колец $H^*(\mathbb{C}P^\infty\times\mathbb{C}P^\infty)\cong\mathbb{Z}[v_1,v_2]$, $\deg v_1=\deg v_2=2$.

7. Двойственность Пуанкаре

Для ориентируемого замкнутого n-мерного многообразия M имеют место изоморфизмы двойственности Пуанкаре $H^k(M)\cong H_{n-k}(M)$. Для коэффициентов в $\mathbb{Z}_2$ изоморфизмы $H^k(M;\mathbb{Z}_2)\cong H_{n-k}(M;\mathbb{Z}_2)$ имеют место без предположения об ориентируемости. Мы также докажем изоморфизмы двойственности в более общей ситуации: для когомологий с компактными носителями некомпактных многообразий и для многообразий с краем.

7.1. **Гладкие и топологические многообразия.** Топологическим *многообразием* размерности n называется хаусдорфово топологическое пространство M со счётной базой, такое, что для каждой точки $x\in M$ существует окрестность U, гомеоморфная открытому подмножеству V в $\mathbb{R}^n$. Компактные многообразия традиционно называют *замкнутыми.*

Гладким атласом на n-мерном многообразии M называется открытое покрытие $M=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$ многообразия M, в котором для каждого множества U_α фиксирован гомеоморфизм $\varphi_\alpha\colon U_\alpha\xrightarrow{\cong}V_\alpha$, называемый *картой*, где $V_\alpha\subset\mathbb{R}^n$, и на пересечениях $U_\alpha\cap U_\beta$ *отображения замены координат*

$$\psi_{\alpha\beta}=\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}\colon\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$$

являются гладкими (бесконечно дифференцируемыми) отображениями на открытых подмножествах в $\mathbb{R}^n$.

Выбор гладкого атласа на многообразии называется *гладкой структурой*, а многообразие с гладким атласом — *гладким* (или *дифференцируемым*) *многообразием*.

Примерами гладких многообразий являются $\mathbb{R}^n$, сферы S^n, проективные пространства $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$, классические двумерные поверхности. Произведение гладких многообразий снова является гладким многообразием.

Не являются многообразиями графы с вершинами степени $\geqslant 2$ и бесконечномерные клеточные пространства типа S^∞, $\mathbb{R}P^\infty$ и $\mathbb{C}P^\infty$. Конус, надстройка, смэш-произведение и джойн многообразий, как правило, не являются многообразиями.

7.2. **Группы локальных гомологий. Ориентация. Фундаментальный класс.** Пусть X — топологическое пространство. Группа $H_n(X, X \setminus x)$ называется *n-й группой локальных гомологий* пространства X в точке x.

Предложение 7.1. *Пусть M — топологическое n-мерное многообразие. Тогда $H_n(M, M \setminus x) \cong \mathbb{Z}$ и $H_i(M, M \setminus x) = 0$ при $i \neq n$ для любой точки $x \in M$.*

Доказательство. Имеем

$$H_i(M, M \setminus x) \cong H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \widetilde{H}_{i-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \widetilde{H}_{i-1}(S^{n-1}),$$

где первый изоморфизм следует из теоремы вырезания, а второй — из точной последовательности пары. Теперь утверждение следует из предложения 2.15. $\square$

Локальная ориентация n-мерного многообразия M в точке x — это выбор одной из двух образующих группы локальных гомологий $H_n(M, M \setminus x) \cong \mathbb{Z}$.

Выберем локальную ориентацию $\mu_x \in H_n(M, M \setminus x)$ в каждой точке $x \in M$. Такой выбор называется *согласованным*, если для каждой точки $x \in M$ существует такая окрестность B, гомеоморфная открытому шару в $\mathbb{R}^n$, что для каждой точки $y \in B$ образующие μ_x и μ_y переходят друг в друга при изоморфизмах

$$H_n(M, M \setminus x) \xleftarrow{\cong} H_n(M, M \setminus B) \xrightarrow{\cong} H_n(M, M \setminus y),$$

индуцированных вложениями $M \setminus B \to M \setminus x$ и $M \setminus B \to M \setminus y$. Многообразие M называется *ориентируемым*, если существует согласованный выбор локальных ориентаций всех его точек. Такой выбор называется *ориентацией* многообразия M. Если многообразие M связно и ориентируемо, то у него есть в точности две ориентации.

Рассмотрим множество, состоящее из пар (x, μ_x):

$$\widetilde{M} = \{(x, \mu_x)\colon x \in M,\ \mu_x \text{ — локальная ориентация в точке } x \in M\}.$$

Для каждого подмножества $B \subset M$, гомеоморфного открытому шару в $\mathbb{R}^n$, и образующей $\mu_B \in H_n(M, M \setminus B) \cong \mathbb{Z}$ определим подмножество $U(\mu_B) \subset \widetilde{M}$ как

$$U(\mu_B) = \bigl\{(x, \mu_x)\colon x \in B,\ \mu_B \text{ переходит в } \mu_x \\ \text{при изоморфизме } H_n(M, M \setminus B) \to H_n(M, M \setminus x)\bigr\}.$$

Введём на $\widetilde{M}$ топологию, базу которой образуют подмножества $U(\mu_B)$. Тогда из этой конструкции и определения ориентируемости вытекает следующее.

Предложение 7.2. *Пусть M связно. Тогда*

a) *M ориентируемо тогда и только тогда, когда $\widetilde{M}$ имеет две компоненты связности, т. е. $\widetilde{M} = M \sqcup M$;*

б) *если M не ориентируемо, то $\widetilde{M}$ — связное ориентируемое многообразие, а проекция $\widetilde{M} \to M$, $(x, \mu_x) \mapsto x$, является двулистным накрытием.*

Двулистное накрытие $\widetilde{M} \to M$ неориентируемого многообразия M называется *ориентирующим накрытием.*

Следствие 7.3. *Односвязное многообразие ориентируемо.*

Также, M ориентируемо, если в $\pi_1(M)$ нет подгрупп индекса 2.

Рассматривая группы гомологий с коэффициентами в коммутативном кольце R с единицей, получим определение *R-ориентируемого* многообразия. (Образующей в $H_n(M, M \setminus x; R) \cong R$ называется любой обратимый элемент кольца R.) Любое многообразие $\mathbb{Z}_2$-ориентируемо, так как образующая в $\mathbb{Z}_2$ единственна. Более того, легко видеть, что ориентируемое многообразие R-ориентируемо для любого R, а неориентируемое многообразие R-ориентируемо, если $2 = 0$ в кольце R (задача). Поэтому интерес представляют случаи $R = \mathbb{Z}$ и $R = \mathbb{Z}_2$.

Лемма 7.4. *Пусть M — многообразие размерности n и $A \subset M$ — компактное подмножество. Тогда для коммутативного кольца R с единицей*

а) *элемент $\alpha \in H_n(M, M \setminus A; R)$ равен нулю тогда и только тогда, когда его образ μ_x в $H_n(M, M \setminus x; R)$ равен нулю для любой точки $x \in A$;*

б) *если выбраны согласованные локальные ориентации $\mu_x \in H_n(M, M \setminus x; R)$ для всех $x \in A$, то существует единственный элемент $\mu_A \in H_n(M, M \setminus A; R)$, который отображается в μ_x при гомоморфизме $r_A \colon H_n(M, M \setminus A; R) \to H_n(M, M \setminus x; R)$ для любой точки $x \in A$.*

в) *$H_i(M, M \setminus A; R) = 0$ при $i > n$.*

Доказательство. Доказательство леммы разобьём на несколько шагов. Будем опускать коэффициенты R в обозначениях групп гомологий.

Шаг 1. Если лемма верна для A, B и $A \cap B$, то она верна и для $A \cup B$. Рассмотрим точную последовательность Майера–Виеториса для пар (теорема 2.21):

$$0 \to H_n(X, X \setminus (A \cup B)) \xrightarrow{\varphi} H_n(X, X \setminus A) \oplus H_n(X, X \setminus B) \xrightarrow{\psi} H_n(X, X \setminus (A \cap B)).$$

Слева стоит 0 так как $H_{n+1}(X, X \setminus (A \cap B)) = 0$ по предположению. Кроме того, группы $H_i(X, X \setminus (A \cup B))$ при $i > n$ стоят между двумя нулевыми группами в последовательности, поэтому они равны нулю, что доказывает утверждение в). Утверждение а) для $A \cup B$ следует из утверждения а) для A и B в силу инъективности φ.

Для доказательства утверждения б) для $A \cup B$ рассмотрим элементы $\mu_A \in H_n(M, M \setminus A)$ и $\mu_B \in H_n(M, M \setminus B; R)$, которые существуют по предположению. При отображении $H_n(X, X \setminus A) \to H_n(X, X \setminus (A \cap B))$ элемент μ_A переходит в элемент, удовлетворяющий условию из б) для $A \cap B$, т. е. в $\mu_{A \cap B}$, в силу единственности такого элемента. Аналогично, μ_B переходит в $\mu_{A \cap B}$ при отображении $H_n(X, X \setminus B) \to H_n(X, X \setminus (A \cap B))$. Следовательно, отображение ψ из точной последовательности Майера–Виеториса переводит элемент $(\mu_A, -\mu_B)$ в нуль. Поэтому $(\mu_A, -\mu_B) = \varphi(\mu_{A \cup B})$ для некоторого $\mu_{A \cup B} \in H_n(X, X \setminus (A \cup B))$. Этот $\mu_{A \cup B}$ удовлетворет условию из б) для $A \cup B$, а его единственность следует из инъективности φ.

Шаг 2. Сводим лемму к случаю M — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ (одна карта). Компактное подмножество A содержится в конечном объединении карт некоторого атласа M, т. е. $A \subset U_1 \cup \ldots \cup U_k$. Будем вести индукцию по k. Положим $A_i = U_i \cap A$ и применим утверждение предыдущего шага к $A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1}$ и A_k. В результате утверждение сводится к случаю $k = 1$, т. е. одной карты.

Шаг 3. $A = K$ — конечный симплициальный комплекс. Если $A = \Delta^k$ — симплекс, то $\mathbb{R}^n \setminus A \to \mathbb{R}^n \setminus x$ — деформационная ретракция и $r_A\colon H_i(M, M\setminus A) \to H_i(M, M\setminus x)$ — изоморфизм для $x \in A$. Далее лемма для K сводится к случаю одного симплекса по индукции при помощи утверждения из шага 1.

Шаг 4. $A \subset \mathbb{R}^n$ — произвольный компакт. Пусть $\alpha = [a] \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$ представлен относительным циклом a. Тогда $\partial a \subset C$ для некоторого компакта $C \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Построим симплициальный комплекс K, для которого $A \subset K$ и $K \cap C = \varnothing$. (Покроем A симплексом, перейдём к кратному барицентрическому подразделению с диаметром симплексов меньше расстояния между A и C и оставим только n-симплексы, пересекающие A.) Тогда a задаёт класс $\alpha_K = [a] \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$, который отображается в данный α при гомоморфизме $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \to H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$. Согласно предыдущему шагу, $\alpha_K = 0$ при $i > n$. Следовательно, $\alpha = 0$ и $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A) = 0$ при $i > n$, что доказывает третье утверждение леммы.

Пусть теперь $i = n$. Предположим, что $\mu_x = 0$ для любой $x \in A$. Тогда и $\mu_x = 0$ для любой $x \in K$, так как K — объединение n-симплексов, пересекающих A, а $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \Delta^n) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus x)$ — изоморфизм для $x \in \Delta^n$. Согласно предыдущему шагу, $\alpha_K = 0$, а значит и $\alpha = 0$. Это доказывает первое утверждение леммы и единственность во втором утверждении.

Для доказательства существования продолжим согласованные ориентации μ_x, $x \in A$, на симплекс $\Delta^n \supset A$. Для Δ^n существование элемента $\mu_{\Delta^n} \in H_n(M, M \setminus \Delta^n)$ очевидно. Тогда искомый элемент μ_A есть образ μ_{Δ^n} при гомоморфизмое $H_n(M, M \setminus \Delta^n) \to H_n(M, M \setminus A)$. □

Если многообразие M замкнуто (компактно), то мы можем положить $A = M$ в лемме 7.4. Тогда из утверждения б) получаем, что если M замкнуто и ориентировано, т. е. согласованно выбраны образующие $\mu_x \in H_n(M, M \setminus x; \mathbb{Z})$, то существует единственный класс $\mu_M \in H_n(M; \mathbb{Z})$, переходящий в локальную ориентацию $\mu_x \in H_n(M, M \setminus x; \mathbb{Z})$ для любой точки $x \in M$. Этот класс называется *фундаментальным классом* ориентированного многообразия M и обозначается $[M]$.

Теперь можно сформулировать теорему о связи ориентируемости и старшей группы гомологий для замкнутых связных многообразий M.

Теорема 7.5. *Пусть M — замкнутое связное многообразие размерности n. Тогда*

а) *отображение $H_n(M; \mathbb{Z}_2) \to H_n(M, M \setminus x; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ является изоморфизмом для любой точки $x \in M$;*

б) *если M ориентируемо, то $H_n(M; \mathbb{Z}) \to H_n(M, M \setminus x; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ — изоморфизм для любой точки $x \in M$; если M неориентируемо, то $H_n(M; \mathbb{Z}) = 0$;*

в) *$H_i(M; \mathbb{Z}) = 0$ при $i > n$.*

Доказательство. Положим $A = M$ и $R = \mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_2$ в лемме 7.4. Утверждение в) вытекает из утверждения в) леммы.

Пусть $x \in M$. Покажем, что для связного многообразия M гомоморфизм $H_n(M; R) \to H_n(M, M \setminus x; R)$, $\alpha \mapsto \mu_x$, инъективен. Пусть $\mu_x = 0$ для некоторого $\alpha \in H_n(M; R)$. Тогда, если $y \in M$ — другая точка, содержащаяся вместе с x в окрестности B, гомеоморфной открытому шару, то гомоморфизмы для x и y раскладываются в композицию следующим образом:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(M;R) & \longrightarrow & H_n(M,M\setminus B;R) & \xrightarrow{\cong} & H_n(M,M\setminus x;R) \\ & & \downarrow\cong & & \\ & & H_n(M,M\setminus y;R) & & \end{array}$$

Так как M связно, отсюда следует, что $\alpha_y = 0$ для любой точки $y \in M$. Следовательно, $\alpha = 0$ в силу утверждения а) леммы 7.4.

Если многообразие M является R-ориентируемым, то гомоморфизм $H_n(M;R) \to H_n(M, M\setminus x; R)$ сюръективен в силу утверждения б) леммы 7.4 (для $A = M$). Это доказывает утверждение а) теоремы (так как M всегда $\mathbb{Z}_2$-ориентируемо) и первую часть утверждения б).

Пусть M неориентируемо. Так как гомоморфизм $H_n(M) \to (M, M\setminus x) \cong \mathbb{Z}$ инъективен, получаем $H_n(M) \cong 0$ или $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$. Предположим последнее, и пусть α — образующая. Тогда $\mu_x = k\mu_x$, где $\mu_x \in H_n(M, M\setminus x) \cong \mathbb{Z}$ — образующая, а k — положительное целое число. Из диаграммы выше следует, что k не зависит от x, и μ_x можно выбрать согласованно для всех $x \in M$. Это противоречит предположению о неориентируемости M. Итак, $H_n(M) \cong 0$. □

Таким образом, для замкнутого связного M имеем $H_n(M;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ всегда, $H_n(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ или 0 в зависимости о того, является M ориентируемым или нет, а выбор ориентации на M — это выбор образующей группы $H_n(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (фундаментального класса).

Предположим, что замкнутое многообразие M триангулировано или на нём задана структура конечного полусимплициального комплекса с n-мерными симплексами σ_i, $i = 1,\ldots,k$. Тогда каждый $(n-1)$-мерный симплекс τ является гранью в точности двух n-мерных симплексов σ_i и σ_j. Если M ориентируемо, то ориентации симплексов σ_i можно выбрать согласованно. Это означает, что можно выбрать отображения $\sigma_i\colon \Delta^n = [v_0,\ldots,v_n] \to X$ так, что каждый τ входит в $\partial\sigma_i$ и $\partial\sigma_j$ с разными знаками. Тогда $\partial(\sum_{i=1}^k \sigma_i) = 0$ и цикл $\sum_{i=1}^k \sigma_i$ представляет образующую группы $H_n(M)$ — фундаментальный класс $[M]$. Для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ цепь $\sum_{i=1}^k \sigma_i$ — всегда цикл, представляющий образующую группы $H_n(M;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$.

7.3. **Степень отображения многообразий.** Пусть $f\colon M \to N$ — отображение связных замкнутых ориентированных n-мерных многообразий с фундаментальными классами $[M]$ и $[N]$. Тогда для $f_*\colon H_n(M;\mathbb{Z}) \to H_n(N;\mathbb{Z})$ имеем $f_*[M] = d[N]$. Целое число d называется *степенью* отображения $f\colon M \to N$.

Предложение 7.6. *Для любого связного замкнутого ориентированного n-мерного многообразия M и любого $d \in \mathbb{Z}$ существует отображение $M \to S^n$ степени d.*

Доказательство. Сначала построим отображение степени 1. Пусть $U \subset M$ — карта, причём $U \cong \mathbb{R}^n$. Рассмотим отображение $M \to M/(M\setminus U) \cong S^n$. Для любой $x \in U$ имеем композицию гомоморфизмов $H_n(M) \to H_n(M, M\setminus U) \to H_n(M, M\setminus x)$, при которой $[M]$ переходит в μ_x. Отсюда следует, что образ $[M]$ при первом гомоморфизме есть фундаментальный класс $[S^n] \in H_n(S^n) \cong H_n(M, M\setminus x)$, а значит $M \to M/(M\setminus U)$ имеет степень 1. Композиция этого отображения с любым отображением $S^n \to S^n$ степени d даёт отображение $M \to S^n$ степени d. □

7.4. **$\frown$-произведение и изоморфизмы двойственности.** Определим *произведение высечения* или *$\frown$-произведение*

$$\frown\colon C_p(X;R)\times C^q(X;R)\to C_{p-q}(X;R)$$

для $p\geqslant q$ по формуле

$$\sigma\frown\varphi=\varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,v_q]})\sigma|_{[v_q,\dots,v_p]},$$

где $\sigma\colon[v_0,\dots,v_p]\to X$ — сингулярный симплекс и $\varphi\in C^q(X;R)$ — коцепь.

Лемма 7.7. *$\partial(\sigma\frown\varphi)=(-1)^q(\partial\sigma\frown\varphi-\sigma\frown d\varphi)$.*

Доказательство. Непосредственная проверка:

$$\partial\sigma\frown\varphi=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_{q+1}]})\sigma|_{[v_{q+1},\dots,v_p]}+\sum_{i=q+1}^{p}(-1)^i\varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,v_q]})\sigma|_{[v_q,\dots,\widehat{v}_i\dots,v_p]},$$

$$\sigma\frown d\varphi=\sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i\varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_{q+1}]})\sigma|_{[v_{q+1},\dots,v_p]},$$

$$\partial(\sigma\frown\varphi)=\sum_{i=q}^{p}(-1)^{i-q}\varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,v_q]})\sigma|_{[v_q,\dots,\widehat{v}_i\dots,v_p]}.\quad\square$$

Отсюда получаем R-билинейное отображение (*гомологическое $\frown$-произведение)*

$$H_p(X;R)\times H^q(X;R)\xrightarrow{\frown}H_{p-q}(X;R).$$

Имеются также относительные версии:

$$H_p(X,A;R)\times H^q(X;R)\xrightarrow{\frown}H_{p-q}(X,A;R),$$

$$H_p(X,A;R)\times H^q(X,A;R)\xrightarrow{\frown}H_{p-q}(X;R),$$

$$H_p(X,A\cup B;R)\times H^q(X,A;R)\xrightarrow{\frown}H_{p-q}(X,B;R).$$

Лемма 7.8 (функториальность)**.** *Для $f\colon X\to Y$ отображения в диаграмме*

$$\begin{array}{ccc}
H_p(X)\times H^q(X) & \xrightarrow{\frown} & H_{p-q}(X)\\
{\scriptstyle f_*}\big\downarrow \quad\quad \big\uparrow{\scriptstyle f^*} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_*}\\
H_p(Y)\times H^q(Y) & \xrightarrow{\frown} & H_{p-q}(Y)
\end{array}$$

удовлетворяют соотношению $f_*(\alpha)\frown\varphi=f_*(\alpha\frown f^*(\varphi))$.

Доказательство. $f\sigma\frown\varphi=\varphi(f\sigma|_{[v_0,\dots,v_q]})f\sigma|_{[v_q,\dots,v_p]}$. $\square$

Теперь мы можем сформулировать теорему об изоморфизмах двойственности Пуанкаре.

Теорема 7.9. *Пусть M — замкнутое R-ориентируемое n-мерное многообразие с фундаментальным классом $[M]\in H_n(M;R)$. Тогда отображение*

$$D\colon H^k(M;R)\to H_{n-k}(M;R),\quad \varphi\mapsto[M]\frown\varphi,$$

является измоморфизмом для любого k.

Доказательство этой теоремы будет аналогично доказательству существования фундаментального класса: с помощью последовательности Майера–Виеториса мы сведём утверждение к случаю $M = \mathbb{R}^n$. Но для этого нам понадобится версия двойственности Пуанкаре для некомпактных многообразий. Она использует понятие когомологий с компактными носителями.

7.5. **Когомологии с компактными носителями.** Для пространства X определим группу i-мерных *сингулярных цепей с компактными носителями* с коэффициентами в G как подгруппу $C_c^i(X;G)$ в $C^i(X;G)$, состоящую из коцепей, обращающихся в нуль вне некоторого компактного подмножества (зависящего от коцепи):

$$C_c^i(X;G) = \{f\colon C_i(X) \to G\colon f|_{C_*(X\setminus K_f)} = 0 \quad \text{для некоторого компактного } K_f \subset X\}.$$

Коцепное кограничное отображение ограничивается на группы коцепей с компактными носителями: $d\colon C_c^i(X;G) \to C_c^{i+1}(X;G)$. Группы когомологий получаемого коцепного комплекса называются *когомологиями с компактными носителями* и обозначаются $H_c^i(X;G)$. Если само пространство X компактно, то $C_c^i(X;G) = C^i(X;G)$ и $H_c^i(X;G) = H^i(X;G)$.

Если $K \subset L$ — вложение компактных подмножеств, то мы имеем мономорфизм $C^i(X, X\setminus K;G) \hookrightarrow C^i(X, X\setminus L;G)$ и $C_c^i(X;G) = \bigcup_{K\subset X} C^i(X, X\setminus K;G)$. Индуцированный гомоморфизм гомологий $H^i(X, X\setminus K;G) \to H^i(X, X\setminus L;G)$ может не быть инъективным. Однако группу $H_c^i(X;G)$ также можно описать через группы $H^i(X, X\setminus K;G)$ при помощи следующей алгебраической конструкции.

Конструкция 7.10 (прямой предел (копредел) групп)**.** Пусть $(P, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. *Диаграммой* абелевых групп, индексированной множеством P, называется набор $D = \{G_\alpha\colon \alpha\in P\}$ абелевых групп G_α и гомоморфизмов $f_{\alpha\beta}\colon G_\alpha \to G_\beta$ таких, что $f_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}$ и $f_{\alpha\gamma}$ есть композиция $f_{\alpha\beta}$ и $f_{\beta\gamma}$, если $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

Пусть $\mathcal{P}$ — категория, объектами которой являются элементы $\alpha\in P$, и между α и β имеется единственный морфизм, если $\alpha \leqslant \beta$. Тогда диаграмма — это (ковариантный) функтор $D\colon \mathcal{P} \to \mathcal{AB}$, $\alpha \mapsto G_\alpha$, из $\mathcal{P}$ в категорию абелевых групп.

Прямым пределом или *копределом* диаграммы D абелевых групп называется факторгруппа прямой суммы $\bigoplus_{\alpha\in P} G_\alpha$ по подгруппе, порождённой всеми элементами вида $g_\alpha - f_{\alpha\beta}(g_\alpha)$ для $g_\alpha \in G_\alpha$. Обозначается $\operatorname{colim} D$ или $\varinjlim G_\alpha$.

Определены канонические гомоморфизмы $i_\alpha\colon G_\alpha \to \varinjlim G_\alpha$, удовлетворяющие соотношениям $i_\beta f_{\alpha\beta} = i_\alpha$ при $\alpha \leqslant \beta$.

Если в P существует наибольший элемент μ, то $\varinjlim G_\alpha = G_\mu$. Если никакие два различных элемента в P не находятся в отношении порядка, то $\varinjlim G_\alpha = \bigoplus_{\alpha\in P} G_\alpha$.

Предложение 7.11. *Пусть в P для любых двух элементов $\alpha, \beta \in P$ существует $\gamma \in P$, такой что $\alpha \leqslant \gamma$ и $\beta \leqslant \gamma$. Тогда прямой предел $\varinjlim G_\alpha$ можно отождествить с фактормножеством $(\bigsqcup_{\alpha\in P} G_\alpha)/\sim$ по отношению эквивалентности, порождённому эквивалентностями $g_\alpha \sim f_{\alpha\beta}(g_\alpha)$ для $g_\alpha \in G_\alpha$.*

Доказательство. Введём на фактормножестве $(\bigsqcup_{\alpha\in P} G_\alpha)/\sim$ структуру абелевой группы следующим образом. Для классов эквивалентности $[g_\alpha]$ и $[g_\beta]$ элементов $g_\alpha \in G_\alpha$ и $g_\beta \in G_\beta$ найдём $\gamma \in P$, такой что $\alpha \leqslant \gamma$ и $\beta \leqslant \gamma$, и положим

$[g_\alpha] + [g_\beta] = [f_{\alpha\gamma}(g_\alpha) + f_{\beta\gamma}(g_\beta)]$, где в правой части элементы складываются в группе G_γ. Тогда отображение

$$\varinjlim G_\alpha = \Big(\bigoplus_{\alpha\in P} G_\alpha\Big)/\sim\ \to \Big(\bigsqcup_{\alpha\in P} G_\alpha\Big)/\sim, \quad [g_\alpha] \mapsto [g_\alpha],$$

является изоморфизмом. □

Предложение 7.12 (универсальное свойство прямого предела)**.** *Пусть $D = \{G_\alpha \colon \alpha \in P\}$ — диаграмма абелевых групп, индексированная частично упорядоченным множеством P. Предположим, что заданы гомоморфизмы $h_\alpha \colon G_\alpha \to H$, удовлетворяющие соотношениям $h_\beta f_{\alpha\beta} = h_\alpha$ при $\alpha \leqslant \beta$. Тогда существует единственный гомоморфизм $h\colon \varinjlim G_\alpha \to H$, такой что $hi_\alpha = h_\alpha$:*

$$\begin{tikzcd}
G_\alpha \arrow[dd, "f_{\alpha\beta}"'] \arrow[dr, "i_\alpha"] \arrow[drr, bend left, "h_\alpha"] & & \\
& \varinjlim G_\alpha \arrow[r, dashed, "h"] & H \\
G_\beta \arrow[ur, "i_\beta"'] \arrow[urr, bend right, "h_\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Гомоморфизм h однозначно задаётся условием $h([g_\alpha]) = h_\alpha(g_\alpha)$ для $g_\alpha \in G_\alpha$, $[g_\alpha] \in \varinjlim G_\alpha = (\bigoplus_{\alpha\in P} G_\alpha)/\sim$. □

Универсальное свойство выше определяет копредел диаграммы $D\colon \mathcal{P} \to \mathcal{C}$ для произвольной категории $\mathcal{C}$. Конструкция 7.10 показывает, что копределы существуют в категории абелевых групп. Копределы диаграмм также существуют в категории топологических пространств: прямую сумму необходимо заменить на несвязное объединение (копроизведение пространств), а факторгруппу — на факторпространство.

Пусть теперь $\mathcal{P}$ — частично упорядоченное по включению множество компактных подмножеств $K \subset X$. Мы имеем диаграмму групп $H^i(X, X \setminus K; G)$ и гомоморфизмов $H^i(X, X \setminus K; G) \to H^i(X, X \setminus L; G)$ для $K \subset L$.

Предложение 7.13. $H^i_c(X; G) = \varinjlim H^i(X, X \setminus K; G)$.

Доказательство. Так как каждый элемент из $H^i_c(X;G)$ представлен коциклом в $C^i(X, X \setminus K; G)$ для некоторого компактного $K \subset X$, получаем гомоморфизм $H^i_c(X;G) \to \big(\bigoplus_{K\subset X} H^i(X, X\setminus K; G)\big)/\sim\ = \varinjlim H^i(X, X \setminus K; G)$. Сюръективность и инъективность этого гомоморфизма следует из определений (задача). □

Пример 7.14. Вычислим когомологии с компактными носителями пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть B_k — шар радиуса $k > 0$ с центром в нуле. Так как каждое компактное подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ содержится в некотором B_k, мы имеем

$$H^i_c(\mathbb{R}^n; G) = \varinjlim H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K; G) = \varinjlim H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_k; G),$$

где последний предел берётся по упорядоченному множеству шаров B_k. Так как $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_k; G) \to H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_l; G)$ — изоморфизм при $k < l$, получаем

$$H^i_c(\mathbb{R}^n; G) = H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_k; G) = \begin{cases} G & \text{при } i = n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим теперь R-ориентируемое n-мерное многообразие M, возможно некомпактное. Далее гомологии и когомологии будем рассматривать с коэффициентами в коммутативном кольце R с единицей.

Согласно лемме 7.4 существует единственный элемент $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K)$, который отображается в локальную ориентацию $\mu_x \in H_n(M, M \setminus x)$ для любой $x \in K$. Рассмотрим гомоморфизм $H^k(M, M \setminus K) \to H_{n-k}(M)$, $\varphi \mapsto \mu_K \frown \varphi$. Если $K \subset L$ — вложение компактных подмножеств и $i\colon (M, M\setminus L) \to (M, M\setminus K)$ — соответствующее отображение пар, то диаграмма

$$\begin{tikzcd} H^k(M, M\setminus K) \arrow[r] \arrow[d, "i^*"'] & H_{n-k}(M) \arrow[d, equal] & \varphi \arrow[r, mapsto] & \mu_K \frown \varphi \\ H^k(M, M\setminus L) \arrow[r] & H_{n-k}(M) & \varphi \arrow[r, mapsto] & \mu_L \frown \varphi \end{tikzcd}$$

коммутативна. Действительно, $\mu_L \frown i^*(\varphi) = i_*(\mu_L) \frown \varphi = \mu_K \frown \varphi$, где первое соотношение следует из леммы 7.8, а $i_*(\mu_L) = \mu_K$ в силу единственности μ_K. Тогда из предложения 7.12 получаем, что определён *гомоморфизм двойственности*

$$D_M\colon H_c^k(M) = \varinjlim H^k(M, M \setminus K) \to H_{n-k}(M).$$

Теорема 7.15. *Для R-ориентируемого n-мерного многообразия M гомоморфизм двойственности*

$$D_M\colon H_c^k(M; R) \to H_{n-k}(M; R)$$

является изоморфизмом.

Так как $H_c^k(M; R) = H^k(M; R)$ для компактного M, теорема 7.9 вытекает из теоремы 7.15.

Доказательство теоремы 7.15. Будем опускать обозначения коэффициентов R.

Шаг 1. $M = \mathbb{R}^n$. Из примера 7.14 получаем, что единственная нетривиальная группа когомологий с компактными носителями есть $H_c^n(\mathbb{R}^n) = H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \cong R$, где $B \subset \mathbb{R}^n$ — шар. Гомоморфизм двойственности есть

$$D_{\mathbb{R}^n}\colon H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \to H_0(\mathbb{R}^n) \cong R, \quad \varphi \mapsto \mu_B \frown \varphi.$$

Здесь класс $\mu_B \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \cong R$ представлен любым симплексом $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$, содержащим B в своей внутренности. Группа $H_c^n(\mathbb{R}^n) = H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \cong R$ порождена коцепью, принимающей значение 1 на Δ^n и 0 на остальных симплексах. При этом $\mu_B \frown \varphi = \varphi(\mu_B)$ — спаривание n-коцепи с n-цепью μ_B. Поэтому $D_{\mathbb{R}^n}$ — изоморфизм.

Следующие шаги основаны на применении последовательности Майера–Виеториса. Пусть $M = U \cup V$, где U и V открыты. Тогда диаграмма

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & H_c^k(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "D_{U\cap V}"] & H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \arrow[r] \arrow[d, "D_U \oplus -D_V"] & H_c^k(M) \arrow[r] \arrow[d, "D_M"] & H_c^{k+1}(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "D_{U\cap V}"] & {} \\ {} \arrow[r] & H_{n-k}(U\cap V) \arrow[r] & H_{n-k}(U) \oplus H_{n-k}(V) \arrow[r] & H_{n-k}(M) \arrow[r] & H_{n-k-1}(U\cap V) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

коммутативна с точностью до знака. Мы оставим это без доказательства, см. [Ха, лемма 3.36].

Шаг 2. M — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Представим M в виде счётного объединения открытых шаров, $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Положим $V_k = U_1 \cup \ldots \cup U_k$. Докажем по индукции, что D_{V_k} — изоморфизм для любого k. Случай $k=1$ — это шаг 1, так как $U_1 \cong \mathbb{R}^n$. Далее, $V_k = U_k \cup V_{k-1}$, причём V_{k-1} и $U_k \cap V_{k-1}$ гомеоморфны объединению $k-1$ открытых шаров. Рассмотрим коммутативную диаграмму выше с $U = U_k$ и $V = V_{k-1}$. Из предположения индукции и 5-леммы получаем, что D_{V_k} — изоморфизм.

Теперь мы имеем, что M — объединение последовательности вложенных открытых множеств $V_1 \subset V_2 \subset \ldots$ Если $K \subset V_i$ — компактное подмножество, то $H^k(V_i, V_i \setminus K) = H^k(M, M \setminus K)$ согласно вырезанию. Так как каждое компактное подмножество в M содержится в некотором V_i, получаем $H^k_c(M) = \varinjlim H^k_c(V_i)$. Кроме того, $H_{n-k}(M) = \varinjlim H_{n-k}(V_i)$ (задача). Поэтому гомоморфизм $D_M\colon H^k_c(M) \to H_{n-k}(M)$ является пределом гомоморфизмов $D_{V_i}\colon H^k_c(V_i) \to H_{n-k}(V_i)$. Так как каждый D_{V_i} — изоморфизм, то и D_M — изоморфизм.

Шаг 3. Произвольное M. Так как M имеет счётную базу, его можно представить в виде объединения $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, где каждое U_i гомеоморфно открытому множеству в $\mathbb{R}^n$. Далее рассуждение в точности повторяет рассуждение из предыдущего шага с заменой открытых шаров на открытые множества в $\mathbb{R}^n$. □

7.6. **Связь с умножением. Сигнатура.** Градуированно-коммутативная алгебра A над полем F называется *алгеброй Пуанкаре*, если она связна (т. е. $A^0 \cong F$), конечномерна (т. е. $A = \bigoplus_{i=0}^{d} A^i$, где все A^i конечномерны) и F-линейные отображения

$$\begin{gathered} A^i \to \mathrm{Hom}_F(A^{d-i}, A^d), \\ a \mapsto m_a, \quad \text{где } m_a(b) = ab, \end{gathered}$$

являются изоморфизмами при $0 \leqslant i \leqslant d$. Для алгебры Пуанкаре имеем $A^0 \cong \mathrm{Hom}_F(A^d, A^d)$, так что $A^d \cong A^0 \cong F$ и $A^i \cong A^{d-i}$.

Мы докажем, для замкнутого связного многообразия M алгебра когомологий $H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ является алгеброй Пуанкаре всегда, а алгебра когомологий $H^*(M; F)$ с коэффициентами в произвольном поле F является алгеброй Пуанкаре, если M ориентируемо.

Нам понадобится формула, связывающая $\frown$- и $\smile$-произведения.

Лемма 7.16. *Для $\alpha \in C_p(X)$, $\varphi \in C^q(X)$ и $\psi \in C^{p-q}(X)$ имеет место формула*

$$\psi(\alpha \frown \varphi) = (\varphi \smile \psi)(\alpha).$$

Доказательство. Для сингулярного симплекса $\sigma\colon \Delta^p \to X$ имеем

$$\psi(\sigma \frown \varphi) = \psi\big(\varphi(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_q]})\sigma|_{[v_q,\ldots,v_p]}\big) = \varphi(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_q]})\psi(\sigma|_{[v_q,\ldots,v_p]}) = (\varphi \smile \psi)(\alpha) \qquad \square$$

Рассмотрим ориентированное замкнутое многообразие M с фундаментальным классом $[M] \in H_n(M)$. Тогда $\smile$-произведение определяет билинейную функцию (*спаривание*)

$$H^i(M; F) \times H^{n-i}(M; F) \to F, \quad (\varphi, \psi) \mapsto (\varphi \smile \psi)[M], \tag{28}$$

для любого поля F и $0 \leqslant i \leqslant n$.

Напомним, что билинейное спаривание $f\colon V \times W \to F$, $(v, w) \mapsto f(v, w)$, векторных пространств над F называется *невырожденным*, если линейные отображения $W \to \mathrm{Hom}(V, F)$, $w \mapsto f(-, w)$, и $V \to \mathrm{Hom}(W, F)$, $v \mapsto f(v, -)$, являются изоморфизмами.

Теорема 7.17. *Для замкнутого многообразия M спаривание (28) невырождено, если M ориентируемо или если поле F имеет характеристику 2.*

Доказательство. Рассмотрим композицию

$$H^{n-i}(M;F) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}_F(H_{n-i}(M;F),F) \xrightarrow{D^*} \mathrm{Hom}_F(H^i(M;F),F),$$

где h — гомоморфизм, задаваемый вычислением коцепей на цепях, а D^* — гомоморфизм, двойственный к изоморфизму двойственности Пуанкаре $D\colon H^i(M;F) \to H_{n-i}(M;F)$. Композиция D^*h является изоморфизмом, так как h — изоморфизм для коэффициентов в поле F в силу формул универсальных коэффициентов (теорема 5.6). С другой стороны, композиция D^*h переводит $\psi \in H^{n-i}(M;F)$ в гомоморфизм $\varphi \mapsto \psi([M] \frown \varphi) = (\varphi \smile \psi)[M]$, где последнее равенство следует из леммы 7.16. Отсюда следует, что D^*h — первый из изоморфизмов в определении невырожденного спаривания. Второй изоморфизм вытекает из коммутативности $\smile$-произведения. □

Следствие 7.18. *Алгебра когомологий $H^*(M;F) = \bigoplus_{i=0}^n H^i(M;F)$ связного замкнутого многообразия M является алгеброй Пуанкаре, если M ориентируемо или если поле F имеет характеристику* 2.

Доказательство. Условие $H^0(M;F) \cong F$ вытекает из связности M. Конечномерность групп когомологий компактного многообразия оставим без доказательства (для гладких многообразий есть явная конструкция конечного клеточного разбиения, происходящая из теории Морса; для топологических многообразий см. [Ха, следствие П.9]).

Чтобы проверить, что гомоморфизм $H^{n-i}(M;F) \to \mathrm{Hom}_F(H^i(M;F), H^n(M;F))$, $\psi \mapsto (\varphi \mapsto \varphi \smile \psi)$, является изоморфизмом, рассмотрим композицию

$$H^{n-i}(M;F) \to \mathrm{Hom}_F(H^i(M;F), H^n(M;F)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_F(H^i(M;F),F),$$

где последний изоморфизм задаётся композицией с изоморфизмом $H^n(M;F) \to F$ вычисления n-коцепи на фундаментальном классе. Композиция выше есть изоморфизм D^*h из доказательства теоремы 7.17. Поэтому первый гомоморфизм в композиции также является изоморфизмом. □

Билинейное спаривание (28) при $n = 2\ell$ и $i = \ell$ задаёт невырожденную билинейную функцию на средней группе когомологий $H^\ell(M;F)$ замкнутого ориентированного многообразия. Эта билинейная функция кососимметрическая, если ℓ нечётно, и симметрическая, если ℓ чётно (т. е. $n = 4k$).

Сигнатура (разность между числом положительных и числом отрицательных квадратов в диагональном виде) невырожденной симметрической билинейной функции

$$H^{2k}(M;\mathbb{R}) \times H^{2k}(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad (\varphi,\psi) \mapsto (\varphi \smile \psi)[M],$$

является гомотопическим инвариантом замкнутого ориентированного $4k$-мерного многообразия M и называется его *сигнатурой*.

7.7. **Двойственность для многообразий с краем.** Топологическим *многообразием с краем* размерности n называется хаусдорфово топологическое пространство M со счётной базой, такое, что для каждой точки $x \in M$ существует окрестность U, гомеоморфная открытому подмножеству V в полупространстве

$$\mathbb{R}^n_{\geqslant} = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_n \geqslant 0\}.$$

Если такой гомеоморфизм переводит точку $x \in M$ в точку $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ с $x_n = 0$, то согласно вырезанию мы имеем $H_n(M, M \setminus x) = H_n(\mathbb{R}^n_{\geqslant}, \mathbb{R}^n_{\geqslant} \setminus \{0\}) = 0$. Если же $x \in M$ переходит при гомеоморфизме в точку $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ с $x_n > 0$, то $H_n(M, M \setminus x) = H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$. Подмножество

$$\partial M = \{x \in M \colon H_n(M, M \setminus x) = 0\}$$

называется *краем* многообразия M. При любом гомеоморфизме между открытым $U \subset M$ и открытым $V \subset \mathbb{R}^n_{\geqslant}$ точки края переходят в точки с $x_n = 0$. Край ∂M является $(n-1)$-мерным многообразием без края.

Гладкое многообразие с краем определяется аналогично гладкому многообразию без края, при помощи гладкого атласа, в котором отображения перехода являются гладкими отображениями на открытых подмножествах в $\mathbb{R}^n_{\geqslant}$. (Отображение между открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^n_{\geqslant}$ называется *гладким*, если оно является ограничением гладкого отображения между открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^n$.)

Многообразие M с краем называется *ориентируемым*, если многообразие $M \setminus \partial M$ ориентируемо.

Для компактного многообразия M с краем существует открытая окрестность $U(\partial M)$ края и гомеоморфизм $U(\partial M) \xrightarrow{\cong} \partial M \times [0, 1)$, при котором ∂M переходит в $\partial M \times \{0\}$ (задача). Такая окрестность называется *воротником* края ∂M.

Используя воротник, мы получаем гомотопическую эквивалентность (деформационную ретракцию) $M \setminus \partial M \xrightarrow{\simeq} M$. Отсюда получаем изоморфизм

$$H_i(M, \partial M) \cong H_i(M \setminus \partial M, \partial M \times (0, \varepsilon)) = H_i(M \setminus \partial M, (M \setminus \partial M) \setminus K_\varepsilon)$$

для $0 < \varepsilon < 1$, где $K_\varepsilon \subset M \setminus \partial M$ — компактное подмножество. Применяя лемму 7.4 к многообразию $M \setminus \partial M$ и компактному подмножеству K_ε получаем, что если $M \setminus \partial M$ ориентировано, то существует единственный элемент $[M] \in H_n(M, \partial M)$, ограничение которого даёт локальные ориентации во всех точках $x \in M \setminus \partial M$. Класс $[M] \in H_n(M, \partial M)$ называется *фундаментальным классом* компактного ориентированного многообразия M с краем.

Теорема 7.19 (двойственность Пуанкаре–Лефшеца)**.** *Пусть M — компактное ориентированное n-мерное многообразие с краем и $[M] \in H_n(M, \partial M)$ — фундаментальный класс. Тогда гомоморфизмы двойственности*

$$H^k(M, \partial M) \to H_{n-k}(M), \qquad \varphi \mapsto [M] \frown \varphi,$$
$$H^k(M) \to H_{n-k}(M, \partial M), \qquad \varphi \mapsto [M] \frown \varphi,$$

являются изоморфизмами.

Доказательство. Теорема 7.15 даёт изоморфизм

$$D \colon H^k_c(M \setminus \partial M) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M \setminus \partial M)$$

Из гомотопической эквивалентности $M \setminus \partial M \xrightarrow{\simeq} M$ получаем изоморфизмы

$$H_{n-k}(M \setminus \partial M) \cong H_{n-k}(M),$$
$$H^k(M, \partial M) \cong H^k(M \setminus \partial M, \partial M \times (0, \varepsilon)) = H^k(M \setminus \partial M, (M \setminus \partial M) \setminus K_\varepsilon).$$

Так как любое компактное подмножество $K \subset M \setminus \partial M$ содержится в некотором K_ε, получаем

$$H^k_c(M \setminus \partial M) = \varinjlim H^k(M \setminus \partial M, (M \setminus \partial M) \setminus K) \cong H^k(M, \partial M).$$

Тогда изоморфизм D превращается в первый из доказываемых изоморфизмов. Доказательство второго изоморфизма остаётся в качестве задачи. $\square$

Задачи и упражнения.

7.20. Докажите, что S^n, T^n, $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ являются замкнутыми многообразиями, а шар D^n и полноторие $D^2 \times S^1$ являются многообразиями с краем.

7.21. Вычислите группы локальных гомологий $H_i(X, X \setminus x)$ для графа X и его произвольной точки x.

7.22. Докажите, что ориентируемое многообразие R-ориентируемо для любого коммутативного кольца R с единицей, а неориентируемое многообразие R-ориентируемо, если $2 = 0$ в кольце R.

7.23. Докажите, что многообразия S^n, T^n, $\mathbb{C}P^n$ ориентируемы. При каких n ориентируемо $\mathbb{R}P^n$?

7.24. Докажите, что $H^i_c(X) = \varinjlim H^i(X, X \setminus K)$, где прямой предел берётся по компактным подмножествам $K \subset X$.

7.25. Пусть пространство X представлено в виде объединения последовательности вложенных открытых множеств $V_1 \subset V_2 \subset \ldots$, причём любое компактное подмножество $K \subset X$ содержится в некотором V_i. Докажите, что $H_k(M) = \varinjlim H_k(V_i)$.

7.26. Пусть M^m — замкнутое ориентированное многообразие, а $i\colon N^n \hookrightarrow M^m$ — вложение замкнутого ориентированного подмногообразия. Пусть $x \in H^{m-n}(M)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к $i_*[N] \in H_n(M)$. Докажите, что для любого класса когомологий $y \in H^n(M)$ имеет место формула

$$\langle i^* y, [N]\rangle = \langle x \smile y, [M]\rangle.$$

7.27. Определим действие группы $\mathbb{Z}_7$ на S^5 формулой

$$\tau \cdot (z_0, z_1, z_2) = (e^{\frac{2\pi i}{7}} z_0, e^{\frac{2\pi i \cdot 2}{7}} z_1, e^{\frac{2\pi i \cdot 5}{7}} z_2),$$

где $\tau \in \mathbb{Z}_7$ — образующая группы. Вычислите группы гомологий $S^5/\mathbb{Z}_7$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и с коэффициентами в $\mathbb{Z}_7$.

7.28. *Связной суммой* $M\#N$ топологических многообразий M и N одной размерности n называется многообразие, получаемое вырезанием малых открытых шаров из M и N с последующим отождествлением их граничных сфер путём некоторого гомеоморфизма $S^{n-1} \xrightarrow{\cong} S^{n-1}$. Насколько выбор этого гомеоморфизма влияет на топологический тип результата — связной суммы? Гомеоморфны ли многообразия

а) $S^2 \times S^2$ и $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$?

б) $S^2 \times S^2$ и $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$, где $\overline{\mathbb{C}P^2}$ обозначает $\mathbb{C}P^2$ с обращённой ориентацией?

7.29. Докажите, что если n-мерные многообразия M и N замкнуты и ориентируемы, то $H_i(M\#N) = H_i(M) \oplus H_i(N)$ при $0 < i < n$. Как выглядит соответствующая формула в неориентируемом случае?

7.30. Докажите, что для замкнутых n-мерных многообразий M и N имеет место формула для эйлеровой характеристики $\chi(M\#N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(S^n)$.

7.31. Пусть S_g — замкнутая ориентируемая поверхность рода g. Докажите, что отображение $S_g \to S_h$ степени 1 существует тогда и только тогда, когда $g \geqslant h$.

7.32. Вычислите кольцо когомологий

а) дополнения до объединения координатных плоскостей $x_1 = x_3 = 0$ и $x_2 = x_4 = 0$ в $\mathbb{R}^4$;
б) дополнения до объединения координатных плоскостей $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$, $x_3 = x_5 = 0$, $x_4 = x_1 = 0$ и $x_5 = x_2 = 0$ в $\mathbb{R}^5$;
в) дополнения до объединения координатных плоскостей $z_1 = z_3 = 0$ и $z_2 = z_4 = 0$ в $\mathbb{C}^4$;
г) дополнения до объединения координатных плоскостей $z_1 = z_3 = 0$, $z_2 = z_4 = 0$, $z_3 = z_5 = 0$, $z_4 = z_1 = 0$ и $z_5 = z_2 = 0$ в $\mathbb{C}^5$.

7.33. Докажите, что для замкнутого ориентируемого $(4n+2)$-мерного многообразия M ранг группы $H^{2n+1}(M)$ чётный.

7.34. Вычислите сигнатуру многообразий $\mathbb{C}P^2$ и $S^2 \times S^2$. Для данного целого k постройте связное замкнутое ориентированное многообразие сигнатуры k.

7.35. Докажите, что для компактного многообразия M с краем существует открытая окрестность $U(\partial M)$ края и гомеоморфизм $U(\partial M) \xrightarrow{\cong} \partial M \times [0,1)$, при котором ∂M переходит в $\partial M \times \{0\}$.

7.36. Докажите второй изоморфизм в теореме 7.19.

7.37. Докажите, что компактное многообразие не ретрагируется на свой край.

7.38. Пусть K — компактное подмножество в сфере S^n, причём вложение $K \subset S^n$ является корасслоением, т. е. удовлетворяет свойству продолжения гомотопии. Докажите *изоморфизмы двойственности Александера–Понтрягина*:

$$\widetilde{H}_i(S^n - K) \cong \widetilde{H}^{n-i-1}(K).$$

(Эти изоморфизмы имеют место и без ограничения на вложение, если K — локально стягиваемое компактное подмножество.)

7.39. Пусть K — симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, \dots, m\}$, отличный от полного симплекса Δ^{m-1}. Определим *двойственный комплекс*

$$\widehat{K} = \{I \subset [m] \colon [m] \setminus I \notin K\},$$

т. е. наборами вершин симплексов из $\widehat{K}$ являются дополнения до наборов вершин, не порождающих симплексы в K. Докажите изоморфизмы групп симплициальных (ко)гомологий:

$$\widetilde{H}_j(K) \cong \widetilde{H}^{m-3-j}(\widehat{K}).$$

Это — комбинаторная версия двойственности Александера–Понтрягина.

8. Векторные расслоения

8.1. **Локально тривиальные расслоения. Векторные расслоения.** *Локально тривиальным расслоением* (или просто *расслоением*) называется четвёрка (E, B, F, p), где E, B, F — пространства, а p — такое отображение $E \to B$, что любая точка $x \in B$ имеет окрестность $U \subset B$, для которой существует гомеоморфизм $\varphi_U\colon p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U", "\cong"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Гомеоморфизм φ_U называется *тривиализацией* расслоения над U. Пространство E называется *тотальным пространством*, B *базой*, а F *слоем* локально тривиального расслоения. Локально тривиальным расслоением также называют отображение $p\colon E \to B$. Прообраз $p^{-1}(x)$ точки $x \in B$ называется *слоем расслоения над точкой* x и обозначается E_x; каждый слой гомеоморфен F. Как множество, тотальное пространство E предсталяет собой объединение слоёв $\bigcup_{x\in B} E_x$, параметризованных точками базы.

Локально тривиальное расслоение называется *тривиальным*, если в диаграмме выше можно положить $U = B$; это означает, что $E \cong B \times F$.

Отображением или *морфизмом* расслоений $p'\colon E' \to B'$ и $p\colon E \to B$ называется пара отображений $\widetilde{f}\colon E' \to E$ и $f\colon B' \to B$, входящих в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \tag{29}$$

Важным случаем морфизма является *индуцированное расслоение.* Говорят, что расслоение $p'\colon E' \to B'$ *индуцировано* расслоением $p\colon E \to B$ при помощи отображения $f\colon B' \to B$, если

$$E' = \{(e, b') \in E \times B'\colon p(e) = f(b)\}$$

— расслоенное произведение, т. е. диаграмма (29) является декартовым квадратом. Пространство индуцированного расслоения обозначается f^*E. В этом случае отображение $\widetilde{f}$ отождествляет слой индуцированного расслоения $p'\colon f^*E \to B'$ над $b' \in B'$ со слоем расслоения $p\colon E \to B$ над $f(b) \in B$. Если $f\colon B' \hookrightarrow B$ — вложение, что индуцированное расслоение $p'\colon f^*E \to B'$ есть *ограничение* $p\colon E \to B$ на B'. Если $B = pt$, то индуцированное расслоение тривиально.

Локально тривиальное расслоение (E, B, F, p) называется *гладким*, если E, B, F — гладкие многообразия, $p\colon E \to B$ — гладкое отображение и тривиализации φ_U являются диффеоморфизмами.

Пример 8.1.

1. Накрытие является локально тривиальным расслоением с дискретным слоем F.

2. Проекция ленты Мёбиуса на её среднюю линию представляет собой нетривиальное расслоение над окружностью со слоем отрезок.

3. Пусть $E = S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2\colon |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$, $B = \mathbb{C}P^1 = S^2$, $p(z_0, z_1) = [z_0 : z_1]$. Получаем локально тривиальное расслоение $p\colon S^3 \to S^2$ со слоем $F = S^1$, которое называется *расслоением Хопфа*. В качестве множеств U из определения расслоения можно взять $U_0 = \{[z_0\colon z_1] \in \mathbb{C}P^1\colon z_0 \neq 0\}$ и $U_1 = \{[z_0\colon z_1] \in \mathbb{C}P^1\colon z_1 \neq 0\}$.

Локально тривиальное расслоение $p\colon E \to B$ со слоем $F = \mathbb{R}^n$ называется *вещественным n-мерным векторным расслоением*, если ограничение каждой тривиализации $\varphi_U\colon p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^n$ на каждый слой является линейным изоморфизмом $E_x \cong x \times \mathbb{R}^n$. Аналогично определяется *комплексное n-мерное векторное расслоение* (со слоем $\mathbb{C}^n$). Векторные расслоения обычно обозначаются греческими буквами ξ, η, γ и т. д.

Если $\varphi_{U_\alpha}\colon p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ и $\varphi_{U_\beta}\colon p^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbb{R}^n$ — две тривиализации векторного расслоения ξ над U_α и U_β, соответственно, то определены *отображения перехода*

$$g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n,\mathbb{R}), \quad g_{\alpha\beta}(x) = (\varphi_{U_\alpha} \circ \varphi_{U_\beta}^{-1})|_{x\times\mathbb{R}^n}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$g_{\alpha\alpha}(x) = \mathrm{id}, \quad g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\gamma}(x) g_{\gamma\alpha}(x) = \mathrm{id} \tag{30}$$

для любого $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Если задано открытое покрытие $B = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ и отображения перехода $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n,\mathbb{R})$, удовлетворяющие соотношениям (30), то можно определить векторное расслоение $p\colon E \to B$, положив

$$E = \Big(\bigcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^n)\Big)/\sim, \tag{31}$$

где $(x,v) \sim (x, g_{\alpha\beta}(x)(v))$ для $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $v \in \mathbb{R}^n$.

Пример 8.2. *Тавтологическое расслоение* над вещественным проективным пространством $\mathbb{R}P^n$ — это одномерное векторное расслоение $\gamma = \gamma^1_{n,\mathbb{R}}$, слоем которого над точкой $\mathbb{R}P^n$, задаваемой прямой $\ell \in \mathbb{R}^{n+1}$, является сама эта прямая. Таким образом, пространство расслоения γ есть

$$E\gamma = \{(\ell, v)\colon \ell \text{ — одномерное подпространство в } \mathbb{R}^{n+1},\ v \in \ell\}.$$

Аналогично определяется тавтологическое одномерное комплексное расслоение $\gamma = \gamma^1_{n,\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}P^n$.

Сечением локально тривиального расслоения $p\colon E \to B$ называется отображение $s\colon B \to E$ такое, что $p \circ s = \mathrm{id}\colon B \to B$. Векторное n-мерное расслоение над B тривиально тогда и только тогда, когда оно имеет n сечений $s_1, \ldots, s_n$, таких что векторы $s_1(x), \ldots, s_n(x)$ линейно независимы для каждой точки $x \in B$.

Морфизмом векторных расслоений $p\colon E \to B$ и $p\colon E' \to B'$ называется морфизм (29), в котором ограничение отображения $f_E\colon E \to E'$ на каждый слой E_x линейно. Если при этом $B = B'$ и $f_B = \mathrm{id}$, то такой морфизм называется *морфизмом векторных расслоений над B*. Морфизм векторных расслоений, ограничение которого на каждый слой инъективно (соответственно, сюръективно, биективно), называется *мономорфизмом* (соответственно, *эпиморфизмом*, *изоморфизмом*).

Мы будем обозначать тривиальное вещественное и комплексное n-мерное расслоение над данной базой B через $\underline{\mathbb{R}}^n$ и $\underline{\mathbb{C}}^n$, соответственно. Для векторных расслоений над одной и той же базой B определены те же операции, что и над векторными пространствами. В частности, определены *прямая сумма* $\xi \oplus \eta$, *тензорное произведение* $\xi \otimes \eta$, Hom-*расслоение* $\mathrm{Hom}(\xi,\eta)$, *двойственное расслоение* $\xi^* = \mathrm{Hom}(\xi, \underline{\mathbb{R}})$, *внешняя степень* $\Lambda^k\xi$, *симметрическая степень* $S^k\xi$ и т. д.

Для вещественного векторного расслоения ξ его *комплексификация* $\xi_{\mathbb{C}} = \xi \otimes \mathbb{C}$ является комплексным расслоением той же размерности. Для комплексного n-мерного расслоения η его *овеществление* $\eta_{\mathbb{R}}$ является вещественным $2n$-мерным расслоением. Имеют место изоморфизмы $(\xi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong \xi \oplus \xi$ и $(\eta_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong \eta \oplus \overline{\eta}$, где $\overline{\eta}$ — комплексно сопряжённое расслоение.

Предложение 8.3. *Векторное расслоение ξ над компактной хаусдорфовой базой вкладыватся в тривиальное расслоение $\underline{\mathbb{R}}^N$ над той же базой для некоторого N, т. е. существует мономорфизм расслоений $j\colon \xi \hookrightarrow \underline{\mathbb{R}}^N$.*

Доказательство. Пусть $p\colon E \to B$ — данное расслоение. Так как B компактно, существует конечное покрытие $B = U_1 \cup \ldots \cup U_k$ открытыми множествами, над которыми расслоение тривиально. Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — разбиение единицы, подчинённое этому открытому покрытию, т. е. функция $f_i\colon B \to \mathbb{R}$ непрерывна, неотрицательна, её носитель содержится в U_i и $\sum_{i=1}^k f_i = 1$. Рассмотрим тривиализации $\varphi_i\colon p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{R}^n$. Для $i = 1, \ldots, k$ определим непрерывное отображение

$$f_i \cdot \varphi_i\colon E \to B \times \mathbb{R}^n, \quad e \mapsto \begin{cases} f_i(p(e)) \cdot \varphi_i(e) & \text{при } e \in p^{-1}(U_i), \\ ((p(e), 0) & \text{при } e \notin p^{-1}(U_i). \end{cases}$$

Положим $N = nk$ и отождествим $\mathbb{R}^N$ с $\bigoplus_{i=1}^k \mathbb{R}^n$. Тогда требуемый мономорфизм $j\colon \xi \hookrightarrow \underline{\mathbb{R}}^N$ задаётся формулой

$$j(e) = \bigl(f_1 \cdot \varphi_1(e), \ldots, f_k \cdot \varphi_k(e)\bigr)$$

для $e \in E$. □

Римановой метрикой на вещественном векторном расслоении ξ называется положительно определённая симметрическая билинейная функция (скалярное произведение), заданная в каждом слое E_x, такая что компоненты её матрицы в координатах локальных тривиализаций являются непрерывными функциями от $x \in B$ (гладкими функциями в случае гладкого расслоения). Аналогично определяется *эрмитова метрика* на комплексном расслоении.

Предложение 8.4. *Риманова (эрмитова) метрика существует на вещественном (комплексном) расслоении над компактной хаусдорфовой базой.*

Доказательство. Вложим расслоение в тривиальное расслоение $\underline{\mathbb{R}}^N$ согласно предложению 8.3, введём метрику на $\mathbb{R}^N$ и ограничим её на слои расслоения. □

Предложение 8.5. *Для любого векторного расслоения ξ над компактной хаусдорфовой базой B существует расслоение η над той же базой, такое что $\xi \oplus \eta \cong \underline{\mathbb{R}}^N$ (тривиальное расслоение).*

Доказательство. Вложим пространство расслоения в тривиальное расслоение $\underline{\mathbb{R}}^N$, введём метрику на $\mathbb{R}^N$ и возьмём в качестве η расслоение, слоем которого над $x \in B$ является ортогональное дополнение в $\mathbb{R}^N$ к слою E_x расслоения ξ. □

8.2. **Касательное и нормальное расслоение.** Пусть M — n-мерное гладкое многообразие с гладким атласом $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \xrightarrow{\cong} V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ и гладкими отображениями замены координат $\psi_{\alpha\beta}\colon \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Касательное пространство $\mathcal{T}_x M$ состоит из всех касательных векторов к M в точке x. Объединение $\mathcal{T} M = \bigcup_{x \in M} \mathcal{T}_x M$ касательных пространств во всех точках является тотальным пространством n-мерного гладкого вещественного векторного расслоения над M, называемого *касательным расслоением*. Его можно определить как расслоение (31) над M с тривиализующим атласом $\{U_\alpha\}$ и функциями перехода

$$g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n,\mathbb{R}), \quad x \mapsto \operatorname{Jac}_x \psi_{\alpha\beta},$$

где $\operatorname{Jac}_x \psi_{\alpha\beta}$ обозначает матрицу Якоби из частных производных отображения замены координат в точке $x \in M$.

По определению, сечениями касательного расслоения $\mathcal{T}M$ являются векторные поля на M. Гладкое многообразие M называется *параллелизуемым*, если касательное расслоение $\mathcal{T}M$ тривиально, т. е. на M существует $n = \dim M$ векторных полей, которые линейно независимы в каждой точке $x \in M$.

Гладкое многообразие M называется *почти комплексным*, если в касательном расслоении $\mathcal{T}M$ можно ввести структуру комплексного векторного расслоения. Как и в случае векторных пространств, комплексная структура на вещественном расслоении $\mathcal{T}M$ задаётся выбором морфизма расслоений $I\colon \mathcal{T}M \to \mathcal{T}M$, такого что $I^2 = -\operatorname{id}_{\mathcal{T}M}$. Почти комплексное многообразие имеет чётную размерность. Если само M является комплексно-аналитическим многообразием с голоморфным атласом $M = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$, $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \xrightarrow{\cong} V_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ (и голоморфными отображениями замены координат), то касательное расслоение $\mathcal{T}M$ имеет естественную комплексную структуру. Однако не любая почти комплексная структура происходит из комплексной структуры на M.

Пусть M — гладкое подмногообразие в гладком многообразии N. *Нормальным расслоением* M в N называется фактор-расслоение $(\mathcal{T}N|_M)/\mathcal{T}M$, где $\mathcal{T}N|_M$ обозначает ограничение касательного расслоения к N на M. Нормальное расслоение обозначается $\nu(M \subset N)$. Введя риманову метрику на $\mathcal{T}N$, слой расслоения $\nu(M \subset N)$ в точке $x \in M$ можно отождествить с ортогональным дополнением к $\mathcal{T}_xM$ в $\mathcal{T}_xN$.

Опишем касательное расслоение к вещественному и комплексному проективному пространству. Наряду с одномерным тавтологическим расслоением γ (пример 8.2) рассмотрим его ортогональное дополнение $\gamma^\perp$, слоем которого над прямой $\ell \in \mathbb{C}P^n$ является ортогональное дополнение к этой прямой в $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$E\gamma^\perp = \{(\ell, v)\colon \ell \text{ — одномерное подпространство в } \mathbb{C}^{n+1},\ v \in \ell^\perp\}.$$

Тогда мы имеем $\gamma \oplus \gamma^\perp = \underline{\mathbb{C}}^{n+1}$.

Предложение 8.6. *$\mathcal{T}\mathbb{R}P^n \cong \operatorname{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$, $\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \cong \operatorname{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$.*

Доказательство. Рассмотрим единичную сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и проекцию $p\colon S^n \to \mathbb{R}P^n$, $p(x) = \pm x$. Касательное расслоение сферы есть

$$\mathcal{T}S^n = \{(x, v)\colon x, v \in \mathbb{R}^{n+1},\ |x| = 1,\ (x, v) = 0\}.$$

Дифференциал проекции $Dp\colon \mathcal{T}S^n \to \mathcal{T}\mathbb{R}P^n$ переводит касательный вектор (x, v) в касательный вектор $\pm(x, v)$ к $\mathbb{R}P^n$, где

$$\mathcal{T}\mathbb{R}P^n = \{\pm(x, v)\colon x, v \in \mathbb{R}^{n+1},\ |x| = 1,\ (x, v) = 0\}.$$

Тогда требуемый изоморфизм $\mathcal{T}\mathbb{R}P^n \cong \operatorname{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$ отображает $\pm(x, v) \in \mathcal{T}\mathbb{R}P^n$ в морфизм $\gamma \to \gamma^\perp$, переводящий (ℓ, x) в (ℓ, v), где $x \in \ell$, $v \in \ell^\perp$.

Изоморфизм $\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \cong \operatorname{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$ доказывается аналогично (задача). $\square$

Теорема 8.7. *Имеют место изоморфизмы*
$$\mathcal{T}\mathbb{R}P^n \oplus \underline{\mathbb{R}} \cong \underbrace{\gamma \oplus \ldots \oplus \gamma}_{n+1}, \quad \mathcal{T}\mathbb{C}P^n \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong \underbrace{\overline{\gamma} \oplus \ldots \oplus \overline{\gamma}}_{n+1}.$$

Доказательство. Имеем
$$\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong \operatorname{Hom}(\gamma, \gamma^\perp) \oplus \operatorname{Hom}(\gamma, \gamma) = \operatorname{Hom}(\gamma, \gamma^\perp \oplus \gamma) = \operatorname{Hom}(\gamma, \underline{\mathbb{C}}^{n+1}) \cong \underbrace{\overline{\gamma} \oplus \ldots \oplus \overline{\gamma}}_{n+1},$$
где во втором равенстве мы воспользовались тем, что одномерное расслоение $\operatorname{Hom}(\gamma, \gamma)$, имеет всюду ненулевое сечение, задаваемое тождественным морфизмом, и потому тривиально. □

8.3. **Многообразия Грассмана, вложение Плюккера и клетки Шуберта.** Множество всех k-мерных линейных подпространств (плоскостей) в $\mathbb{R}^N$ называется вещественным *многообразием Грассмана* (или *грассманианом*) и обозначается $G_k(\mathbb{R}^N)$. Аналогично определяется комплексное многообразие Грассмана $G_k(\mathbb{C}^N)$.

Подпространство $\pi \subset \mathbb{R}^N$ размерности k задаётся k-поливектором $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in \Lambda^k\mathbb{R}^N$ или, в координатной записи, классом эквивалентности $[P]$ матриц P размера $k \times N$ с точностью до умножения слева на матрицу из $GL(k, \mathbb{R})$ (в строках матрицы стоят координаты базисных векторов $v_1, \ldots, v_k$ подпространства π). Для набора индексов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant N$ будем обозначать через $\mathbb{R}_{i_1 \ldots i_k}$ соответствующее k-мерное координатное подпространство в $\mathbb{R}^N$ и через $p_{i_1 \ldots i_k}$ определитель подматрицы в P, образованной столбцами с номерами $i_1, \ldots, i_k$. Рассмотрим подмножество
$$\begin{aligned} U_{i_1 \ldots i_k} &= \{\pi \in G_k(\mathbb{R}^N) \colon \pi \text{ проектируется без вырожений на } \mathbb{R}_{i_1 \ldots i_k}\} = \\ &= \{[P] \colon p_{i_1 \ldots i_k} \neq 0\}. \end{aligned}$$
Тогда $U_{i_1 \ldots i_k}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{k(N-k)}$ (с координатами — элементами матрицы P вне столбцов с номерами $i_1, \ldots, i_k$) и атлас $\{U_{i_1 \ldots i_k}\}$ задаёт на $G_k(\mathbb{R}^N)$ структуру гладкого многообразия размерности $k(N-k)$.

В случае комплексного грассманиана атлас $\{U_{i_1 \ldots i_k}\}$ задаёт на $G_k(\mathbb{C}^N)$ структуру комплексно-аналитического многообразия комплексной размерности $k(N-k)$. Построения в вещественном и комплексном случае абсолютно аналогичны, далее в этом разделе будем рассматривать комплексный случай.

Набор из $C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$ чисел $\{p_{i_1 \ldots i_k}\}$ является координатами поливектора $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ в стандартном базисе $\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}\}$ внешней степени $\Lambda^k\mathbb{C}^N$ и называется *координатами Плюккера* k-мерной плоскости π. Они обобщают однородные координаты в проективном пространстве $\mathbb{C}P^{N-1} = G_1(\mathbb{C}^N)$ и удовлетворяют системе уравнений, называемых *соотношениями Плюккера.*

Теорема 8.8 (вложение и соотношения Плюккера)**.** *Отображение*
$$G_k(\mathbb{C}^N) \to \mathbb{C}P(\Lambda^k\mathbb{C}^N) = \mathbb{C}P^{C_N^k - 1}, \quad \pi \mapsto [v_1 \wedge \ldots \wedge v_k] = [\ldots : p_{i_1 \ldots i_k} : \ldots]$$
является вложением гладкого подмногообразия, а его образ задаётся соотношениями
$$\sum_{r=1}^{k+1} (-1)^r p_{i_1 \ldots i_{k-1} j_r} p_{j_1 \ldots \widehat{j_r} \ldots j_{k+1}} = 0$$
для любых наборов $(i_1, \ldots, i_{k-1})$ и $(j_1, \ldots, j_{k+1})$, где мы полагаем $p_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(k)}} = (-1)^\sigma p_{i_1 \ldots i_k}$ для любой перестановки σ.

Соотношения Плюккера доказываются в линейной алгебре, мы лишь приведём первый пример нетривиального соотношения.

Пример 8.9. Грассманиан $G_2(\mathbb{C}^4)$ вкладывается в $\mathbb{C}P(\Lambda^2\mathbb{C}^4) = \mathbb{C}P^5$ с однородными координатами $[p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}]$ как гиперповерхность, заданная квадратичным уравнением

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0,$$

которое получается, если положить $(i_1) = (1)$ и $(j_1, j_2, j_3) = (2, 3, 4)$ в теореме 8.8.

Опишем также клеточное разбиение многообразия Грассмана на клетки Шуберта.

Рассмотрим стандартный координатный флаг (последовательность вложенных подпространств) $\{0\} \subset \mathbb{C}^1 \subset \mathbb{C}^2 \subset \ldots \subset \mathbb{C}^N$. Для k-мерной плоскости $\pi \in G_k(\mathbb{C}^N)$ рассмотрим последовательность

$$0 \leqslant \dim(\pi \cap \mathbb{C}^1) \leqslant \dim(\pi \cap \mathbb{C}^2) \leqslant \ldots \leqslant \dim(\pi \cap \mathbb{C}^N) = k.$$

Два соседних члена этой последовательности отличаются не более чем на 1, т. е. в последовательности есть в точности k «скачков». Эти скачки задаются *символами Шуберта*

$$\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_k), \quad 1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_k \leqslant N, \quad \dim(\pi \cap \mathbb{C}^{s_i}) = i,\ \dim(\pi \cap \mathbb{C}^{s_i - 1}) = i - 1.$$

Рассмотрим множество k-плоскостей, «скачки» которых задаются в точности символом $\boldsymbol{s}$:

$$e(\boldsymbol{s}) = \{\pi \in G_k(\mathbb{C}^N)\colon \dim(\pi \cap \mathbb{C}^{s_i}) = i,\ \dim(\pi \cap \mathbb{C}^{s_i - 1}) = i - 1 \text{ для } i = 1, 2 \ldots, k\}.$$

Тогда $e(\boldsymbol{s})$ называется *клеткой Шуберта*. Очевидно,

$$G_k(\mathbb{C}^N) = \bigcup_{\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_k)} e(\boldsymbol{s}), \quad \text{причём } e(\boldsymbol{s}) \cap e(\boldsymbol{s}') = \varnothing \text{ при } \boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{s}'.$$

Легко видеть, что $\pi \in e(\boldsymbol{s})$ тогда и только тогда, когда плоскость π задаётся матрицей

$$P = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots & & & & \cdots & & & & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\ * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

где 1 в i-й строке стоит на s_i-м месте, а на позициях, обозначенных $*$, стоят произвольные числа. Такой вид матрицы, задающей плоскость $\pi \in e(\boldsymbol{s})$, определён однозначно с точностью до умножения слева на квадратную нижнетреугольную матрицу с 1 на диагонали. Отсюда следует, что $e(\boldsymbol{s})$ гомеоморфно открытому шару размерности

$$\dim e(\boldsymbol{s}) = 2((s_1 - 1) + (s_2 - 2) + \ldots + (s_k - k)).$$

Введём частичный порядок на символах Шуберта: $\boldsymbol{s}' \leqslant \boldsymbol{s}$, если $s_i' \leqslant s_i$ для каждого $i = 1, \ldots, k$. Доказательство следующего утверждения мы опустим (см. [MC] или [Ha]).

Теорема 8.10 (клеточное разбиение Шуберта)**.** *Клетки Шуберта $e(\boldsymbol{s})$, соответствующие всевозможным символам $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_k)$, $1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_k \leqslant N$, задают клеточное разбиение многообразия Грассмана $G_k(\mathbb{C}^N)$. При этом замыкание клетки $e(\boldsymbol{s})$ содержится в объединении клеток $e(\boldsymbol{s}')$ с $\boldsymbol{s}' \leqslant \boldsymbol{s}$.*

Имеем вложение грассманианов $G_k(\mathbb{C}^N) \subset G_k(\mathbb{C}^{N+1})$, соответствующее вложению $\mathbb{C}^N \subset \mathbb{C}^{N+1}$ по первым N координатам.

Предложение 8.11. $G_k(\mathbb{C}^N) \subset G_k(\mathbb{C}^{N+1})$ *является клеточным подпространством относительно разбиения на клетки Шуберта. При этом каждая клетка Шуберта размерности* $\leqslant 2(N-k)$ *в* $G_k(\mathbb{C}^{N+1})$ *лежит в* $G_k(\mathbb{C}^N)$.

Доказательство. Рассмотрим клетку $e(\boldsymbol{s}) \subset G_k(\mathbb{C}^{N+1})$, где $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_k)$, $1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_k \leqslant N+1$. Ясно, что $e(\boldsymbol{s}) \subset G_k(\mathbb{C}^N)$ тогда и только тогда, когда $s_k \leqslant N$. Поэтому $G_k(\mathbb{C}^N) \subset G_k(\mathbb{C}^{N+1})$ — замкнутое подмножество, представляющее собой объединение клеток, т. е. клеточное подпространство. Если $e(\boldsymbol{s}) \not\subset G_k(\mathbb{C}^N)$, то $s_k = N+1$ и, следовательно,

$$\dim e(\boldsymbol{s}) = 2((s_1-1)+(s_2-2)+\ldots+(s_k-k)) \geqslant 2(s_k-k) > 2(N-k). \qquad \square$$

Разбиением целого числа $d \geqslant 0$ называется неупорядоченное множество $\omega = (i_1, \ldots, i_p)$ натуральных чисел, таких что $i_1 + \ldots + i_p = d$.

Предложение 8.12. *Число клеток размерности* $2d$ *в разбиении Шуберта грассманиана* $G_k(\mathbb{C}^N)$ *равно числу разбиений числа* d *на не более чем* k *слагаемых, каждое из которых не превосходит* $N-k$.

Доказательство. Клетки размерности $2d$ соответствуют символам Шуберта $\boldsymbol{s}$, таким что $d = (s_1-1)+(s_2-2)+\ldots+(s_k-k)$. Рассмотрим множество $\omega = (i_1, \ldots, i_p)$, получаемое удалением нулей из последовательности $s_1-1, s_2-2, \ldots, s_k-k$. Тогда $i_1+\ldots+i_p = d$, т. е. ω — разбиение d на не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит $N-k$, так как $s_k \leqslant N$. Обратно, каждое такое разбиение задаёт символ $\boldsymbol{s}$ (надо упорядочить $(i_1, \ldots, i_p)$ по неубыванию, дописать слева $k-p$ нулей и к каждому члену полученной последовательности прибавить его номер). $\square$

8.4. **Классификация векторных расслоений.** *Бесконечномерным грассманианом* $G_k = G_k(\mathbb{R}^\infty)$ называется множество всех k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_N \mathbb{R}^N$. Каждое k-мерное подпространство в $\mathbb{R}^\infty$ лежит в некотором $\mathbb{R}^N$, так что $G_k = \bigcup_N G_k(\mathbb{R}^N)$. На G_k вводится *слабая топология*: подмножество $A \subset G_k$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуты пересечения $A \cap G_k(\mathbb{R}^N)$ для всех N.

Теорема 8.13. *Клетки* $e(\boldsymbol{s})$, *соответствующие символам Шуберта* $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_k)$, *где* $1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_k$, *задают клеточное разбиение бесконечномерного грассманиана* G_k. *Число клеток размерности* d *равно числу разбиений числа* d *на не более чем* k *слагаемых.*

Доказательство. Это следует из теоремы 8.10 и предложений 8.11 и 8.12. $\square$

Пример 8.14. *Тавтологическое расслоение* над грассманианом $G_k(\mathbb{R}^N)$ — это k-мерное векторное расслоение $\gamma^k = \gamma^k_{N,\mathbb{R}}$, слоем которого над $\pi \in G_k(\mathbb{R}^N)$ является k-плоскость π. Пространство тавтологического расслоения γ^k есть

$$E_k = \{(\pi, v)\colon \pi \text{ — } k\text{-мерное подпространство в } \mathbb{R}^N,\ v \in \pi\}.$$

Также определено тавтологическое расслоение γ^k над $G_k = G_k(\mathbb{R}^\infty)$.

Тавтологическое расслоение γ^k лежит в основе классификационной теоремы.

Теорема 8.15. *Пусть* B *— хаусдорфово паракомпактное пространство (например, клеточное). Тогда* а) *любое k-мерное векторное расслоение ξ над B изоморфно расслоению, индуцированному из тавтологического расслоения γ^k при помощи некоторого отображения $f\colon B \to G_k$, т. е. $\xi \cong f^*\gamma^k$;*

б) *индуцированные расслоения $f_0^*\gamma^k$ и $f_1^*\gamma^k$ изоморфны тогда и только тогда, когда отображения $f_0\colon B \to G_k$ и $f_1\colon B \to G_k$ гомотопны.*

Таким образом, множество $\mathrm{Vect}^k(B)$ классов изоморфизма k-мерных векторных расслоений над B находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $[B, G_k]$ классов гомотопных отображений $B \to G_k$.

Доказательство. Мы опустим некоторые детали доказательства; подробности можно найти в [Ми] или [Ha, Ch. 1].

Пусть расслоение ξ задаётся проекцией $p\colon E \to B$, а тавтологическое расслоение γ^k — проекцией $p_k\colon E_k \to G_k$. Прежде всего заметим, что построение изоморфизма $\xi \cong f^*\gamma^k$ эквивалентно построению отображения $g\colon E \to \mathbb{R}^\infty$, ограничение которого на каждый слой является линейным мономорфизмом. Действительно, если $\xi \cong f^*\gamma^k$, то отображение g задаётся композицией $E \cong f^*E_k \to E_k \to \mathbb{R}^\infty$, где последнее отображение есть $(\pi, v) \mapsto v$. Обратно, если дано $g\colon E \to \mathbb{R}^\infty$, то зададим $f\colon B \to G_k$ по формуле $f(x) = g(E_x)$.

Вначале докажем а) в случае, когда база B компактна. Тогда существует вложение $j\colon E \hookrightarrow B \times \mathbb{R}^N$ в тривиальное расслоение (предложение 8.3). Композиция с проекцией $B \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ даёт требуемое отображение $g\colon E \to \mathbb{R}^N \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$. В общем случае рассуждение аналогично доказательству предложения 8.3 и использует разбиение единицы. Существует счётное покрытие $B = \bigcup_{i=1}^\infty U_i$ открытыми множествами, над которыми расслоение ξ тривиально, и разбиение единицы $\{f_i\}$, подчинённое этому покрытию. Последнее означает, что функция $f_i\colon B \to \mathbb{R}$ непрерывна, её носитель содержится в U_i, в каждой точке $x \in B$ лишь конечное число f_i отлично от нуля и $\sum_i f_i = 1$. (Существование разбиения единицы следует из того, что клеточные пространства паракомпактны.) Для каждого i определим $h_i\colon p^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}^n$ как композицию тривиализации $\varphi_i\colon p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{R}^n$ и проекции. Далее определим

$$g_i\colon E \to \mathbb{R}^n, \quad e \mapsto \begin{cases} f_i(p(e)) \cdot h_i(e) & \text{при } e \in p^{-1}(U_i), \\ 0 & \text{при } e \notin p^{-1}(U_i). \end{cases}$$

Отождествим $\mathbb{R}^\infty$ с $\bigoplus_{i=1}^\infty \mathbb{R}^n$. Тогда требуемое отображение $g\colon E \to \mathbb{R}^\infty$ задаётся формулой $g(e) = (g_1(e), \ldots, g_i(e), \ldots)$.

Теперь докажем б). Пусть $f_0^*E_k \cong f_1^*E_k \cong E$, изоморфизм $f_0^*E_k \cong E$ задаётся отображением $g_0\colon E \to \mathbb{R}^\infty$, а изоморфизм $f_1^*E_k \cong E$ задаётся отображением $g_1\colon E \to \mathbb{R}^\infty$. Чтобы построить гомотопию $f_t\colon B \to G_k$, $t \in [0,1]$, между f_0 и f_1 достаточно построить гомотопию $g_t\colon E \to \mathbb{R}^\infty$ между g_0 и g_1, такую что каждое g_t мономорфно на слоях; тогда $f_t(x) = g_t(E_x)$ даёт требуемую гомотопию.

Рассмотрим готомотопию $L_t\colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$, $L_t(r_1, r_2, \ldots) = (1-t)(r_1, r_2, \ldots) + t(r_1, 0, r_2, 0, \ldots)$. Тогда каждое L_t линейно, $L_0 = \mathrm{id}$, а L_1 «прореживает» координаты, так что на чётных местах стоят нули. Композиция с L_t задаёт гомотопию между g_0 и отображением $g_0' = L_1 \circ g_0$, которое имеет ненулевые координаты только на нечётных местах. Аналогично строим гомотопию между g_1 и отображением $g_1'\colon E \to \mathbb{R}^\infty$, которое имеет ненулевые координаты только на чётных местах. Теперь $g_t' = (1-t)g_0' + tg_1'$ есть гомотопия между g_0' и g_1'. В результате получаем последовательность гомотопий

$g_0 \simeq g_0' \simeq g_1' \simeq g_1$, где каждое промежуточное отображение $E \to \mathbb{R}^\infty$ мономорфно на слоях. Следовательно, $f_0 \simeq f_1$.

Теперь пусть $f_0 \simeq f_1$ при помощи гомотопии $F\colon B \times I \to G_k$. Рассмотрим индуцированное расслоение $F^*\gamma^k$ над $B \times I$. Его ограничения на $B \times \{0\}$ и $B \times \{1\}$ изоморфны (доказательство этого факта — задача). Первое ограничение есть $f_0^*\gamma^k$, а второе — $f_1^*\gamma_k$. □

Ввиду теоремы 8.15 тавтологическое расслоение γ^k также называется *универсальным* k-мерным векторным расслоением, а его база $G_k = G_k(\mathbb{R}^\infty)$ называется *классифицирующим пространством* k-мерных вещественных векторных расслоений и обозначается $BO(n)$. Говорят, что отображение $f\colon B \to G_k$, для которого $\xi \cong f^*\gamma^k$, *классифицирует* расслоение ξ.

Теорема 8.15 также имеет место для комплексных векторных расслоений. Бесконечномерный комплексный грассманиан $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ называется *классифицирующим пространством* k-мерных комплексных векторных расслоений и обозначается $BU(n)$.

Задачи и упражнения.

8.16. Приведите пример локально тривиального расслоения $p\colon E \to B$ со слоем $\mathbb{R}^n$, не являющегося векторным.

8.17. При помощи эрмитовой метрики установите канонический изоморфизм $\xi^* \cong \overline{\xi}$ между двойственным комплексным расслонием $\xi^* = \mathrm{Hom}(\xi, \underline{\mathbb{C}})$ и комплексно сопряжённым расслоением $\overline{\xi}$.

8.18. Докажите, что пространство тавтологического расслоения $\gamma^1_{1,\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}P^1$ гомеоморфно открытой ленте Мёбиуса (проективной плоскости с выколотой точкой).

8.19. Докажите, что тавтологическое расслоение $\gamma^1_{n,\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}P^n$ нетривиально при $n \geqslant 1$.

8.20. Задайте явно отображения перехода $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$ тавтологического расслоения $\gamma^1_{n,\mathbb{C}}$ для покрытия $\mathbb{C}P^n$ стандартными аффинными картами.

8.21. Пусть для открытого покрытия $B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ даны два набора отображений перехода $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n, \mathbb{R})$ и $g'_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n, \mathbb{R})$, удовлетворяющие условиям (30). Докажите, что задаваемые ими векторные расслоения ξ и ξ' изоморфны тогда и только тогда, когда существует набор отображений $f_\alpha\colon U_\alpha \to GL(n, \mathbb{R})$, $\alpha \in A$, удовлетворяющий соотношениям $g'_{\alpha\beta}(x) = f_\alpha(x) g_{\alpha\beta}(x) f_\beta^{-1}(x)$ для любого $x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

8.22. Докажите, что

а) на сфере S^{2n+1} существует векторное поле без нулей;
б) на сфере S^{11} существуют три линейно независимых векторных поля без нулей;
в) сфера S^{2n} не параллелизуема при $n \geqslant 1$.

8.23. Пусть $\mathcal{V}(B)$ — категория векторных расслоений и морфизмов над компактным хаусдорфовым пространством B. Докажите, что

а) пространство сечений $\Gamma(\xi)$ векторного расслоения ξ является конечно порождённым проективным модулем над кольцом $C(B)$ непрерывных функций на B (модуль называется проективным, если он является прямым слагаемым свободного модуля);

б) категория $\mathcal{V}(B)$ эквивалентна категории конечно порождённых проективных модулей над $C(B)$, при этом тривиальные расслоения соответствуют свободным модулям (это утверждение известно как *теорема Свана*).

8.24. Докажите изоморфизм $\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$.

8.25. Докажите изоморфизм $\mathcal{T}G_k(\mathbb{R}^N) \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$, где $\gamma = \gamma^k_{N,\mathbb{R}}$ — тавтологическое расслоение над грассманианом $G_k(\mathbb{R}^N)$, а $\gamma^\perp$ — его ортогональное дополнение. Аналогично, $\mathcal{T}G_k(\mathbb{C}^N) \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$ для комплексного грассманиана.

8.26. Докажите, что если B компактно и хаусдорфово, то ограничения векторного расслоения $E \to B \times I$ на $B \times \{0\}$ и $B \times \{1\}$ изоморфны (это также верно и в более общем случае паракомпактного и хаусдорфового B).

9. Характеристические классы Штифеля–Уитни и Чженя

Мы изложим два подхода к определению характеристических классов векторных расслоений. Первый основан на вычислении когомологий проективизации векторного расслоения; этот подход по-видимому является наиболее универсальным и применим также и для других теорий когомологий. Второй подход основан на непосредственном вычислении кольца когомологий классифицирующих пространств — бесконечномерных грассманианов.

9.1. **Теорема Лере–Хирша.** Для любого отображения $p\colon E \to B$ кольцо когомологий $H^*(E)$ является модулем над кольцом $H^*(B)$ по формуле $b \cdot e = p^*(b) \smile e$ для $b \in H^*(B)$, $e \in H^*(E)$.

Следующая теорема позволяет при некоторых условиях вычислять когомологии тотального пространства локально тривиально расслоения через когомологии базы.

Теорема 9.1 (Лере–Хирш)**.** *Пусть $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ — локально тривиальное расслоение и R — коммутативное кольцо с единицей. Предположим, что*

1) *$H^k(F;R)$ — конечно-порождённый свободный R-модуль для любого k;*
2) *существуют классы $v_j \in H^*(E;R)$, такие что их ограничения $i^*(v_j)$ на любой слой F дают R-базис в $H^*(F;R)$.*

Тогда $H^*(E;R)$ является свободным $H^*(B;R)$-модулем с базисом $\{v_j\}$, т. е. отображение

$$\varPhi_E\colon H^*(B;R) \otimes_R H^*(F;R) \to H^*(E;R), \quad b \otimes i^*(v_j) \mapsto p^*(b) \smile v_j,$$

является изоморфизмом R-модулей.

Доказательство. Мы докажем теорему в предположении, что B — клеточное пространство, этого будет достаточно для наших целей. Предположим вначале, что B конечномерно, $\dim B = n$. Утверждение очевидно при $n = 0$, так что можно предположить по индукции, что утверждение верно для $(n-1)$-мерного остова B^{n-1}.

Пусть $B' \subset B$ — подпространство, полученное удалением точки x_α из каждой n-мерной клетки $e^n_\alpha \subset B$. Тогда существует гомотопическая эквивалентность (деформационная ретракция) $B' \xrightarrow{\simeq} B^{n-1}$. Из свойства поднятия гомотопии для расслоения

$E' \to B'$ получаем гомотопическую эквивалентность $E' \xrightarrow{\simeq} p^{-1}(B^{n-1})$. Теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H^*(B,B') \otimes_R H^*(F) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_{E,E'}"] & H^*(B) \otimes_R H^*(F) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_E"] & H^*(B') \otimes_R H^*(F) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_{E'}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H^*(E,E') \arrow[r] & H^*(E) \arrow[r] & H^*(E') \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Здесь нижняя строка — точная последовательность пары (E, E'), а верхняя строка получается из точной последовательности пары (B, B') тензорным умножением на свободный R-модуль $H^*(F)$. Коммутативность двух квадратов, показанных на диаграмме, следует из естественности входящих в них гомоморфизмов. Коммутативность квадрата, включающего кограничные гомоморфизмы, проверяется непосредственно:

$$\begin{tikzcd}
b' \otimes i^*(v_j) \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & db' \otimes i^*(v_j) \arrow[d, mapsto] \\
p^*(b') \smile v_j \arrow[r, mapsto] & d(p^*(b') \smile v_j) \arrow[r, equal] & p^*(db') \smile v_j,
\end{tikzcd}$$

так как $dv_j = 0$.

Так как имеют место гомотопические эквивалентности $B' \simeq B^{n-1}$ и $E' \simeq p^{-1}(B^{n-1})$, отображение $\Phi_{E'}$ в диаграмме выше является изоморфизмом по предположению индукции. Докажем, что $\Phi_{E,E'}$ также является изоморфизмом. Для каждой выбранной точки x_α выберем открытое множество U_α, такое что $x_\alpha \subset U_\alpha \subset e^n_\alpha$ и ограничение расслоения $p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha$ тривиально. Положим $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ и $U' = U \cap B'$. Мы имеем $H^*(B,B') \cong H^*(U,U')$ в силу вырезания и, аналогично, $H^*(E,E') \cong H^*(p^{-1}(U), p^{-1}(U')) \cong H^*(U \times F, U' \times F)$. Тогда отображение $\Phi_{E,E'}$ принимает вид

$$\Phi_{E,E'} \colon H^*(U,U') \otimes_R H^*(F) \to H^*(U \times F, U' \times F).$$

Это изоморфизм согласно формуле Кюннета (относительная версия теоремы 6.9). Теперь тот факт, что Φ_E является изоморфизмом (для конечного клеточного B) вытекает из 5-леммы, примененной к диаграмме выше.

В случае произвольного клеточного B рассмотрим n-мерный остов и диграмму

$$\begin{tikzcd}
H^*(B) \otimes_R H^*(F) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"] & H^*(B_n) \otimes_R H^*(F) \arrow[d, "\Phi_n"] \\
H^*(E) \arrow[r] & H^*(p^{-1}(B_n)).
\end{tikzcd}$$

Здесь горизонтальные отображения являются изоморфизмами в размерностях меньше n, а отображение Φ_n является изоморфизмом согласно конечномерному случаю. Следовательно, Φ является изоморфизмом в размерностях меньше n. Так как это верно для любого n, доказательство для клеточного B завершено. □

9.2. **Определение и свойства характеристических классов.** Пусть ξ — вещественное n-мерное векторное расслоение $p\colon E \to B$. Его *проективизацией* называется множество $\mathbb{R}P(\xi) = \{\ell \in E_x\}$ всех одномерных подпространств во всех слоях расслоения ξ. Имеется проекция $\mathbb{R}P(p)\colon \mathbb{R}P(\xi) \to B$, переводящая $\ell \in E_x$ в x. Слоем этой проекции над $x \in B$ является проективное пространство слоя E_x. Множество $\mathbb{R}P(\xi)$

отождествляется с факторпространством дополнения до нулевого сечения в E, тем самым на нём вводится топология. Тривиализации $p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ расслоения ξ определяют тривиализации $\mathbb{R}P(p)^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}P^{n-1}$ и тем самым задают на $\mathbb{R}P(\xi)$ структуру локально тривиального расслоения над B со слоем $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Над $\mathbb{R}P(\xi)$ определено *тавтологическое* одномерное расслоение $\gamma(\xi)$, слоем которого над $\ell \in E_x$ является прямая ℓ (если $B = pt$, то $\gamma(\xi)$ превращается в тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^{n-1}$).

В силу теоремы 8.15 тавтологическое расслоение $\gamma(\xi)$ классифицируется некоторым отображением $f\colon \mathbb{R}P(\xi) \to \mathbb{R}P^\infty$, т. е. $\gamma(\xi) = f^*(\gamma^1_\mathbb{R})$, где $\gamma^1_\mathbb{R}$ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^\infty$. Мы имеем $H^*(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[v]$, где $v \in H^1(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}_2)$ — образующая, см. предложение 6.11. Таким образом, с расслоением ξ естественным образом связан класс когомологий $v_\xi = f^*(v) \in H^1(\mathbb{R}P(\xi);\mathbb{Z}_2)$.

Теорема 9.2. *Пусть ξ — вещественное n-мерное векторное расслоение над клеточным пространством B. Тогда кольцо когомологий $H^*(\mathbb{R}P(\xi);\mathbb{Z}_2)$ изоморфно факторкольцу кольца многочленов с коэффициентами в $H^*(B;\mathbb{Z}_2)$ от одной образующей $v_\xi \in H^1(\mathbb{R}P(\xi);\mathbb{Z}_2)$ по единственному соотношению*

$$v_\xi^n + w_1(\xi)\cdot v_\xi^{n-1} + \ldots + w_{n-1}(\xi)\cdot v_\xi + w_n(\xi)\cdot 1 = 0, \tag{32}$$

где классы $w_i(\xi) \in H^i(B;\mathbb{Z}_2)$, $i = 1,\ldots,n$, определяются расслоением ξ.

Доказательство. Применим теорему Лере–Хирша (теорему 9.1) к расслоению $\mathbb{R}P(\xi)$ над B со слоем $\mathbb{R}P^{n-1}$. Первое условие теоремы выполнено автоматически, а для проверки второго условия заметим следующее. Как видно из доказательства теоремы 8.15, классифицирующее отображение $f\colon \mathbb{R}P(\xi) \to \mathbb{R}P^\infty$ расслоения $\gamma(\xi)$ задаётся отображением $g\colon E\mathbb{R}P(\xi) \to \mathbb{R}^\infty$, которое линейно на слоях. Поэтому ограничение отображения f на слой расслоения $\mathbb{R}P(\xi)$ есть стандартное вложение $\mathbb{R}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}P^\infty$. Если $i\colon \mathbb{R}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}P(\xi)$ — вложение слоя, то $i^*(v_\xi) = i^*(f^*(v)) = v$ — образующая группы $H^1(\mathbb{R}P^{n-1};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Тогда $i^*(v_\xi^j) = v^j$ — образующая группы $H^j(\mathbb{R}P^{n-1};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ для $j = 1,\ldots,n-1$.

Из теоремы 9.1 следует, что $H^*(\mathbb{R}P(\xi);\mathbb{Z}_2)$ является свободным модулем над $H^*(B;\mathbb{Z}_2)$ с образующими $1, v_\xi, \ldots, v_\xi^{n-1}$. Соотношение (32) — это разложение элемента $-v_\xi^n$ по базису $1, v_\xi, \ldots, v_\xi^{n-1}$, а классы $w_i(\xi)$ — коэффициенты в разложении. ☐

Классы $w_i(\xi) \in H^i(B;\mathbb{Z}_2)$, $i = 1,\ldots,n$, задаваемые соотношением (32), называются *характеристическими классами Штифеля–Уитни* n-мерного вещественного векторного расслоения ξ. Также формально положим $w_0(\xi) = 1$.

Аналогично определяется комплексная проективизация $\mathbb{C}P(\xi)$ комплексного n-мерного векторного расслоения ξ, состоящая из всех комплексных одномерных подпространств в слоях. Над $\mathbb{C}P(\xi)$ определено тавтологическое одномерное расслоение $\gamma(\xi)$, которое классифицируется отображением $f\colon B \to \mathbb{C}P^\infty$. Мы имеем $H^*(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[v]$, но, в отличие от вещественного случая, образующая $v \in H^2(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z})$ определена неоднозначно (имеется две образующие, отличающиеся знаком). Выбор этой образующей определяет вид многих последующих формул. Мы возьмём в качестве образующей $v \in H^2(\mathbb{C}P^N)$ класс когомологий, двойственный по Пуанкаре к гиперплоскости $\mathbb{C}P^{N-1} \subset \mathbb{C}P^N$ с канонической ориентацией, происходящей из комплексной структуры. В качестве образующей $v \in H^2(\mathbb{C}P^\infty)$ мы выберем ту, которая ограничивается на $v \in H^2(\mathbb{C}P^N)$ при отображении когомологий, индуцированном вложением $\mathbb{C}P^N \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Таким образом, с комплексным расслоением ξ естественным образом связан класс когомологий $v_\xi = f^*(v) \in H^2(\mathbb{C}P(\xi);\mathbb{Z})$.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 9.2.

Теорема 9.3. *Пусть ξ — комплексное n-мерное векторное расслоение над клеточным пространством B. Тогда кольцо $H^*(\mathbb{C}P(\xi);\mathbb{Z})$ изоморфно факторкольцу кольца многочленов с коэффициентами в $H^*(B;\mathbb{Z})$ от одной образующей $v_\xi \in H^2(\mathbb{C}P(\xi);\mathbb{Z})$ по единственному соотношению*

$$v_\xi^n + c_1(\xi) \cdot v_\xi^{n-1} + \ldots + c_{n-1}(\xi) \cdot v_\xi + c_n(\xi) \cdot 1 = 0, \tag{33}$$

где классы $c_i(\xi) \in H^{2i}(B;\mathbb{Z})$, $i = 1, \ldots, n$, определяются расслоением ξ.

Классы $c_i(\xi) \in H^{2i}(B;\mathbb{Z})$, $i = 1, \ldots, n$, задаваемые соотношением (33), называются *характеристическими классами Чженя* n-мерного комплексного векторного расслоения ξ. Также формально положим $c_0(\xi) = 1$.

Свойства характеристических классов Штифеля–Уитни и Чженя описываются следующей теоремой (которую мы сформулируем для классов Чженя; формулировка и доказательство для классов Штифеля–Уитни абсолютно аналогичны).

Теорема 9.4. *Имеем*

а) $c_i(\xi) = 0$, *если* $i > \dim \xi$;
б) $c_i(f^*\xi) = f^*c_i(\xi)$, *где* $f^*\xi$ — *расслоение, индуцированное отображением* $f\colon B' \to B$;
в) $c_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j+k=i} c_j(\xi)c_k(\eta)$ *(формула Уитни);*
г) $c_1(\gamma^1) = -v$ *для тавтологического расслоения* γ^1 *над* $\mathbb{C}P^n$.

Доказательство. Свойство а) следует из определения.

Для доказательства б) сначала заметим, что если $\overline{f}\colon \mathbb{C}P(f^*\xi) \to \mathbb{C}P(\xi)$ — отображение проективизаций, индуцированное отображением $f\colon B' \to B$, то $v_{f^*\xi} = \overline{f}^*(v_\xi)$ по определению класса $v_\xi \in H^2(\mathbb{C}P(\xi))$. Запишем (33) для расслоения $f^*\xi$:

$$0 = v_{f^*\xi}^n + c_1(f^*\xi) \cdot v_{f^*\xi}^{n-1} + \ldots + c_n(f^*\xi) \cdot 1 = 0.$$

С другой стороны, применив $\overline{f}^*$ к (33) для ξ, получим

$$0 = \overline{f}^*(v_\xi^n + c_1(\xi) \cdot v_\xi^{n-1} + \ldots + c_n(\xi) \cdot 1) = v_{f^*\xi}^n + f^*c_1(\xi) \cdot v_{f^*\xi}^{n-1} + \ldots + f^*c_n(\xi) \cdot 1.$$

Так как $1, v_{f^*\xi}, \ldots, v_{f^*\xi}^{n-1}$ — базис свободного $H^*(B')$-модуля $H^*(\mathbb{C}P(f^*\xi))$, из сравнения коэффициентов в последних двух формулах получаем $c_i(f^*\xi) = f^*c_i(\xi)$.

Докажем в). Пусть $\dim \xi = n$, $\dim \eta = m$. Рассмотрим вложения $i_\xi\colon \mathbb{C}P(\xi) \hookrightarrow \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)$ и $i_\eta\colon \mathbb{C}P(\eta) \hookrightarrow \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)$, индуцированные вложением прямых слагаемых в $\xi \oplus \eta$. При этих вложениях тавтологические расслоения над проективизациями ограничиваются друг на друга: $i_\xi^*\gamma(\xi \oplus \eta) = \gamma(\xi)$, $i_\eta^*\gamma(\xi \oplus \eta) = \gamma(\eta)$. Следовательно, $i_\xi^* v_{\xi\oplus\eta} = v_\xi$, $i_\eta^* v_{\xi\oplus\eta} = v_\eta$.

Имеем деформационные ретракции

$$U = \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta) \setminus \mathbb{C}P(\xi) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}P(\eta), \quad V = \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta) \setminus \mathbb{C}P(\eta) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}P(\xi),$$

которые задаются послойно как ретракции $\mathbb{C}P^{m+n-1} \setminus \mathbb{C}P^{m-1} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}P^{n-1}$ из доказательства предложения 6.11.

Теперь рассмотрим следующее соотношение в $H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta))$:

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{m+n}\Bigl(\sum_{j+k=i} c_j(\xi)c_k(\eta)\cdot v_{\xi\oplus\eta}^{m+n-i}\Bigr)}_{a} = \underbrace{\Bigl(\sum_{j=0}^{n} c_j(\xi)\cdot v_{\xi\oplus\eta}^{n-j}\Bigr)}_{a_1}\ \underbrace{\Bigl(\sum_{k=0}^{m} c_k(\eta)\cdot v_{\xi\oplus\eta}^{m-k}\Bigr)}_{a_2}.$$

Рассмотрим фрагмент точной последовательности пары $(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta), V)$:

$$\begin{array}{ccccc} H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta), V) & \longrightarrow & H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta)) & \xrightarrow{i_\xi^*} & H^*(V)\cong H^*(\mathbb{C}P(\xi)) \\ \widetilde{a}_1 & \mapsto & a_1 & \mapsto & 0 \end{array}$$

Мы имеем $i_\xi^*(a_1)=\sum_{j=0}^{n} c_j(\xi)\cdot v_\xi^{n-j}=0$ в силу (33). Поэтому элемент a_1 накрывается элементом $\widetilde{a}_1\in H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta), V)$. Аналогично, для пары $(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta), U)$ получаем

$$\begin{array}{ccccc} H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta), U) & \longrightarrow & H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta)) & \xrightarrow{i_\eta^*} & H^*(U)\cong H^*(\mathbb{C}P(\eta)) \\ \widetilde{a}_2 & \mapsto & a_2 & \mapsto & 0 \end{array}$$

Из естественности когомологического произведения получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta), U)\times H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta), V) & \xrightarrow{\smile} & H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta), U\cup V) & & \widetilde{a}_1\widetilde{a}_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta))\times H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta)) & \xrightarrow{\smile} & H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta)) & & a_1a_2 \end{array}$$

где верхнее отображение — относительное когомологическое произведение (17). Но $U\cup V=\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta)$, поэтому $H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta), U\cup V)=0$. Следовательно, $\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2=0$, а значит и $a=a_1a_2=0$. С другой стороны, соотношение (33) для $\xi\oplus\eta$ даёт

$$\sum_{i=0}^{m+n} c_i(\xi\oplus\eta)\cdot v_{\xi\oplus\eta}^{m+n-i}=0.$$

Сравнивая коэффициент при $v_{\xi\oplus\eta}^{m+n-i}$ в этом соотношении с тем же коэффициентом в соотношении $a=0$, с учётом того, что $1, v_{\xi\oplus\eta},\dots,v_{\xi\oplus\eta}^{m+n-1}$ — базис, получаем $c_i(\xi\oplus\eta)=\sum_{j+k=i} c_j(\xi)c_k(\eta)$.

Для доказательства г) заметим, что $\mathbb{C}P(\gamma^1)\to\mathbb{C}P^n$ — тождественное отображение, так как γ^1 одномерно. Поэтому $v_{\gamma^1}=v\in H^2(\mathbb{C}P^n)$ — выбранная образующая, и соотношение (33) принимает вид $v+c_1(\gamma^1)=0$. □

Полным классом Чженя комплексного n-мерного расслоения ξ называется (неоднородный) элемент

$$c(\xi)=1+c_1(\xi)+\ldots+c_n(\xi)\in H^*(B).$$

Формулу Уитни из теоремы 9.4 в) можно записать в виде

$$c(\xi\oplus\eta)=c(\xi)c(\eta).$$

Расслоения ξ и η называются *стабильно эквивалентными*, если $\xi\oplus\underline{\mathbb{C}}^k\cong\eta\oplus\underline{\mathbb{C}}^l$ для некоторых k,l. В частности, ξ называется *стабильно тривиальным*, если $\xi\oplus\underline{\mathbb{C}}^k\cong\underline{\mathbb{C}}^l$.

Предложение 9.5. *Если ξ и η стабильно эквивалентны, то $c(\xi)=c(\eta)$. В частности, если ξ стабильно тривиально, то $c(\xi)=1$.*

Доказательство. Заметим, что если $\xi \cong \underline{\mathbb{C}}^k$ (тривиально), то $c(\xi) = 1$. Это следует из того, что тривиальное расслоение над B классифицируется отображением $B \to pt$ и утверждения б) теоремы 9.4. Теперь предложение следует из формулы Уитни. $\square$

Предложение 9.6. *Пусть ξ и η — одномерные комплексные расслоения над B. Тогда*

$$c_1(\xi \otimes \eta) = c_1(\xi) + c_1(\eta).$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $B = \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$, $\xi = p_1^*\gamma$, $\eta = p_2^*\gamma$, где γ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P^\infty$, $p_1, p_2 \colon \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$ — проекции. Мы имеем $H^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}[v_1, v_2]$ и $c_1(\xi \otimes \eta) = k_1 v_1 + k_2 v_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Для вложения $i_1 \colon \mathbb{C}P^\infty \times pt \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$ имеем $i_1^*(\xi \otimes \eta) = \gamma$. Следовательно, $i_1^*(c_1(\xi \otimes \eta)) = c_1(\gamma) = -v$ и $k_1 = -1$. Аналогично, для вложения $i_2 \colon pt \times \mathbb{C}P^\infty \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$ имеем $i_2^*(c_1(\xi \otimes \eta)) = c_1(\gamma) = -v$ и $k_2 = -1$. Следовательно, $c_1(\xi \otimes \eta) = -v_1 - v_2 = c_1(\xi) + c_1(\eta)$.

В случае произвольных ξ, η воспользуемся функториальностью. Пусть ξ классифицируется отображением $f \colon B \to \mathbb{C}P^\infty$, а η классифицируется отображением $g \colon B \to \mathbb{C}P^\infty$. Положим $h = (f, g) \colon B \to \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$, тогда $\xi = f^*\gamma = h^*(p_1^*\gamma)$ и $\eta = g^*\gamma = h^*(p_2^*\gamma)$. Мы имеем

$$\begin{aligned} c_1(\xi \otimes \eta) = c_1\bigl(h^*(p_1^*\gamma) \otimes h^*(p_2^*\gamma)\bigr) = h^*\bigl(c_1((p_1^*\gamma) \otimes (p_2^*\gamma))\bigr) = h^*\bigl(c_1(p_1^*\gamma) + c_1(p_2^*\gamma)\bigr) = \\ = c_1(h^*(p_1^*\gamma)) + c_1(h^*(p_2^*\gamma)) = c_1(\xi) + c_1(\eta). \quad \square \end{aligned}$$

В следующем разделе мы обсудим, как выводить формулы для классов Чженя тензорного произведения произвольных расслоений.

9.3. **Принцип расщепления. Многообразия флагов. Единственность характеристических классов.** Принцип расщепления, неформально говоря, заключается в том, что все свойства характеристических классов, выполняемые для расслоений, расщепляющихся в сумму одномерных расслоений, выполняются и для любых расслоений. В основе этого принципа лежит следующая теорема.

Теорема 9.7. *Пусть ξ — n-мерное комплексное расслоение над клеточной базой B. Тогда существует B' и отображение $f \colon B' \to B$, такое что $f^*\xi = \lambda_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n$ (сумма одномерных расслоений) и $f^* \colon H^*(B) \to H^*(B')$ — мономорфизм.*

Доказательство. Рассмотрим следующую диаграмму индуцированных расслоений:

$$\begin{array}{ccccccccc} \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \ldots \oplus \gamma_n & \to & \ldots & \to & \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \xi_2 & \to & \gamma_1 \oplus \xi_1 & \to & \xi_0 = \xi \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_n = \mathbb{C}P(\xi_{n-1}) & \xrightarrow{f_n} & \ldots & \to & B_2 = \mathbb{C}P(\xi_1) & \xrightarrow{f_2} & B_1 = \mathbb{C}P(\xi_0) & \xrightarrow{f_1} & B_0 = B \end{array}$$

Здесь f_i — проекция проективизации расслоения ξ_{i-1} над B_{i-1}. На первом шаге мы индуцируем расслоение над $\mathbb{C}P(\xi_0)$ при помощи отображения f_1. Это индуцированное расслоение $f_1^*\xi_0$ содержит в качестве подрасслоения одномерное расслоение γ_1 — тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P(\xi_0)$. Ортогональное дополнение к γ_1 в $f_1^*\xi$ обозначим через ξ_1, так что $f_1^*\xi_0 = \gamma_1 \oplus \xi_1$. На втором шаге мы индуцируем расслоение над $\mathbb{C}P(\xi_1)$ при помощи отображения f_2. Это индуцированное расслоение $f_2^*(\gamma_1 \oplus \xi_1)$ содержит в качестве подрасслоений уже два одномерных расслоения — расслоение $f_2^*\gamma_1$, которое мы продолжаем обозначать γ_1, и тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P(\xi_1)$, которое мы обозначаем γ_2. Их ортогональное дополнение обозначим через ξ_2. И так далее. На последнем, n-шаге мы получаем, что γ_n — это тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P(\xi_{n-1})$. Каждое из отображений f_i индуцирует мономорфизм в когомологиях в силу теоремы Лере–Хирша. Утверждение теоремы получается, если положить $B' = B_n$ и $f = f_1 \circ \ldots \circ f_n$. $\square$

Более явно конструкцию отображения $f\colon B' \to B$ и расщепления $f^*\xi = \lambda_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n$ из теоремы 9.7 можно описать на основе понятия многообразия флагов.

Напомним, что (полным) *флагом* в $\mathbb{C}^n$ называется последовательность вложенных подпространств

$$U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_{n-1} \subset U_n = \mathbb{C}^n, \qquad \dim U_i = i.$$

Множество всех флагов в $\mathbb{C}^n$ является комплексным многообразием размерности $\frac{n(n-1)}{2}$. Оно называется *многообразием флагов* и обозначается $Fl(\mathbb{C}^n)$. Над многообразием $Fl(\mathbb{C}^n)$ имеется n тавтологических расслоений $\gamma^1, \ldots, \gamma^n$, $\dim \gamma^i = i$; слоем расслоения γ^i над данным флагом является его i-е подпространство U_i (так что расслоение γ^n тривиально).

Флагизацией n-мерного комплексного расслоения ξ над B называется множество $Fl(\xi)$ всех флагов во всех слоях расслоения ξ. Проекция $Fl(\xi) \to B$ является локально тривиальным расслоением со слоем $Fl(\mathbb{C}^n)$. Над многообразием $Fl(\xi)$ имеется n тавтологических расслоений $\gamma^1, \ldots, \gamma^n$, $\dim \gamma^i = i$.

Теорема 9.8. *Пусть ξ — n-мерное комплексное расслоение над клеточной базой B и пусть $f\colon Fl(\xi) \to B$ — проекция флагизации расслоения ξ. Тогда*

$$f^*\xi \cong \gamma^1 \oplus (\gamma^2/\gamma^1) \oplus \ldots \oplus (\gamma^n/\gamma^{n-1})$$

и $f^*\colon H^*(B) \to H^*(Fl(\xi))$ — мономорфизм.

Доказательство. Из конструкции пространства B' в доказательстве теоремы 9.7 следует, что точка в B' задаётся последовательным выбором n одномерных подпространств $\ell_1 \subset E_x$, $\ell_2 \subset E_x/\ell_1, \ldots, \ell_n \subset E_x/(\ell_1 \oplus \ldots \oplus \ell_{n-1})$ в слое $E_x \cong \mathbb{C}^n$ расслоения ξ. Каждый такой набор n одномерных подпространств задаёт флаг $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_n$ в E_x, где $U_i = \ell_1 \oplus \ldots \oplus \ell_i$. Обратно, каждый флаг $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_n$ в E_x задаёт набор одномерных подпространств $\ell_i = U_i/U_{i-1}$. Поэтому пространство B' из теоремы 9.7 отождествляется с $Fl(\xi)$, а одномерные расслоения $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ над B' отождествляются с расслоениями $\gamma^1, \gamma^2/\gamma^1, \ldots, \gamma^n/\gamma^{n-1}$ над $Fl(\xi)$. $\square$

Аналоги теорем 9.7 и 9.8 имеет место и для вещественных расслоений и когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$.

Следствием является теорема единственности для характеристических классов.

Теорема 9.9. *Каждому комплексному векторному расслоению ξ над клеточной базой B можно единственным образом сопоставить набор классов $c_i(B) \in H^{2i}(B)$, удовлетворяющих свойствам а)–г) из теоремы 9.4.*

Аналогично, каждому вещественному векторному расслоению ξ над клеточной базой B можно единственным образом сопоставить набор классов $w_i(B) \in H^i(B;\mathbb{Z}_2)$, удовлетворяющих аналогам свойств а)–г) из теоремы 9.4 для классов Штифеля–Уитни.

Доказательство. Свойства а) и г) однозначно задают классы c_i для универсального одномерного расслоения γ^1 над $\mathbb{C}P^\infty$. Тогда свойство б) однозначно задаёт классы c_i для любого одномерного расслоения над B, так как такое расслоение классифицируется некоторым отображением $f\colon B \to \mathbb{C}P^\infty$. Далее, свойство в) однозначно задаёт классы c_i для сумм одномерных расслоений. Тогда из принципа расщепления следует, что классы c_i определены однозначно для любых расслоений над клеточной базой B. Действительно, если $\{c'_i \in H^{2i}(B)\}$ — другой набор классов, удовлетворяющих свойствам а)–г), то для отображения $f\colon B' \to B$ из теоремы 9.7 имеем $f^*(c'_i(\xi)) = c'_i(f^*\xi) = c_i(f^*\xi) = f^*(c_i(\xi))$ в $H^{2i}(B')$, так как $f^*\xi$ — сумма одномерных расслоений. Так как $f^*\colon H^*(B) \to H^*(B')$ — мономорфизм, отсюда следует, что $c'_i(\xi) = c_i(\xi)$. □

Если $\xi = \lambda_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n$ — сумма одномерных расслоений, то

(34) $$c(\xi) = (1+t_1)\cdot\ldots\cdot(1+t_n), \quad \text{где } t_i = c_1(\lambda_i).$$

Отсюда $c_i(\xi) = \sigma_i(t_1,\ldots,t_n)$ — i-й элементарный симметрический многочлен от $t_1,\ldots,t_n$. Таким образом, принцип расщепления позволяет рассматривать характеристические классы n-мерного расслоения как симметрические многочлены от формальных переменных $t_1,\ldots,t_n$.

Пример 9.10. Получим на основе принципа расщепления формулу для первого класса Чженя тензорного произведения двух расслоений. Пусть $\dim\xi = n$ и $\dim\eta = m$. Можно считать, что $\xi = \lambda_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n$ и $\eta = \mu_1 \oplus \ldots \oplus \mu_m$ (суммы одномерных расслоений). Тогда

$$c_1(\xi\otimes\eta) = c_1\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \otimes \bigoplus_{j=1}^m \mu_j\Bigr) = c_1\Bigl(\bigoplus_{i,j}(\lambda_i\otimes\mu_j)\Bigr) = \sum_{i,j} c_1(\lambda_i\otimes\mu_j) =$$
$$= \sum_{i,j}(c_1(\lambda_i)+c_1(\mu_j)) = m\sum_{i=1}^n c_1(\lambda_i) + n\sum_{j=1}^m c_1(\mu_j) = mc_1(\xi)+nc_1(\eta),$$

где в третьем равенстве мы воспользовались формулой Уитни для c_1, а в четвёртой — формулой для c_1 от тензорного произведения одномерных расслоений (предложение 9.6).

9.4. **Когомологии многообразий Грассмана.** Здесь мы покажем, что кольцо когомологий многообразия Грассмана $G_k(\mathbb{C}^N)$ порождается классами Чженя тавтологического расслоения γ_N^k и опишем соотношения между этими классами. Отсюда будет следовать, что кольцо когомологий бесконечномерного грассманиана $G_k(\mathbb{C}^\infty) = BU(n)$ порождается классами $c_1(\gamma^k),\ldots,c_k(\gamma^k)$ без соотношений, т. е. $H^*(BU(n)) \cong \mathbb{Z}[c_1,\ldots,c_k]$ — кольцо многочленов.

Наряду с тавтологическим расслоением γ_N^k будем рассматривать его ортогональное дополнение — $(N-k)$-мерное расслоение $(\gamma_N^k)^\perp$, слоем которого над $\pi \in G_k(\mathbb{C}^N)$ является ортогональное дополнение $\pi^\perp$ к π в $\mathbb{C}^N$. Обозначим для краткости $c_i = c_i(\gamma_N^k)$ и $c_j^\perp = c_j((\gamma_N^k)^\perp)$. Так как $\gamma_N^k \oplus (\gamma_N^k)^\perp \cong \underline{\mathbb{C}}^N$, получаем

$$c\cdot c^\perp = (1+c_1+\ldots+c_k)(1+c_1^\perp+c_2^\perp+\ldots) = 1.$$

Отсюда следует, что каждый класс $c_j^\perp$ является многочленом от классов $c_1,\ldots,c_k$.

Кольцо когомологий $G_k(\mathbb{C}^N)$ порождается классами $c_1,\ldots,c_k$, а все соотношения между ними вытекают из «размерностных» соотношений $c_j^\perp = 0$ при $j > N-k$.

Теорема 9.11. *Имеет место изоморфизм*

$$H^*(G_k(\mathbb{C}^N)) \cong \mathbb{Z}[c_1,\ldots,c_k]/(c_j^\perp = 0 \text{ при } j > N-k).$$

Доказательство. Ясно, что определён гомоморфизм колец

$$\mathbb{Z}[c_1,\dots,c_k]/(c_j^{\perp}=0 \text{ при } j>N-k)\to H^*(G_k(\mathbb{C}^N)),$$

переводящий c_i в $c_i(\gamma_N^k)\in H^*(G_k(\mathbb{C}^N))$. Докажем индукцией по k, что это — изоморфизм. При $k=1$ имеем $H^*(G_1(\mathbb{C}^N))=H^*(\mathbb{C}P^{N-1})\cong\mathbb{Z}[v]/(v^N=0)$ и $c_1=c_1(\gamma_N^1)=-v$. Тогда $c=1-v$ и $c^{\perp}=\frac{1}{1-v}=1+v+v^2+\dots$ Таким образом, соотношение $v^N=0$ эквивалентно соотношениям $c_j^{\perp}=0$ при $j>N-1$.

Предположим теперь, что утверждение доказано для $G_{k-1}(\mathbb{C}^N)$. Проективизация $\mathbb{C}P(\gamma_N^k)$ отождествляется с проективизацией $\mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^{\perp})$ следующим образом. Для прямой ℓ, лежащей в k-плоскости π^k, рассмотрим дополнительную $(k-1)$-плоскость π^{k-1}, т. е. $\pi^k=\ell\oplus\pi^{k-1}$. Тогда ℓ можно рассматривать как прямую в $(\pi^{k-1})^{\perp}$. Отсюда получаем

$$\mathbb{C}P(\gamma_N^k)=\{\ell\colon \ell\subset\pi^k\subset\mathbb{C}^N\}=\{\ell\colon \ell\subset(\pi^{k-1})^{\perp}\subset\mathbb{C}^N\}=\mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^{\perp}).$$

Пусть $p\colon\mathbb{C}P(\gamma_N^k)\to G_k(\mathbb{C}^N)$ и $p^{\perp}\colon\mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^{\perp})\to G_k(\mathbb{C}^N)$ — проекции и пусть γ — тавтологическое одномерное расслоение над $\mathbb{C}P(\gamma_N^k)=\mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^{\perp})$. Тогда

$$p^*(\gamma_N^k)=\xi\oplus\gamma,\quad (p^{\perp})^*((\gamma_N^{k-1})^{\perp})=\gamma\oplus\zeta,$$

где ξ — некоторое $(k-1)$-мерное, а ζ — $(N-k)$-мерное расслоение над $\mathbb{C}P(\gamma_N^k)=\mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^{\perp})$. При этом $p^*((\gamma_N^k)^{\perp})=\zeta$ и $(p^{\perp})^*(\gamma_N^{k-1})=\xi$, т. е.

$$\xi\oplus\gamma\oplus\zeta=p^*(\gamma_N^k\oplus(\gamma_N^k)^{\perp})=p^*(\underline{\mathbb{C}}^N)=\underline{\mathbb{C}}^N.$$

По теореме Лере–Хирша $H^*(\mathbb{C}P(\gamma_N^k))$ есть свободный $H^*(G_k(\mathbb{C}^N))$-модуль с базисом $1,v,\dots,v^{k-1}$, где $v=-c_1(\gamma)$, и соотношением

$$v^k+p^*(c_1(\gamma_N^k))v^{k-1}+\dots+p^*(c_k(\gamma_N^k))=0. \tag{35}$$

Из равенства $p^*(\gamma_N^k)=\xi\oplus\gamma$ получаем

$$1+c_1(p^*\gamma_N^k))+c_2(p^*\gamma_N^k)+\dots=(1+c_1(\xi)+c_2(\xi)+\dots)(1-v),$$

так что соотношение (35) можно записать как $c_k(\xi)=0$.

Аналогично, $H^*(\mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^{\perp}))$ есть свободный $H^*(G_{k-1}(\mathbb{C}^N))$-модуль с базисом $1,v,\dots,v^{N-k}$ и соотношением $c_{N-k+1}(\zeta)=0$.

По предположению индукции, $H^*(G_{k-1}(\mathbb{C}^N))$ порождается классами $c_1(\gamma_N^{k-1}),\dots,c_{k-1}(\gamma_N^{k-1})$ с соотношениями $c_i((\gamma_N^{k-1})^{\perp})=0$ при $i>N-k+1$. Следовательно, кольцо $H^*(\mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^{\perp}))=H^*(\mathbb{C}P(\gamma_N^k))$ порождается классами $c_i(\xi)$, $c_1(\gamma)=-v$ и $c_j(\zeta)$, а все соотношения между ними происходят из равенств $c(\xi\oplus\gamma\oplus\zeta)=0$, $c_i(\xi)=0$ при $i\geqslant k$ и $c_j(\zeta)=0$ при $j\geqslant N-k+1$, т. е. из тривиальности расслоения $\xi\oplus\gamma\oplus\zeta$ и размерности расслоений ξ,ζ. Это означает, что $H^*(\mathbb{C}P(\gamma_N^k))$ является свободным модулем над своим подкольцом R, порождённым классами $c_1(\xi\oplus\gamma),\dots,c_k(\xi\oplus\gamma)$, с базисом $1,v,\dots,v^{k-1}$. С другой стороны, при мономорфизме $p^*\colon H^*(G_k(\mathbb{C}^N))\to H^*(\mathbb{C}P(\gamma_N^k))$ имеем $p^*(c_i(\gamma_N^k))=c_i(\xi\oplus\gamma)$, так что $p^*\big(H^*(G_k(\mathbb{C}^N))\big)=R$ и $H^*(G_k(\mathbb{C}^N))$ порождается классами $c_1(\gamma_N^k),\dots,c_k(\gamma_N^k)$ с соотношениями, происходящими из размерности расслоения $(\gamma_N^k)^{\perp}$. □

Теперь рассмотрим бесконечномерный грассманиан $BU(k)=G_k(\mathbb{C}^{\infty})$.

Теорема 9.12. *Имеет место изоморфизм*

$$H^*(BU(k))\cong\mathbb{Z}[c_1,\dots,c_k].$$

Доказательство. Рассмотрим композицию гомоморфизмов

$$\mathbb{Z}[c_1,\ldots,c_k]\to H^*(G_k(\mathbb{C}^\infty))\to H^*(G_k(\mathbb{C}^N))\xrightarrow{\cong}\mathbb{Z}[c_1,\ldots,c_k]/(c_j^\perp=0 \text{ при } j>N-k).$$

Здесь первый гомоморфизм переводит c_i в $c_i(\gamma^k)$, второй индуцирован вложением $G_k(\mathbb{C}^N)\hookrightarrow G_k(\mathbb{C}^\infty)$, а третий — изоморфизм из теоремы 9.11. Грассманиан $G_k(\mathbb{C}^N)$ является клеточным подкомплексом в $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ относительно разбиения на клетки Шуберта (теорема 8.10), при этом $2(N-k)$-мерные остовы $G_k(\mathbb{C}^N)$ и $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ совпадают (предложение 8.11). Поэтому второй гомоморфизм в композиции выше является изоморфизмом в размерностях $<2(N-k)$. Вся композиция является изоморфизмом в размерностях $\leqslant 2(N-k)$, так как первое соотношение $c_j^\perp=0$ появляется в размерности $2(N-k+1)$. Следовательно, первый гомоморфизм также является изоморфизмом в размерностях $<2(N-k)$. Так как это верно для любого N, получаем, что $\mathbb{Z}[c_1,\ldots,c_k]\to H^*(G_k(\mathbb{C}^\infty))$ — изоморфизм. □

Комплексное n-мерное расслоение ξ над клеточной базой B классифицируется отображением $f\colon B\to BU(n)$, и мы имеем $c_i(\xi)=f^*(c_i)$. В связи с этим классы $c_i\in H^{2i}(BU(n))$ называются *универсальными характеристическими классами Чженя.*

Следующее утверждение описывает флагизацию универсального (тавтологического расслоения) γ^n над $BU(n)$ и даёт геометрическую интерпретацию формальных переменных $t_1,\ldots,t_n$ из принципа расщепления, см. (34).

Теорема 9.13.

а) *Мы имеем $Fl(\gamma^n)\simeq(\mathbb{C}P^\infty)^n$, причём проекция флагизации $Fl(\gamma^n)\to BU(n)$ гомотопна отображению $f\colon(\mathbb{C}P^\infty)^n\to BU(n)$, классифицирующему декартово произведение n экземпляров тавтологического расслоения γ^1 над $\mathbb{C}P^\infty$.*

б) *Гомоморфизм $f^*\colon H^*(BU(n))\to(\mathbb{C}P^\infty)^n$ имеет вид*

$$\mathbb{Z}[c_1,\ldots,c_n]\to\mathbb{Z}[t_1,\ldots,t_n],\qquad c_i\mapsto\sigma_i(t_1,\ldots,t_n),$$

т. е. переводит универсальный класс Чженя c_i в i-й симметрический многочлен от образующих $t_1,\ldots,t_n$.

Доказательство. Точками пространства $Fl(\gamma^n)$ являются флаги длины n в $\mathbb{C}^\infty$, а точками пространства $(\mathbb{C}P^\infty)^n$ являются последовательности из n прямых в $(\mathbb{C}^\infty)^n\cong\mathbb{C}^\infty$. Взаимно обратные гомотопические эквивалентности $Fl(\gamma^n)\to(\mathbb{C}P^\infty)^n$ и $(\mathbb{C}P^\infty)^n\to Fl(\gamma^n)$ сопосталяют флагу набор прямых и обратно, аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 9.8. Подробности оставим в качестве задачи.

Докажем б). Пусть $p_i\colon(\mathbb{C}P^\infty)^n\to\mathbb{C}P^\infty$ — проекция на i-й сомножитель, $t=c_1(\gamma^1)\in H^2(\mathbb{C}P^\infty)$ и $t_i=p_i^*(t)$. Тогда $H^*((\mathbb{C}P^\infty)^n)=\mathbb{Z}[t_1,\ldots,t_n]$ и $c((\gamma^1)^n)=(1+t_1)\cdot\ldots\cdot(1+t_n)$. Имеем $f^*(c_i)=c_i(f^*\gamma^n)=c_i((\gamma^1)^n)=\sigma_i(t_1,\ldots,t_n)$. □

Аналоги всех результатов этого параграфа имеют место для классов Штифеля–Уитни и когомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$:

Теорема 9.14. *Имеют место изоморфизмы*

$$H^*(G_k(\mathbb{R}^N);\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2[w_1,\ldots,w_k]/(w_j^\perp=0 \text{ при } j>N-k),$$
$$H^*(BO(n);\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2[w_1,\ldots,w_n].$$

9.5. **Параллелизуемость вещественных проективных пространств. Алгебры с делением.** Одним из приложений классов Штифеля–Уитни является доказательство несуществования алгебр с делением в размерностях, отличных от 2^k. Как мы увидим, этот вопрос непосредственно связан с параллелизуемостью вещественных проективных пространств.

Классами Штифеля–Уитни гладкого многообразия M будем называть классы Штифеля–Уитни его касательного расслоения: $w_i(M) = w_i(\mathcal{T}M)$.

Предложение 9.15.

а) $w(\mathbb{R}P^n) = (1+t)^{n+1}$ *в кольце* $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t]/(t^{n+1})$*;*

б) $w(\mathbb{R}P^n) = 1$ *тогда и только тогда, когда* $n = 2^k - 1$ *для целого* $k \geqslant 0$.

Доказательство. Согласно теореме 8.7, имеем $\mathcal{T}\mathbb{R}P^n \oplus \underline{\mathbb{R}} \cong \gamma^{\oplus(n+1)}$, откуда $w(\mathbb{R}P^n) = w(\gamma)^{n+1} = (1+t)^{n+1}$, где $t = w_1(\gamma) \in H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$ — первый класс Штифеля–Уитни тавтологического расслоения.

Докажем б). Пусть $n+1 = 2^k$. Тогда $w(\mathbb{R}P^n) = (1+t)^{2^k} = 1 + t^{2^k} = 1$ в кольце $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t]/(t^{n+1})$. Пусть теперь $n+1 = 2^k \cdot m$, где $m > 1$ нечётно. Тогда $w(\mathbb{R}P^n) = (1+t)^{2^k\cdot m} = (1+t^{2^k})^m = 1 + mt^{2^k} + \ldots \neq 1$, так как $t^{2^k} \neq 0$. □

Напомним, что многообразие называется параллелизуемым, если его касательное расслоение тривиально.

Следствие 9.16. *Если* $\mathbb{R}P^n$ *параллелизуемо, то* $n = 2^k - 1$ *для целого* $k \geqslant 0$.

Теорема 9.17 (Штифель)**.** *Предположим, что на* $\mathbb{R}^n$ *существует билинейное умножение* $m\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *без делителей нуля (ассоциативность и существование единицы не предполагается). Тогда* $\mathbb{R}P^{n-1}$ *параллелизуемо, т. е.* $n = 2^k$.

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда $r_i\colon y \mapsto m(y, e_i)$ задаёт изоморфизм $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, так как умножение m без делителей нуля. Рассмотрим изоморфизмы $v_i = r_i \circ r_1^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Тогда $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)$ линейно независимы при $x \neq 0$ и $v_1 = \mathrm{id}$. Действительно, если $0 = \lambda_1 v_1(x) + \ldots + \lambda_n v_n(x)$, то $0 = \lambda_1 r_1(y) + \ldots + \lambda_n r_n(y) = m(y, \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n)$, где $y = r_1^{-1}(x) \neq 0$, откуда $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$.

Рассмотрим теперь морфизмы расслоений

$$\widetilde{v}_i\colon \gamma \to \gamma^\perp, \quad (\ell, x) \mapsto (\ell^\perp, \mathrm{pr}_{\ell^\perp} v_i(x)),$$

где $x \in \ell \subset \mathbb{R}^n$, а $\mathrm{pr}_{\ell^\perp} v_i(x)$ — проекция вектора $v_i(x)$ на $\ell^\perp$. Тогда $\mathrm{pr}_{\ell^\perp} v_1(x) = 0$, а векторы $\mathrm{pr}_{\ell^\perp} v_2(x), \ldots, \mathrm{pr}_{\ell^\perp} v_n(x)$ линейно независимы в $\ell^\perp$ при $x \neq 0$. Следовательно, $\widetilde{v}_2, \ldots, \widetilde{v}_n$ суть $(n-1)$ линейно независимых сечений расслоения $\mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^\perp) = \mathcal{T}\mathbb{R}P^{n-1}$. Поэтому это расслоение тривиально. □

Пространства $\mathbb{R}P^0 = pt$, $\mathbb{R}P^1$, $\mathbb{R}P^3$ и $\mathbb{R}P^7$ параллелизуемы, так как на $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^8$ имеется билинейное умножение без делителей нуля (вещественные числа, комплексные числа, кватернионы и октонионы Кэли, соответственно). При $k \geqslant 4$ пространство $\mathbb{R}P^{2^k-1}$ не параллелизуемо, и поэтому других билинейных умножений без делителей нуля на $\mathbb{R}^n$ нет. Этот факт был доказан в 1960 году Дж. Адамсом методами алгебраической топологии.

9.6. **Препятствия к вложениям и погружениям многообразий.** Ещё одно приложение характеристических классов Штифеля–Уитни заключается в построении препятствий к вложениям и погружениям многообразий в евклидово пространство.

Напомним, что гладкое отображение гладких многообразий $f\colon M \to N$ называется *погружением* (обозначается $M \looparrowright N$), если его дифференциал $D_x f\colon \mathcal{T}_x M \to \mathcal{T}_{f(x)} N$ инъективен в каждой точке $x \in M$. Погружение $f\colon M \to N$ называется *вложением*, если оно является гомеоморфизмом на свой образ $f(M)$ (в топологии, индуцированной из N). Если M компактно, то погружение является вложением тогда и только тогда, когда оно инъективно.

Нормальное расслоение $\nu = \nu(M \looparrowright N)$ погружения $f\colon M \looparrowright N$ определяется как $(f^*\mathcal{T}N)/\mathcal{T}M$. Введя риманову метрику на $\mathcal{T}N$, слой расслоения $\nu(M \looparrowright N)$ в точке $x \in M$ можно отождествить с ортогональным дополнением к подпространству $D_x f(\mathcal{T}_x M)$ в $\mathcal{T}_{f(x)}N$. Имеет место разложение

$$f^*\mathcal{T}N \cong \mathcal{T}M \oplus \nu(M \looparrowright N).$$

Из дифференциальной геометрии известна

Теорема 9.18 (Уитни)**.** *Гладкое компактное многообразие M размерности $n > 1$ можно вложить в $\mathbb{R}^{2n}$ и погрузить в $\mathbb{R}^{2n-1}$.*

Когда M^n можно погрузить в евклидово пространство меньшей размерности? Пусть задано погружение $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}$ с нормальным расслоением ν. Тогда мы имеем $\mathcal{T}M \oplus \nu = \underline{\mathbb{R}}^{n+k}$, откуда $w(M) \cdot w(\nu) = 1$. Мы будем обозначать характеристический класс $w(\nu)$ нормального расслоения через $w^\perp(M)$. Он зависит только от характеристических классов многообразия M, так как имеет место формула формального обращения

$$w^\perp(M) = 1 + w_1^\perp(M) + w_2^\perp(M) + \ldots = \frac{1}{1 + w_1(M) + w_2(M) + \ldots}$$

Например,

$$\begin{aligned} &w_1^\perp(M) = -w_1(M), \quad w_2^\perp(M) = w_1^2(M) - w_2(M),\\ &w_3^\perp(M) = -w_1^3(M) + 2w_1(M)w_2(M) - w_3(M), \ldots \end{aligned}$$

(при формальном обращении ряда некоторое слагаемые получаются со знаком минус, как в формулах выше, но так как мы работаем с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$, эти знаки можно опустить). Так как расслоение $\nu = \nu(M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k})$ имеет размерность k, мы получаем $w_i^\perp(M) = 0$ при $i > k$. Это может давать ограничения на k.

Пример 9.19. Рассмотрим $M = \mathbb{R}P^9$. Тогда

$$w(\mathbb{R}P^9) = (1+t)^{10} = 1 + t^2 + t^8, \quad w^\perp(\mathbb{R}P^9) = \frac{1}{1 + t^2 + t^8} = 1 + t^2 + t^4 + t^6.$$

Так как $w_6^\perp(\mathbb{R}P^9) \neq 0$, получаем, что $\mathbb{R}P^9$ нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{9+5} = \mathbb{R}^{14}$. Согласно теореме Уитни, $\mathbb{R}P^9$ погружается в $\mathbb{R}^{17}$.

В некоторых случая оценка из теоремы Уитни оказывается точной.

Теорема 9.20 (Милнор)**.** *Многообразие $\mathbb{R}P^{2^k}$ нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{2^{k+1}-2}$.*

Доказательство. Мы имеем

$$w(\mathbb{R}P^{2^k}) = (1+t)^{2^k+1} = (1+t)^{2^k}(1+t) = (1+t^{2^k})(1+t) = 1+t+t^{2^k},$$
$$w^{\perp}(\mathbb{R}P^{2^k}) = 1+t+t^2+\ldots+t^{2^k-1}.$$

Предположим, что существует погружение $\mathbb{R}P^{2^k} \looparrowright \mathbb{R}^{2^{k+1}-2}$. Тогда его нормальное расслоение ν имеет размерность $2^{k+1}-2-2^k = 2^k-2$. Но $w_{2^k-1}(\nu) = w^{\perp}_{2^k-1}(\mathbb{R}P^{2^k}) = t^{2^k-1} \neq 0$. Противоречие. $\square$

Сравнивая с примером 9.19, получаем, что не только $\mathbb{R}P^9$, но даже $\mathbb{R}P^8$ нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{14}$. В общем случае нахождение минимальной размерности погружения проективного пространства $\mathbb{R}P^n$ является трудной задачей, которая полностью не решена до сих пор.

Задачи и упражнения.

9.21. Пусть ξ, γ — комплексные векторные расслоения над клеточным пространством B, причём γ одномерно. Докажите, что расслоения $\mathbb{C}P(\xi\otimes\gamma)$ и $\mathbb{C}P(\xi)$ изоморфны. То же для вещественных векторных расслоений и проективизаций.

9.22. Рассмотрим отображение $q\colon \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1} \cong S^{2n}$. Докажите, что $q^*\alpha = v^n$, где $\alpha \in H^{2n}(S^{2n})$ — стандартная образующая, происходящая из ориентации $\mathbb{C}P^n$, а $v \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к $[\mathbb{C}P^{n-1}] \in H_{2n-2}(\mathbb{C}P^n)$.

9.23. Докажите следующую относительную версию теоремы Лере–Хирша. Пусть дана пара локально тривиальных расслоений $(F,F') \xrightarrow{i} (E,E') \xrightarrow{p} B$ над одной базой B. Предположим, что

1) $H^k(F,F';R)$ — конечно-порождённый свободный R-модуль для любого k;
2) существуют классы $v_j \in H^*(E,E';R)$, такие что их ограничения $i^*(v_j)$ на любой слой (F,F') дают R-базис в $H^*(F,F';R)$.

Тогда $H^*(E,E';R)$ является свободным $H^*(B;R)$-модулем с базисом $\{v_j\}$.

9.24. Приведите пример локально тривиального расслоения $E\to B$, для которого

а) не выполнено второе из условий теоремы Лере–Хирша (т. е. $H^*(F;R)$ является конечно порождённым свободным R-модулем, но не существует набора классов в $H^*(E;R)$, которые ограничиваются на базис в когомологиях слоя);
б) выполнены условия теоремы Лере–Хирша, но отсутствует изоморфизм колец $H^*(E;R) \cong H^*(B;R)\otimes H^*(F;R)$.

9.25. Докажите, что для колец когомологий унитарной и специальной унитарной групп имеют место изоморфизмы:

$$H^*(U(n);\mathbb{Z}) \cong \Lambda[u_1,u_2,\ldots,u_n], \qquad H^*(SU(n);\mathbb{Z}) \cong \Lambda[u_2,\ldots,u_n], \qquad \dim u_i = 2i-1$$

(справа стоят внешние алгебры от нечётномерных образующих). *Указание:* используйте расслоение $U(n-1)\to U(n)\to S^{2n-1}$ и теорему Лере–Хирша. Что можно сказать о когомологиях группы $O(n)$, используя тот же метод?

9.26. Вычислите

а) кольцо когомологий многообразия $L(n,m) = \mathbb{C}P(\gamma\oplus\underline{\mathbb{C}}^m)$, где γ — тавтологическое одномерное расслоение над $\mathbb{C}P^n$, а $\underline{\mathbb{C}}^m$ — тривиальное m-мерное расслоение над $\mathbb{C}P^n$;

б) кольцо когомологий многообразия $\mathbb{C}P(\gamma^{\otimes i_1} \oplus \ldots \oplus \gamma^{\otimes i_k})$ для произвольных целых чисел $i_1, \ldots, i_k$;

в) полный характеристический класс Чженя касательного расслоения многообразия $\mathbb{C}P(\gamma^{\otimes i_1} \oplus \ldots \oplus \gamma^{\otimes i_k})$.

9.27. Пусть $0 \leqslant k \leqslant l$ — натуральные числа. Определим *многообразие Милнора*

$$H_{kl} = \big\{([z_0 : \cdots : z_k], [w_0 : \cdots : w_l]) \in \mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l \colon z_0w_0 + \ldots + z_kw_k = 0\big\}.$$

а) Докажите, что H_{kl} является сечением образа *вложения Серге*

$$\mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l \hookrightarrow \mathbb{C}P^{(k+1)(l+1)-1},$$
$$([z_0 : \cdots : z_k], [w_0 : \cdots : w_l]) \mapsto [z_0w_0 : \cdots : z_iw_j : \cdots : z_kw_l]$$

гиперплоскостью $H \subset \mathbb{C}P^{(k+1)(l+1)-1}$ общего положения.

б) Вычислите кольцо когомологий многообразия H_{ij}.

9.28. Пусть ξ — m-мерное, а η — n-мерное комплексные расслоения. Пользуясь принципом расщепления, выразите классы Чженя $c_2(\xi \otimes \eta)$, $c_1(S^2\xi)$, $c_2(S^2\xi)$, $c_1(\Lambda^2\xi)$, $c_2(\Lambda^2\xi)$ через классы Чженя расслоений ξ и η. Здесь $S^i\xi$ обозначает i-симметрическую степень расслоения ξ, а $\Lambda^i\xi$ обозначает i-ю внешнюю степень.

9.29. Запишем $c_i(\xi) = \sigma_i(x_1, \ldots, x_n)$ (i-я симметрическая функция формальных переменных). Докажите, что полные классы Чженя симметрической и внешней степени расслоения ξ выражаются по формулам

$$c(\Lambda^k\xi) = \prod_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} (1 + (x_{i_1} + \ldots + x_{i_k})), \quad c(S^k\xi) = \prod_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n} (1 + (x_{i_1} + \ldots + x_{i_k})).$$

9.30. Задайте в явном виде образующими и соотношениями кольца целочисленных когомологий грассманианов $G_2(\mathbb{C}^4)$, $G_2(\mathbb{C}^5)$, $G_3(\mathbb{C}^5)$.

9.31. Докажите, что $Fl(\gamma^n) \simeq (\mathbb{C}P^\infty)^n$, причём проекция флагизации $Fl(\gamma^n) \to BU(n)$ гомотопна отображению $f \colon (\mathbb{C}P^\infty)^n \to BU(n)$, классифицирующему декартово произведение n экземпляров тавтологического расслоения γ^1 над $\mathbb{C}P^\infty$.

9.32. Докажите, что числа Бетти (ранги групп целочисленных гомологий) многообразия флагов $Fl(\mathbb{C}^n)$ удовлетворяют соотношениям $\beta_{2i+1}(Fl(\mathbb{C}^n)) = 0$ и

$$\sum_i \beta_{2i}(Fl(\mathbb{C}^n))t^{2i} = \prod_{i=1}^{n-1}(1 + t^2 + \ldots + t^{2i}).$$

9.33. Докажите, что кольцо когомологий многообразия флагов $Fl(\mathbb{C}^n)$ описывается следующим образом:

$$H^*(Fl(\mathbb{C}^n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]/(\sigma_1, \ldots, \sigma_n),$$

где $\dim t_i = 2$, а σ_i есть i-я элементарная симметрическая функция от $t_1, \ldots, t_n$.

9.34. Пусть ξ — вещественное векторное расслоение. Докажите, что если $w(\xi) \neq 1$, то число $\min\{i \colon w_i(\xi) \neq 0\}$ есть степень двойки.

9.35. Докажите, что для комплексного расслоения ξ число $\min\{i \colon c_i(\xi) \neq 0\}$ может быть любым.

9.36. Пусть γ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^\infty$. Докажите, что не существует векторного расслоения ζ над $\mathbb{R}P^\infty$ такого, что $\gamma \oplus \zeta$ тривиально.

9.37. Докажите, что если многообразие M^n можно погрузить в $\mathbb{R}^{n+1}$, то каждый класс $w_i(M)$ является степенью класса $w_1(M)$.

10. Класс Эйлера и класс Тома

10.1. **Ориентируемые векторные расслоения.** Рассмотрим вещественное векторное n-мерное расслоение ξ, заданное проекцией $p\colon E \to B$ с тривиализующим покрытием $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$, тривиализациями $\varphi_\alpha\colon p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ и отображениями перехода $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n, \mathbb{R})$.

Выбор ориентации в слое $E_x = p^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^n$ над точкой $x \in B$ эквивалентен выбору одной из двух образующих группы $H_n(E_x, E_x \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$. В связи с этим будем называть образующую $\mu_x \in H_n(E_x, E_x \setminus \{0\})$ *ориентацией* слоя E_x. Для группы $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ (соответствующей слою тривиального расслоения) имеется канонический выбор образующей $\mu_0 \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, которая задаётся сингулярным симплексом $[v_0, \ldots, v_n] \to \mathbb{R}^n$ с вершинами $v_0 = -e_1 - \ldots - e_n$, $v_1 = e_1, \ldots, v_n = e_n$, где $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

Выбор ориентаций $\mu_x \in H_n(E_x, E_x \setminus \{0\})$ в каждом слое расслоения ξ называется *согласованным* относительно открытого покрытия $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ с тривиализациями $\varphi_\alpha\colon p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, если для любых U_α и $x \in U_\alpha$ изоморфизм

$$H_n(E_x, E_x \setminus \{0\}) \xrightarrow{(\varphi_\alpha|_{E_x})_*} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \qquad (36)$$

переводит μ_x в μ_0.

Векторное расслоение ξ называется *ориентируемым*, если существует открытое покрытие $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ с тривиализациями $\varphi_\alpha\colon p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ и согласованный выбор ориентаций $\mu_x \in H_n(E_x, E_x \setminus \{0\})$, $x \in B$, относительно этого покрытия.

Предложение 10.1. *Вещественное векторное n-мерное расслоение ξ ориентируемо тогда и только тогда, когда оно допускает тривиализующее покрытие $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ с отображениями перехода $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL^+(n, \mathbb{R})$, где $GL^+(n, \mathbb{R})$ — группа невырожденных матриц с положительным определителем.*

Доказательство. Если ξ ориентируемо, то из (36) получаем, что для любого $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ гомоморфизм

$$g_{\alpha\beta}(x)_* = ((\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})|_{x \times \mathbb{R}^n})_*\colon H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H_n(E_x, E_x \setminus \{0\}) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

переводит μ_0 в μ_0, а значит линейный изоморфизм $g_{\alpha\beta}(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ сохраняет ориентацию, т. е. имеет положительный определитель. Обратно, если $g_{\alpha\beta}(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет положительный определитель для любого $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, то $\mu_x := (\varphi_\alpha^{-1}|_{E_x})_* \mu_0$ задаёт согласованный выбор ориентаций в слоях. □

Если M — гладкое многообразие, то группа локальных гомологий $H_n(M, M \setminus x)$, используемая в определении ориентации на M, отождествляется с группой $H_n(\mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \setminus \{0\})$ при помощи экспоненциального отображения $\mathcal{T}_x M \to M$, которое является диффеоморфизмом в окрестности точки $x \in M$. Отсюда получаем

Предложение 10.2. *Пусть M — гладкое n-мерное многообразие. Следующие условия эквивалентны:*

1) *многообразие M ориентируемо;*
2) *касательное расслоение $\mathcal{T}M$ ориентируемо;*
3) *существует гладкий атлас $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \xrightarrow{\cong} V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, для которого отображения замены координат $\psi_{\alpha\beta}\colon \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ удовлетворяют условию $\det \operatorname{Jac}_x \psi_{\alpha\beta} > 0$ для любого $x \in M$.*

10.2. **Класс Тома и изоморфизм Тома.** Ориентацию в слое вещественного расслоения ξ можно также задавать выбором образующей $\theta_x \in H^n(E_x, E_x \setminus \{0\})$ в группе когомологий (это удобно, например, при работе с когомологиями де Рама). При этом условие согласованности ориентаций разных слоёв получается очевидной дуализацией формулы (36).

Теорема 10.3. *Пусть ξ — вещественное ориентируемое векторное n-мерное расслоение ξ, заданное проекцией $p\colon E \to B$, с согласлованно выбранными ориентациями слоёв $\theta_x \in H^n(E_x, E_x \setminus \{0\})$. Тогда*

а) *существует единственный класс когомологий $\theta \in H^n(E, E \setminus B)$, ограничение которого на $H^n(E_x, E_x \setminus \{0\})$ есть θ_x для любого $x \in B$;*

б) *умножение на класс θ задаёт изоморфизмы*

$$H^k(B) \cong H^k(E) \xrightarrow{\smile\theta} H^{k+n}(E, E \setminus B), \quad H_{k+n}(E, E \setminus B) \xrightarrow{\frown\theta} H_k(E) \cong H_k(B)$$

для любого k.

Класс $\theta \in H^n(E, E \setminus B)$, задаваемый условием а), называется *классом Тома* расслоения ξ, а изоморфизмы из утверждения б) называются *изоморфизмами Тома*.

В доказательстве теоремы используется следующая алгебраическая конструкция обратного предела, двойственного к прямому пределу.

Конструкция 10.4 (обратный предел групп)**.** Рассмотрим диаграмму $D = \{G_\alpha\colon \alpha \in P\}$ абелевых групп G_α и гомоморфизмов $f_{\alpha\beta}\colon G_\alpha \to G_\beta$, индексированных частично упорядоченным множеством $(P, \leqslant)$ (см. конструкцию 7.10).

Обратным пределом или просто *пределом* диаграммы D абелевых групп называется подгруппа прямого произведения $\prod_{\alpha \in P} G_\alpha$, состоящая из функций выбора $(\alpha \mapsto g_\alpha \in G_\alpha)$, таких что $f_{\alpha\beta}(g_\alpha) = g_\beta$ при $\alpha \leqslant \beta$. Обозначается $\lim D$ или $\varprojlim G_\alpha$.

Определены канонические гомоморфизмы $p_\alpha\colon \varprojlim G_\alpha \to G_\alpha$, удовлетворяющие соотношениям $f_{\alpha\beta} p_\alpha = p_\beta$ при $\alpha \leqslant \beta$.

Если в P существует наименьший элемент μ, то $\varprojlim G_\alpha = G_\mu$. Если никакие два различных элемента в P не находятся в отношении порядка, то $\varprojlim G_\alpha = \prod_{\alpha \in P} G_\alpha$.

Предложение 10.5 (универсальное свойство обратного предела)**.** *Пусть $D = \{G_\alpha\colon \alpha \in P\}$ — диаграмма абелевых групп, индексированная частично упорядоченным множеством P. Предположим, что заданы гомоморфизмы $h_\alpha\colon H \to G_\alpha$, удовлетворяющие соотношениям $f_{\alpha\beta} h_\alpha = h_\beta$ при $\alpha \leqslant \beta$. Тогда существует единственный гомоморфизм $h\colon H \to \varprojlim G_\alpha$, такой что $p_\alpha h = h_\alpha$:*

$$\begin{tikzcd}
 & & G_\alpha \arrow[dd, "f_{\alpha\beta}"] \\
H \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[urr, bend left, "h_\alpha"] \arrow[drr, bend right, "h_\beta"'] & \varprojlim G_\alpha \arrow[ur, "p_\alpha"] \arrow[dr, "p_\beta"'] & \\
 & & G_\beta
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Гомоморфизм h переводит $a \in H$ в функцию $(\alpha \mapsto h_\alpha(a))$. $\square$

Из определений прямого и обратного предела вытекает, что гомомоморфизм

$$\operatorname{Hom}(\varinjlim G_\alpha, H) \to \varprojlim \operatorname{Hom}(G_\alpha, H),$$

получаемый из универсальных свойств, является изоморфизмом для любой абелевой группы H (задача).

Универсальное свойство выше определяет предел диаграммы $D\colon \mathcal{P} \to \mathcal{C}$ для произвольной категории $\mathcal{C}$. Конструкция 10.4 показывает, что пределы существуют в категории абелевых групп. Пределы диаграмм также существуют в категории топологических пространств.

Доказательство теоремы 10.3. Введём обозначение $E_0 = E \setminus B$. Мы докажем когомологический изоморфизм Тома; доказательство для гомологий аналогично. Доказательство разобьём на четыре шага.

Шаг 1. Расслоение ξ тривиально. Пусть $E = B \times \mathbb{R}^n$. Имеем образующие $1 \in H^0(B)$ и $\theta_0 \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Тогда $H^n(E, E_0) = H^n(B \times \mathbb{R}^n, B \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ и $\theta = 1 \times \theta_0$ есть требуемый класс.

Шаг 2. Предположим, что $B = B' \cup B''$, где B', B'' открыты, и теорема верна для $\xi|_{B'}$, $\xi|_{B''}$ и $\xi|_{B' \cap B''}$; докажем теорему для ξ. Обозначим $B^\cap = B' \cap B''$ и $E^\cap = E' \cap E''$. Рассмотрим следующую диаграмму отображений между последовательностями Майера–Виеториса:

$$\begin{tikzcd}
H^{k-1}(E^\cap) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "\cdot\theta^\cap"] & H^k(E) \arrow[r] \arrow[d, "?"', "\cdot\theta"] & H^k(E') \oplus H^k(E'') \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "\cdot\theta' \oplus \cdot\theta''"] & H^k(E^\cap) \arrow[d, "\cong"', "\cdot\theta^\cap"] \\
H^{k-1+n}(E^\cap, E_0^\cap) \arrow[r] & H^{k+n}(E, E_0) \arrow[r] & H^{k+n}(E', E_0') \oplus H^{k+n}(E'', E_0'') \arrow[r] & H^{k+n}(E^\cap, E_0^\cap)
\end{tikzcd}$$

По предположению существуют и единственны классы $\theta^\cap \in H^n(E^\cap, E_0^\cap)$, $\theta' \in H^n(E', E_0')$, $\theta'' \in H^n(E'', E_0'')$. Ограничения классов θ' и θ'' на $H^n(E^\cap, E_0^\cap)$ обладают свойством из утверждения а) теоремы для $\theta^\cap$. Поэтому, в силу единственности, θ' и θ'' при ограничении переходят в $\theta^\cap$. Из точности последовательности Майера–Виеториса следует, что θ' и θ'' являются образами некоторого класса $\theta \in H^n(E, E_0)$. Этот класс определён однозначно, так как $H^{n-1}(E^\cap, E_0^\cap) = 0$ в силу утверждения б) теоремы для расслоения $\xi^\cap$. Тогда умножение на θ задаёт гомоморфизм $H^k(E) \xrightarrow{\cdot\theta} H^{k+n}(E, E_0)$, входящий в коммутативную диаграмму выше (в силу естественности умножения в когомологиях). Этот гомоморфизм является изоморфизмом согласно 5-лемме.

Шаг 3. Существует конечное тривиализующее покрытие $B = U_1 \cup \ldots \cup U_m$ (например, B компактно). Будем вести индукцию по m. База индукции $m = 1$ — это шаг 1. Индукционный переход — применяем шаг 2 к расслоениям $\xi|_{U_1 \cup \ldots \cup U_{m-1}}$, $\xi|_{U_m}$ и $\xi|_{(U_1 \cup \ldots \cup U_{m-1}) \cap U_m} = \xi|_{(U_1 \cap U_m) \cup \ldots \cup (U_{m-1} \cap U_m)}$.

Шаг 4. Общий случай. Представим B в виде объедиенининия компактных подмножеств $C \subset B$. Мы имеем $\varinjlim H_k(C) = H_k(B)$, так как образ любого сингулярного симплекса содержится в компактном подмножестве (см. также задачу 7.25). Однако, естественный гомоморфизм $H^k(B) \to \varprojlim H^k(C)$, вообще говоря, не является изоморфизмом. Тем не менее, мы докажем изоморфизм

$$H^n(E, E \setminus B) \cong \varprojlim H^n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C). \tag{37}$$

Для этого вначале заметим, что $H_{n-1}(E, E \setminus B) = 0$. Действительно, для компактной базы B это вытекает из гомологического изоморфизма Тома $H_{n-1}(E, E \setminus B) \cong H_{-1}(B) = 0$, установаленного на шаге 3, а в общем случае имеем

$$H_{n-1}(E, E \setminus B) = \varinjlim H_{n-1}(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C) = 0.$$

Далее, из формул унивесальных коэффициентов получаем

$$\begin{aligned} H^n(E, E \setminus B) &\cong \operatorname{Hom}\bigl(H_n(E, E \setminus B), \mathbb{Z}\bigr) \oplus \operatorname{Ext}\bigl(H_{n-1}(E, E \setminus B), \mathbb{Z}\bigr) = \\ &= \operatorname{Hom}\bigl(H_n(E, E \setminus B), \mathbb{Z}\bigr) \cong \operatorname{Hom}\bigl(\varinjlim H_n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C), \mathbb{Z}\bigr) \cong \\ &\cong \varprojlim \operatorname{Hom}\bigl(H_n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C), \mathbb{Z}\bigr) \cong \varprojlim H^n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C). \end{aligned}$$

Тогда требуемый класс $\theta \in H^n(E, E \setminus B)$ соответствует при изоморфизме (37) элементу обратного предела, задаваемому классами $\theta_C \in H^n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C)$, которые существуют, единственны и обладают свойством из утверждения а) теоремы согласно шагу 3.

Осталось установить изоморфизм Тома (утверждение б) теоремы) в общем случае. Для этого применим относительный вариант теоремы Лере–Хирша (задача 9.23) к паре расслоений $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to (E, E \setminus B) \to B$. Другой способ доказательства изоморфизма заключается в следующем. Вначале рассмотрим когомологии с коэффициентами в поле F. В коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} H^k(E; F) \arrow[r, "\smile\theta"] \arrow[d, "\cong"'] & H^{k+n}(E, E \setminus B; F) \arrow[d, "\cong"] \\ \varprojlim H^k(p^{-1}(C); F) \arrow[r, "\smile\theta_C", "\cong"'] & \varprojlim H^{k+n}(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C; F) \end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки являются изоморфизмами согласно формуле универсальных коэффициентов (как при доказательстве изоморфизма (37)), а нижняя стрелка является изоморфизмом согласно шагу 3. Следовательно, верхняя стрелка также является изоморфизмом. Далее, можно доказать (задача), что если гомоморфизм $H^k(E; F) \xrightarrow{\smile\theta} H^{k+n}(E, E \setminus B; F)$ является изоморфизмом для любого поля F, то он также является изоморфизмом с целыми коэффициентами. □

Рассматривая группы гомологий с коэффициентами в коммутативном кольце R с единицей, получим определение R-*ориентируемого* многообразия. (Образующей в $H_n(M, M \setminus x; R) \cong R$ называется любой обратимый элемент кольца R.) Любое многообразие $\mathbb{Z}_2$-ориентируемо, так как образующая в $\mathbb{Z}_2$ единственна. Более того, легко видеть, что ориентируемое многообразие R-ориентируемо для любого R, а неориентируемое многообразие R-ориентируемо, если $2 = 0$ в кольце R (задача).

Введём на векторном расслоении ξ евклидову метрику. Пусть $D\xi$ — пространство векторов длины $\leqslant 1$ в слоях расслония ξ, а $S\xi \subset D\xi$ — подпространство векторов длины 1. Тогда $D\xi \to B$ — локально тривиальное расслоение со слоем D^n, а $S\xi \to B$ — расслоение со слоем S^{n-1}.

Факторпространство $Th\,\xi = D\xi/S\xi$ называется *пространством Тома* расслоения ξ. Мы имеем

$$H^*(E, E\setminus B) \cong H^*(D\xi, D\xi\setminus B) \cong H^*(D\xi, S\xi) \cong \widetilde{H}^*(Th\,\xi),$$

а изоморфизм Тома приобретает вид

$$H^k(B) \xrightarrow[\cong]{\cdot\theta} \widetilde{H}^{k+n}(Th\,\xi), \qquad \theta \in H^n(Th\,\xi).$$

Пример 10.6.

1. Если ξ — тривиальное расслоение $\mathbb{R}^k \to pt$ над точкой, то $Th\,\xi = S^k$.
2. Если ξ — нульмерное расслоение $B \to B$, то $Th\,\xi = B_+ = B \sqcup pt$.
3. Имеем $Th(\xi \oplus \underline{\mathbb{R}}^k) \cong \Sigma^k\, Th\,\xi$ (k-кратная надстройка, задача).
4. Из предыдущих примеров получаем $Th(\underline{\mathbb{R}}^k) \cong (\Sigma^k B) \vee S^k$.
5. Если γ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^n$, то $Th\,\gamma \cong \mathbb{R}P^{n+1}$ (задача). Аналогично для $\mathbb{C}P^n$.

10.3. **Определение класса Эйлера, его свойства.** Пусть ξ — ориентированное n-мерное расслоение $p\colon E \to B$. Образ класса Тома $\theta(\xi) \in H^n(E, E\setminus B)$ при гомоморфизме

$$H^n(E, E\setminus B) \to H^n(E) \xrightarrow{\cong} H^n(B)$$

называется *классом Эйлера* ориентированного векторного расслоения ξ и обозначается $e(\xi) \in H^n(B)$.

Свойства класса Эйлера описываются следующей теоремой.

Теорема 10.7. *Имеем*

а) $e(f^*\xi) = f^*e(\xi)$, *где* $f^*\xi$ — *расслоение, индуцированное отображением* $f\colon B' \to B$;

б) *если* $\widetilde{\xi}$ — *расслоение* ξ *с противоположной ориентацией, то* $e(\widetilde{\xi}) = -e(\xi)$;

в) *если размерность* ξ *нечётна, то* $2e(\xi) = 0$;

г) $e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi')$ *и* $e(\xi \oplus \xi') = e(\xi) \smile e(\xi')$;

д) *если* ξ *допускает всюду ненулевое сечение, то* $e(\xi) = 0$.

Доказательство. Свойство а) следует из функториальности класса Тома, а б) следует из определения.

Если размерность слоя нечётна, то отображение $E\xi \to E\xi$, $v \mapsto -v$, задаёт обращающий ориентацию изоморфизм расслоения, т. е. изоморфизм ориентированных расслоений $\xi \xrightarrow{\cong} \widetilde{\xi}$. Тогда $e(\widetilde{\xi}) = e(\xi)$ из свойства а) и $e(\widetilde{\xi}) = -e(\xi)$ из свойства б), откуда следует свойство в).

Заметим, что $\theta(\xi \times \xi') = \theta(\xi) \times \theta(\xi') \in H^{n+n'}(E \times E', E \times E' \setminus B \times B')$, откуда получаем $e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi')$. Далее, рассмотрим диагональ $\Delta\colon B \to B \times B$, тогда $\xi \oplus \xi' = \Delta^*(\xi \times \xi')$ и $e(\xi \oplus \xi') = \Delta^*(e(\xi) \times e(\xi')) = e(\xi) \smile e(\xi')$. Свойство г) доказано.

Докажем д). Ненулевое сечение $s\colon B \to E\setminus B$ даёт разложение тождественного отображения $B \to B$ в композицию $B \xrightarrow{s} E\setminus B \to E \xrightarrow{p} B$. Таким образом композиция в верхней строке является тождественным изоморфизмом:

$$\begin{array}{ccccccc} H^n(B) & \xrightarrow{p^*} & H^n(E) & \to & H^n(E\setminus B) & \xrightarrow{s^*} & H^n(B), \\ e(\xi) & \mapsto & \theta(\xi)|_E & \mapsto & 0 & \mapsto & 0. \end{array}$$

Здесь $\theta(\xi)|_E$ обозначает образ класса Тома при гомоморфизме $H^n(E, E\backslash B) \to H^n(E)$, и он переходит в нуль при гомоморфизме $H^n(E) \to H^n(E \setminus B)$, так как композиция $H^n(E, E\backslash B) \to H^n(E) \to H^n(E\backslash B)$ является нулевой (из точной последовательности пары $(E, E \setminus B)$). Отсюда $e(\xi) = 0$.

По-другому свойство д) можно установить, введя метрику на расслоении ξ. Тогда ненулевое сечение даёт разложение $\xi = \xi' \oplus \underline{\mathbb{R}}$, откуда из свойства г) получаем $e(\xi) = e(\xi') \smile e(\underline{\mathbb{R}}) = 0$. □

Можно также определить понятие *R-ориентируемого* векторного расслоения для любого коммутативного кольца R с единицей. Теорема 10.3 имеет место для R-ориентируемого расслоения ξ и даёт класс Тома $\theta(\xi) \in H^n(E, E \setminus B; R)$. Как и для R-ориентируемых многообразий, интерес представляют лишь случаи $R = \mathbb{Z}$ и $R = \mathbb{Z}_2$. Следующее утверждение показывает, что «$\mathbb{Z}_2$-аналогом» класса Эйлера является старший класс Штифеля–Уитни.

Предложение 10.8. *Пусть ξ — n-мерное векторное расслоение $p\colon E \to B$. Образ класса Тома $\theta(\xi) \in H^n(E, E \setminus B; \mathbb{Z}_2)$ при гомоморфизме*

$$H^n(E, E \setminus B; \mathbb{Z}_2) \to H^n(E; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^n(B; \mathbb{Z}_2)$$

есть класс Штифеля–Уитни $w_n(\xi)$. Если расслоение ξ ориентировано, то класс $w_n(\xi)$ получается из класса Эйлера $e(\xi)$ приведением по модулю 2.

Доказательство. Оба утверждения вытекают из сравнения свойств классов Эйлера и Штифеля–Уитни (теоремы 9.4 и 10.7) и единственности классов Штифеля–Уитни (теорема 9.9). Детали остаются в качестве задачи. □

10.4. **Связь с двойственностью Пуанкаре и эйлеровой характеристикой.** Пусть M — гладкое m-мерное подмногообразие в гладком n-мерном многообразии N. Имеет место следующая теорема о трубчатой окрестности, которая доказывается при помощи экспоненциального отображения $\mathcal{T}N \to N$; это доказательство можно найти в книгах [Ле] и [МС].

Теорема 10.9. *Существует окрестность U подмногообразия M в N, диффеоморфная пространству $E\nu$ нормального расслоения $\nu(M \subset N)$, причём диффеоморфизм переводит M в нулевое сечение расслоения M.*

Предложение 10.10. *Пусть подмногообразие M замкнуто в N. Тогда имеет место канонический изоморфизм $H^k(E\nu, E\nu \setminus M) \cong H^k(N, N \setminus M)$. Таким образом если нормальное расслоение $\nu(M \subset N)$ ориентировано, то его класс Тома можно рассматривать как элемент $\theta(\nu) \in H^{n-m}(N, N \setminus M)$. При этом класс Эйлера $e(\nu)$ является образом класса Тома при композиции*

$$H^{n-m}(N, N \setminus M) \xrightarrow{j^*} H^{n-m}(N) \xrightarrow{i^*} H^{n-m}(M),$$

где гомоморфизм j^* индуцирован отображением пар $j\colon (N, \varnothing) \to (N, N \setminus M)$, а i_* индуцирован вложением $i\colon M \to N$.

Аналогичное утверждение верно для $\mathbb{Z}_2$-класса Тома $\theta(\nu) \in H^{n-m}(N, N \setminus M; \mathbb{Z}_2)$ и класса Штифеля–Уитни $w_{n-m}(\nu) \in H^{n-m}(M; \mathbb{Z}_2)$.

Доказательство. Пусть $U \cong E\nu$ — окрестность M из теоремы 10.9. Рассмотрим открытое покрытие $N = U \cup (N \setminus M)$. Тогда из вырезания и теоремы 10.9 получаем

$$H^k(N, N \setminus M) \xrightarrow{\cong} H^k(U, U \setminus M) \cong H^k(E\nu, E\nu \setminus M).$$

Утверждение о классе Эйлера вытекает из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
H^{n-m}(N, N \setminus M) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\cong"'] & H^{n-m}(N) \arrow[d] \arrow[dr, "i^*"] & \\
H^{n-m}(E\nu, E\nu \setminus M) \arrow[r] & H^{n-m}(E\nu) \arrow[r] & H^{n-m}(M).
\end{tikzcd}$$

Утверждение для класса Штифеля–Уитни доказывается аналогично. □

Следствие 10.11. *Если замкнутое m-мерное многообразие M гладко вложено в $\mathbb{R}^{m+k}$, то $w_k(\nu) = 0$. Если M ориентируемо, то $e(\nu) = 0$.*

Теорема 10.12. *Многообразие $\mathbb{R}P^{2^k}$ нельзя гладко вложить в $\mathbb{R}^{2^{k+1}-1}$.*

Доказательство. Предположим, такое вложение существует. Тогда из вычисления в теореме 9.20 получаем $w_{2^k-1}(\nu) = t^{2^k-1} \neq 0$. Противоречие. □

Если $i\colon M \hookrightarrow N$ — вложение замкнутого ориентированного подмногообразия в замкнутом ориентированном многообразии N, то изоморфизм

$$i^*\mathcal{T}N \cong \nu(M \subset N) \oplus \mathcal{T}M \tag{38}$$

задаёт ориентацию нормального расслоения ν.

Предложение 10.13. *Пусть $i\colon M \hookrightarrow N$ — вложение замкнутого ориентированного подмногообразия в замкнутом ориентированном многообразии N с нормальным расслоением ν и $j\colon (N, \varnothing) \to (N, N \setminus M)$. Тогда класс $j^*\theta(\nu) \in H^{n-m}(N)$ двойствен по Пуанкаре к $i_*[M] \in H_m(N)$.*

Доказательство. Пусть $U \cong E\nu$ — окрестность M из теоремы 10.9. Согласно лемме 7.4 для ориентированного n-мерного многообразия U и компактного подмножества $M \subset U$ существует единственный класс $\mu_M \in H_n(U, U \setminus M)$, который при ограничении переходит в локальную ориентацию $\mu_x \in H_n(U, U \setminus x) \cong \mathbb{Z}$ для любой точки $x \in M$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H^{n-m}(N, N \setminus M) \arrow[r, "\ell^*", "\cong"'] \arrow[d, "j^*"'] & H^{n-m}(U, U \setminus M) \arrow[r, "\mu_M \frown"] & H_m(U) \arrow[r, "\cong"'] \arrow[dr, "\ell_*"'] & H_m(M) \arrow[d, "i_*"] \\
H^{n-m}(N) \arrow[rrr, "{[N]\frown}", "\cong"'] & & & H_m(N).
\end{tikzcd}$$

Здесь ℓ^* индуцирован отображением пар $\ell\colon (U, U \setminus M) \to (N, N \setminus M)$ и является изоморфизмом согласно вырезанию. Изоморфизм $H_m(U) \xrightarrow{\cong} H_m(M)$ индуцирован деформационной ретракцией $U \to M$. В нижней строке стоит изоморфизм двойственности Пуанкаре. Диаграмма коммутативна, так как для $\varphi \in H^{n-m}(N, N \setminus M)$ имеем

$$\ell_*(\mu_M \frown \ell^*\varphi) = \ell_*(\mu_M) \frown \varphi = j_*[N] \frown \varphi = [N] \frown j^*\varphi,$$

где первое и третье равенство следуют из леммы 7.8, а второе — из определения фундаментального класса. Положив $\varphi = \theta(\nu)$ в равенстве выше, получим, что двойственным по Пуанкаре классом к $j^*\theta(\nu)$ является $\ell_*(\mu_M \frown \ell^*\theta(\nu))$. Требуемое равенство $[N] \frown j^*\theta(\nu) = i_*[M]$ будет доказано, если мы проверим, что класс Тома $\theta(\nu)$ переходит в фундаментальный класс $[M]$ при композиции гомоморфизмов в верхней строке диаграммы. Это достаточно проверить для ограничений $\theta_x \in H^{n-m}(E\nu_x, E\nu_x \setminus 0)$ и $\mu_x^M \in H_m(M, M \setminus x)$ на любую точку $x \in M$, в силу единственности класса Тома и фундаментального класса. При изоморфизмах

$$H^{n-m}(E\nu_x, E\nu_x \setminus 0) \cong H^{n-m}(\mathcal{T}_xN, \mathcal{T}_xN \setminus \mathcal{T}_xM) \cong H^{n-m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{Z},$$

задаваемых разложением (38) и ориентациями, элемент θ_x переходит в каноническую образующую $\theta_0 \in H^{n-m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{Z}$. Аналогично, при изоморфизмах

$$H_n(N, N \setminus x) \cong H_n(\mathcal{T}_xN, \mathcal{T}_xN \setminus 0) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \cong \mathbb{Z}$$

класс локальной ориентации μ_x^N переходит в каноническую образующую $\mu_0^n \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \cong \mathbb{Z}$. Рассмотрим $\frown$-произведение

$$\frown\colon H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \times H^{n-m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-m}).$$

Тогда произведение образующих $\mu_0^n \frown \theta_0$ есть образующая группы $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-m}) \cong H_m(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus 0)$, т. е. μ_0^m, которая соответствует ограничению на x фундаментального класса $[M] \in H_m(M)$. ☐

Рассмотрим теперь диагональное вложение $\Delta\colon M \to M \times M$, $\Delta(x) = (x, x)$.

Лемма 10.14. *Нормальное расслоение $\nu(\Delta\colon M \to M \times M)$ канонически изоморфно касательному расслоению $\mathcal{T}M$.*

Доказательство. Вектор $(u, v) \in \mathcal{T}_xM \times \mathcal{T}_xM = \mathcal{T}_{(x,x)}(M \times M)$ касателен к подмногообразию $\Delta(M)$ тогда и только тогда, когда $u = v$ и нормален к $\Delta(M)$ тогда и только тогда, когда $u = -v$. Отображение $\mathcal{T}M \to \nu(\Delta)$, $v \mapsto (-v, v)$, даёт требуемый изоморфизм расслоений. ☐

Предположим, что многообразие M ориентировано (или когомологии рассматриваются с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$). Обозначим через

$$\theta_\Delta \in H^m(M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))$$

класс Тома нормального расслоения $\nu(\Delta)$. Для $x \in M$ обозначим через $\psi_x \in H^m(M, M \setminus x) \cong \mathbb{Z}$ класс когомологий, двойственный к локальной ориентации $\mu_x \in H_m(M, M \setminus x)$, т. е. $\langle \psi_x, \mu_x \rangle = 1$. Рассмотрим отображение

$$j_x\colon (M, M \setminus x) \to (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)), \quad y \mapsto (x, y). \tag{39}$$

Лемма 10.15. *Имеем $j_x^*\theta_\Delta = \psi_x$ для любой точки $x \in M$.*

Доказательство. Пусть U — окрестность точки $x \in M$ из теоремы 10.9, тогда мы имеем вложение $\mathcal{T}_xM \cong U \to M$. Рассмотим линейные отображения

$$\begin{aligned} &f_0, f_1\colon (\mathcal{T}_xM, \mathcal{T}_xM \setminus 0) \to (\mathcal{T}_xM \times \mathcal{T}_xM, \mathcal{T}_xM \times \mathcal{T}_xM \setminus \mathcal{T}_x\Delta(M)),\\ &f_0(v) = (0, v), \quad f_1(v) = (-v, v). \end{aligned}$$

Отображения f_0 и f_1 гомотопны посредством гомотопии $f_t(v) = (-tv, v)$. Имеем две коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{T}_xM, \mathcal{T}_xM \setminus 0) \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & (\mathcal{T}_xM \times \mathcal{T}_xM, \mathcal{T}_xM \times \mathcal{T}_xM \setminus \mathcal{T}_x\Delta(M)) \arrow[d] \\
(M, M \setminus x) \arrow[r, "j_x"] & (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{T}_xM, \mathcal{T}_xM \setminus 0) \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\cong"'] & (\mathcal{T}_xM \times \mathcal{T}_xM, \mathcal{T}_xM \times \mathcal{T}_xM \setminus \mathcal{T}_x\Delta(M)) \arrow[d] \\
(E\nu_x, E\nu_x \setminus 0) \arrow[r, "i"] & (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))
\end{tikzcd}$$

Во второй диаграмме нижнее отображение — вложение слоя нормального расслоения $\nu(\Delta\colon M \to M \times M)$, а левое — изоморфизм из леммы 10.14. Из второй диаграммы, определения класса θ_Δ и леммы 10.14 получаем $i^*\theta_\Delta = \psi_x$. Так как $f_0 \simeq f_1$, имеем $j_x^*\theta_\Delta = f_0^*\theta_\Delta = f_1^*\theta_\Delta = i^*\theta_\Delta = \psi_x$, где мы отождествляем θ_Δ с его образом в $H^m(\mathcal{T}_xM \times \mathcal{T}_xM, \mathcal{T}_xM \times \mathcal{T}_xM \setminus \mathcal{T}_x\Delta(M))$. □

Рассмотрим $\times$-умножение $\times\colon H^p(M) \times H^q(M) \to H^{p+q}(M \times M)$.

Лемма 10.16. *Для любого $\varphi \in H^k(M)$ имеем $(\varphi \times 1) \smile \nabla_M = (1 \times \varphi) \smile \nabla_M$.*

Доказательство. Пусть U — трубчатая окрестность $\Delta(M)$ в $M \times M$ из теоремы 10.9 и $p_1, p_2\colon M \times M \to M$ — проекции. Поскольку p_1 и p_2 совпадают на $\Delta(M)$, ограничение $p_1|_U$ гомотопно ограничению $p_2|_U$. Следовательно, два класса $\varphi \times 1 = p_1^*(\varphi)$ и $1 \times \varphi = p_2^*(\varphi)$ имеют один и тот же образ при гомоморфизме ограничения $H^k(M \times M) \to H^k(U)$. Тогда из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
H^k(M \times M) \arrow[r] \arrow[d, "\smile\theta_\Delta"] & H^k(U) \arrow[d, "\smile\theta_\Delta"] \\
H^{k+m}(M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)) \arrow[r, "\cong"] & H^{k+m}(U, U \setminus \Delta(M))
\end{tikzcd}$$

вытекает, что $(\varphi \times 1) \smile \theta_\Delta = (1 \times \varphi) \smile \theta_\Delta$ в $H^{k+m}(M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))$. Ограничивая на $M \times M$, получаем требуемое. □

Определим теперь *косое гомологическое произведение* или */-произведение*. Для клеточных (ко)цепей клеточных пространств X и Y определим билинейное /-произведение

$$/\colon \mathcal{C}^n(X \times Y) \times \mathcal{C}_q(Y) \to \mathcal{C}^{n-q}(X)$$

по формуле

$$(f \times g, e^q) \mapsto f\langle g, e^q\rangle$$

где $f \in \mathcal{C}^p(X)$, $g \in \mathcal{C}^{n-p}(Y)$, а e^q — клетка в Y (здесь как обычно полагаем $\langle g, e^q\rangle = 0$, если $n - p \neq q$). Эта формула однозначно определяет отображение, так как любая клеточная коцепь из $\mathcal{C}^n(X \times Y)$ является линейной комбинацией коцепей вида $f \times g$. (Сравните с клеточным определением $\times$-произведения в §6.3.)

Предложение 10.17. *Для $h \in \mathcal{C}^n(X \times Y)$ и $a \in \mathcal{C}_q(Y)$ выполнено равенство*

$$d(h/a) = dh/a + (-1)^{n-q} h/\partial a.$$

Доказательство. Можно считать $h = f \times g$, $f \in \mathcal{C}^p(X)$, $g \in \mathcal{C}^{n-p}(Y)$, $a = e^q$. Тогда

$$\begin{aligned} &d(h/a) = d(f \times g/e^q) = d(f\langle g, e^q\rangle) = df\langle g, e^q\rangle,\\ &dh/a = d(f \times g)/e^q = (df \times g + (-1)^p f \times dg)/e^q = df\langle g, e^q\rangle + (-1)^p f\langle dg, e^q\rangle,\\ &h/\partial a = (f \times g)/\partial e^q = f\langle g, \partial e^q\rangle = f\langle dg, e^q\rangle. \end{aligned}$$

При этом $\langle dg, e^q\rangle \neq 0$ только при $n-p+1 = q$, т. е. $n-q = p-1$. Умножая последнее равенство на $(-1)^{n-q}$ и складывая, получим требуемое. $\square$

Из предложения 10.17 следует, что /-произведение коцикла на цикл есть коцикл, произведение коцикла на границу есть кограница и т. д., так что определено билинейное гомологическое /-произведение

$$/\colon H^n(X \times Y) \times H_q(Y) \to H^{n-q}(X), \quad (\eta, \alpha) \mapsto \eta/\alpha.$$

Предложение 10.18. *Имеем*

а) $(\varphi \times \psi)/\alpha = \varphi\langle\psi, \alpha\rangle$ *для* $\varphi \in H^p(X)$, $\psi \in H^{n-p}(Y)$ *и* $\alpha \in H_q(Y)$*;*
б) $\langle\eta/\alpha, \beta\rangle = \langle\eta, \beta \times \alpha\rangle$ *для* $\eta \in H^n(X \times Y)$, $\alpha \in H_q(Y)$ *и* $\beta \in H_{n-q}(X)$*;*
в) $((\varphi \times 1) \smile \eta)/\alpha = \varphi \smile (\eta/\alpha)$ *для* $\varphi \in H^p(X)$, $\eta \in H^n(X \times Y)$ *и* $\alpha \in H_q(Y)$*.*

Доказательство. Равенства а) и б) выполнены на уровне коцепей и вытекают из определения цепного /-произведения. Для доказательства в) можно считать, что $\eta = \chi \times \psi$, $\chi \in H^{n-q}(X)$, $\psi \in H^q(Y)$. Тогда имеем

$$((\varphi \times 1) \smile (\chi \times \psi))/\alpha = ((\varphi \smile \chi) \times \psi)/\alpha = (\varphi \smile \chi)\langle\psi, \alpha\rangle = \varphi \smile (\eta/\alpha),$$

где в первом равенстве мы воспользовались формулой из задачи 6.14. $\square$

При ограничении на $(M \times M, \varnothing) \subset (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))$ класс Тома θ_Δ переходит в класс $\nabla_M \in H^m(M \times M)$, который называется *диагональным когомологическим классом.* Если многообразие M замкнуто, то класс ∇_M двойствен по Пуанкаре к $\Delta_*[M] \in H_m(M \times M)$ согласно предложению 10.13.

Лемма 10.19. *Если многообразие M замкнуто и ориентировано, то $\nabla_M/[M] = 1 \in H^0(M)$.*

Доказательство. Рассмотрим вложение $i_x\colon x \to M$. Достаточно доказать, что $i_x^*(\nabla_M/[M]) = 1 \in H^0(x)$ для любой точки $x \in M$. Рассмотрим отображение j_x (39) и коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} H^m(M \times M) \arrow[r, "/[M]"] \arrow[d, "(i_x \times \mathrm{id})^*"'] & H^0(M) \arrow[d, "i_x^*"] \\ H^m(x \times M) \arrow[r, "/[M]"] & H^0(x) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, hook, "r_x"] \arrow[d, "j_x"'] & (M, M \setminus x) \arrow[d, "j_x"] \\ M \times M \arrow[r, hook, "r_\Delta"] & (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)) \end{tikzcd}$$

Из первой диаграммы получаем

$$i_x^*(\nabla_M/[M]) = ((i_x \times \mathrm{id})^*\nabla_M)/[M] = (1 \times j_x^*\nabla_M)/[M] = 1 \cdot \langle j_x^*\nabla_M, [M]\rangle$$

в $H^0(x)$, где в последнем равенстве мы воспользовались предложением 10.18 а). Из определения ∇_M и второй диаграммы получаем

$$\langle j_x^*\nabla_M, [M]\rangle = \langle j_x^* r_\Delta^*(\theta_\Delta), [M]\rangle = \langle r_x^* j_x^*(\theta_\Delta), [M]\rangle = \langle r_x^*\psi_x, [M]\rangle = \langle\psi_x, \mu_x\rangle = 1,$$

где в третьем равенстве мы воспользовались леммой 10.15. $\square$

Теорема 10.20. *Пусть M — замкнутое многообразие и F-поле. Предположим, что M ориентируемо или поле F имеет характеристику 2. Пусть $\psi_1, \dots, \psi_r$ — базис в $H^*(M;F)$ и $\widetilde{\psi}_1, \dots, \widetilde{\psi}_r$ — двойственный по Пуанкаре базис в $H^*(M;F)$, т. е. $\langle \psi_i \smile \widetilde{\psi}_j, [M]\rangle = \delta_{ij}$. Тогда*

$$\nabla_M = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{\dim \psi_i} \psi_i \times \widetilde{\psi}_i, \qquad e(\mathcal{T}M) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{\dim \psi_i} \psi_i \smile \widetilde{\psi}_i.$$

Доказательство. Для коэффициентов в поле имеем $H^*(M \times M; F) = H^*(M;F) \otimes H^*(M;F)$. Поэтому мы можем записать $\nabla_M = \sum_{i=1}^{r} \psi_i \times \zeta_i$ для некоторых классов $\zeta_i \in H^*(M;F)$, $\dim \psi_i + \dim \zeta_i = m$.

Из леммы 10.16 имеем $(\varphi \times 1) \smile \nabla_M = (1 \times \varphi) \smile \nabla_M$ для любого $\varphi \in H^*(M;F)$. Применим $/[M]$ к обеим частям этого соотношения. Слева получим

$$((\varphi \times 1) \smile \nabla_M)/[M] = \varphi \smile (\nabla_M/[M]) = \varphi$$

в силу предложения 10.18 в) и леммы 10.19, а справа

$$\Big((1 \times \varphi) \smile \sum_j \psi_j \times \zeta_j\Big)/[M] = \sum_j (-1)^{\dim \varphi \dim \psi_j} (\psi_j \times (\varphi \smile \zeta_j))/[M] =$$
$$= \sum_j (-1)^{\dim \varphi \dim \psi_j} \psi_j \langle \varphi \smile \zeta_j, [M]\rangle$$

в силу предложения 10.18 а). Полагая $\varphi = \psi_i$, получим

$$(-1)^{\dim \psi_i \dim \psi_j} \langle \psi_i \smile \zeta_j, [M]\rangle = \delta_{ij}.$$

Отсюда $\zeta_j = (-1)^{\dim \psi_j} \widetilde{\psi}_j$ и $\nabla_M = \sum_j (-1)^{\dim \psi_j} \psi_j \times \widetilde{\psi}_j$.

Формула для $e(\mathcal{T}M)$ следует из определения: $e(\mathcal{T}M) = \Delta^*(\nabla_M)$. □

Из теоремы 3.8 и формул универсальных коэффициентов вытекает, что эйлерову характеристику многообразия M (или любого конечного клеточного пространства) можно вычислять через когомологии с коэффициентами в произвольном поле F, и результат не зависит от F:

$$\chi(M) = \sum_k (-1)^k \dim H^k(M;F).$$

Теорема 10.21. *Для гладкого замкнутого ориентированного многообразия M*

$$\langle e(\mathcal{T}M), [M]\rangle = \chi(M).$$

Если M неориентировано, то $w_m(\mathcal{T}M), [M]\rangle = \chi(M) \mod 2$.

Доказательство. Вычисляя $e(\mathcal{T}M) = \sum_i (-1)^{\dim \psi_i} \psi_i \smile \widetilde{\psi}_i$ на фундаментальном классе, получаем $\langle e(\mathcal{T}M), [M]\rangle = \sum_i (-1)^{\dim \psi_i} = \chi(M)$. □

Следствие 10.22. *Имеем $\chi(M) = \langle \nabla_M \smile \nabla_M, [M \times M]\rangle$.*

Доказательство. Так как ∇_M двойствен по Пуанкаре к $\Delta_*[M]$, имеем

$$\chi(M) = \langle e(\mathcal{T}M), [M]\rangle = \langle \Delta^* \nabla_M, [M]\rangle = \langle \nabla_M, \Delta_*[M]\rangle = \Delta_*[M] \frown \nabla_M =$$
$$= ([M \times M] \frown \nabla_M) \frown \nabla_M = [M \times M] \frown (\nabla_M \smile \nabla_M) = \langle \nabla_M \smile \nabla_M, [M \times M]\rangle. \quad \square$$

Гладкие подмногообразия M_1 и M_2 в N *пересекаются трансверсально*, если в каждой точке $x \in M_1 \cap M_2$ выполнено $\mathcal{T}_x M_1 + \mathcal{T}_x M_2 = \mathcal{T}_x N$. Если M_1 и M_2 имеют дополнительные размерности (т. е. $m_1 + m_2 = n$), то точки трансверсального пересечения образуют дискретное подмножество (конечное, если N компактно). Если M_1, M_2 и N ориентированы, то каждой точке пересечения $x \in M_1 \cap M_2$ присваивается *знак*, равный $+1$, если ориентации пространств левой и правой части равенства $\mathcal{T}_x M_1 \oplus \mathcal{T}_x M_2 = \mathcal{T}_x N$ совпадают, и -1 в противном случае. Сумма знаков точек пересечения называется *индексом пересечения* ориентированных подмногооразий M_1 и M_2 дополнительных размерностей в ориентированном многообразии N.

В дифференциальной топологии доказывается, что индекс пересечения равен $\langle D[M_1] \smile D[M_2], [N] \rangle$, где $D[M_i] \in H^{n-m_i}(N)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к фундаментальному классу $[M_i] \in H_{m_i}(N)$. Это также позволяет определить индекс пересечения для подмногообразий M_1 и M_2, пересекающихся не трансверсально (в частности, *индекс самопересечения* многообразия половинной размерности в N). Для этого необходимо «пошевелить» одно из многообразий, например M_1, т. е. заменить вложение M_1 в N на гомотопное вложение так, что новое подмногообразие $\widetilde{M}_1$ пересекает M_2 трансверсально. Индекс пересечения M_1 и M_2 тогда можно определить как индекс пересечения $\widetilde{M}_1$ и M_2. При этом мы имеем $\langle D[M_1] \smile D[M_2], [N] \rangle = \langle D[\widetilde{M}_1] \smile D[M_2], [N] \rangle$, так как $[M_1] = [\widetilde{M}_1]$.

Так как класс ∇_M двойствен по Пуанкаре к диагональному подмногообразию $\Delta(M)$ в $M \times M$, выражение $\langle \nabla_M \smile \nabla_M, [M \times M] \rangle$ в правой части соотношения из следствия 10.22 есть индекс самопересечения $\Delta(M)$.

Следствие 10.23. *Эйлерова характеристика замкнутого многообразия M равна индексу самопересечения диагонального подмногообразия $\Delta(M)$ в $M \times M$.*

Так как нормальное расслоение к $\Delta(M)$ в $M \times M$ канонически изоморфно касательному расслоению $\mathcal{T}M$, вместо того, чтобы «шевелить» $\Delta(M)$ в $M \times M$, мы можем шевелить нулевое сечение в пространстве $\mathcal{T}M$. Сечения касательного расслоения $\mathcal{T}M$ — это векторные поля на M, а нули сечения — особые точки векторного поля. Подмногообразие $\widetilde{M} \subset \mathcal{T}M$, задаваемое векторным полем (сечением), трансверсально к нулевому сечению $M \subset \mathcal{T}M$ тогда и только тогда, когда векторное поле имеет изолированные особенности.

Следствие 10.24. *Сумма индексов особых точек векторного поля с изолированными особенностями на гладком замкнутом многообразии M равна эйлеровой характеристике $\chi(M)$.*

Задачи и упражнения.

10.25. Докажите, что для любой абелевой группы H имеет место изоморфизм

$$\operatorname{Hom}(\varinjlim G_\alpha, H) \xrightarrow{\cong} \varprojlim \operatorname{Hom}(G_\alpha, H).$$

10.26. Докажите, что если гомоморфизм $H^k(E; F) \xrightarrow{\smile\theta} H^{k+n}(E, E \setminus B; F)$ является изоморфизмом для любого поля F, то он является изоморфизмом с целыми коэффициентами (а также с коэффициентами в любом коммутативном кольце с единицей).

10.27. Докажите, что для пространства Тома $Th\,\xi = D\xi / S\xi$ вещественного векторного расслоения ξ имеем $Th(\xi \oplus \underline{\mathbb{R}}^k) \cong \Sigma^k Th\,\xi$, где $\underline{\mathbb{R}}^k$ — тривиальное расслоение над той же базой, а Σ^k — k-кратная надстройка.

10.28. Докажите, что пространство Тома $Th\,\xi$ вещественного (комплексного) векторного расслоения ξ над клеточным пространством гомеоморфно $\mathbb{R}P(\xi\oplus\underline{\mathbb{R}})/\mathbb{R}P(\xi)$ (соответственно, $\mathbb{C}P(\xi\oplus\underline{\mathbb{C}})/\mathbb{C}P(\xi)$).

10.29. Докажите, что пространство Тома тавтологического расслоения над $\mathbb{R}P^n$ (соответственно, над $\mathbb{C}P^n$) гомеоморфно $\mathbb{R}P^{n+1}$ (соответственно, $\mathbb{C}P^{n+1}$).

10.30. Докажите, что вещественное векторное расслоение ξ ориентируемо тогда и только тогда, когда $w_1(\xi)=0$.

10.31. Докажите, что при гомоморфизме $H^n(B;\mathbb{Z})\to H^n(B;\mathbb{Z}_2)$ класс Эйлера $e(\xi)$ ориентированного n-мерного расслоения ξ переходит в класс Штифеля–Уитни $w_n(\xi)$.

10.32. Пусть η^n — тавтологическое расслоение над $BO(n)=G_n(\mathbb{R}^\infty)$. Докажите, что расслоение $\eta^n\oplus\eta^n$ ориентируемо и $e(\eta^n\oplus\eta^n)\neq 0$.

10.33. Пусть ξ — комплексное n-мерное векторное расслоение и $\xi_{\mathbb{R}}$ — его овеществление. Докажите, что $e(\xi_{\mathbb{R}})=c_n(\xi)$.

10.34. При каких n на сфере S^n существует нигде не обращающееся в нуль векторное поле? Тот же вопрос для $\mathbb{C}P^n$.

11. Классы Понтрягина

11.1. **Общее понятие характеристического класса.** Пусть $\mathcal{V}$ — некоторое семейство векторных расслоений фиксированной размерности n, замкнутое относительно перехода к индуцированному расслоению, и пусть R — коммутативное кольцо с единицей. Назовём k-мерным *характеристическим классом* расслоений из $\mathcal{V}$ с коэффициентами в R соответствие

$$\{\text{векторные расслоения из } \mathcal{V}\}\to\{\text{классы из } H^k(B;R)\},\quad \xi=(p\colon E\to B)\mapsto c(\xi),$$

удовлетворяющее соотношению $f^*c(\xi)=c(f^*\xi)$ для $f\colon B'\to B$.

Примеры — классы Штифеля–Уитни для $\mathcal{V}=\{\text{вещественные расслоения}\}$ и $R=\mathbb{Z}_2$, классы Чженя для $\mathcal{V}=\{\text{комплексные расслоения}\}$ и $R=\mathbb{Z}$, а также класс Эйлера для $\mathcal{V}=\{\text{ориентированные расслоения}\}$ и $R=\mathbb{Z}$.

Характеристические классы всевозможных размерностей с коэффициентами в R образуют кольцо относительно когомологического умножения.

Предложение 11.1. *Кольцо характеристических классов вещественных (комплексных) n-мерных расслоений с коэффициентами в R изоморфно $H^*(BO(n);R)$ (соответственно, $H^*(BU(n);R)$).*

Доказательство. Это следует из определения характеристических классов, классифицирующих пространств $BO(n)=G_n(\mathbb{R}^\infty)$, $BU(n)=G_n(\mathbb{C}^\infty)$ и теоремы 8.15. □

Из теорем 9.12 и 9.14 мы знаем как устроены кольца когомологий $BO(n)$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ и $BU(n)$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ (а значит, и с коэффициентами в любом R): $H^*(BO(n);\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2[w_1,\dots,w_n]$, $H^*(BU(n);\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}[c_1,\dots,c_n]$, где w_i — универсальные классы Штифеля–Уитни, а c_i — универсальные классы Чженя.

Следствие 11.2. *Любой характеристический класс вещественных (комплексных) n-мерных расслоений с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ (в $\mathbb{Z}$) есть многочлен от классов Штифеля–Уитни (Чженя), причём разным многочленам соответствуют разные характеристические классы.*

Аналогичное описание характеристических классов вещественных или ориентированных расслоений с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ отсутствует, так как кольца $H^*(BO(n);\mathbb{Z})$ и $H^*(BSO(n);\mathbb{Z})$ устроены сложно. Некоторое разумное приближение дают классы Понтрягина, как мы увидим далее. Классы Понтрягина также естественно возникают при рассмотрении кватернионных векторных расслоений.

11.2. **Связь классов Штифеля–Уитни комплексного расслоения с его классами Чженя.**

Теорема 11.3. *Пусть ξ — комплексное n-мерное расслоение над B и $\xi_{\mathbb{R}}$ — его овеществление. Тогда $w_{2k}(\xi_{\mathbb{R}}) = c_k(\xi) \mod 2$ и $w_{2k+1}(\xi_{\mathbb{R}}) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим проективизацию $\mathbb{C}P(\xi) \to B$, тавтологическое одномерное комплексное расслоение $\gamma = \gamma(\mathbb{C}P(\xi))$ над $\mathbb{C}P(\xi)$, его овеществление $\gamma_{\mathbb{R}}$ (двумерное вещественное расслоение над $\mathbb{C}P(\xi)$) и проективизацию $\mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}})$. Мы имеем $\mathbb{R}P(\xi_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}})$, так как любая вещественная прямая в слое $\xi_{\mathbb{R}}$ однозначно задаёт содержащую её комплексную прямую в слое ξ. Получаем последовательность расслоений

$$\mathbb{R}P(\xi_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P(\xi) \to B,$$

где π — расслоение со слоем $\mathbb{R}P^1$.

Согласно теоремам 9.2 и 9.3 о когомологиях проективизации имеем

$$\begin{array}{rcl} H^*(\mathbb{C}P(\xi)) & \cong & H^*(B)[v]\,/\,(v^n + c_1(\xi)v^{n-1} + \ldots + c_n(\xi) = 0), \\ H^*(\mathbb{R}P(\xi_{\mathbb{R}})) & \cong & H^*(B)[u]\,/\,(u^{2n} + w_1(\xi_{\mathbb{R}})u^{2n-1} + \ldots + w_{2n}(\xi_{\mathbb{R}}) = 0), \\ \shortparallel & & \\ H^*(\mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}})) & \cong & H^*(\mathbb{C}P(\xi))[t]\,/\,(t^2 + \pi^*w_1(\gamma_{\mathbb{R}})t + \pi^*w_2\big(\gamma_{\mathbb{R}}) = 0). \end{array} \tag{40}$$

Здесь все когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$, $v = e(\gamma_{\mathbb{R}}) = w_2(\gamma_{\mathbb{R}}) = c_1(\gamma) \mod 2$. Обозначим $\gamma' = \gamma(\mathbb{R}P(\xi_{\mathbb{R}})) = \gamma(\mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}}))$ — тавтологическое одномерное вещественное расслоение над $\mathbb{R}P(\xi_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}})$. Тогда $u = t = w_1(\gamma')$.

Мы имеем $\pi^*\gamma_{\mathbb{R}} \cong \gamma' \oplus \gamma'$; изоморфизм переводит $(x, y) \in E(\gamma' \oplus \gamma')$ в $x + iy$. Поэтому $\pi^*w_1(\gamma_{\mathbb{R}}) = 0$ и $\pi^*w_2(\gamma_{\mathbb{R}}) = w_1(\gamma')^2$, т. е. $\pi^*v = t^2 = u^2$. Подставляя это в (40), получаем

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{R}P(\xi_{\mathbb{R}})) = H^*(\mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}})) \cong H^*(\mathbb{C}P(\xi))[u]\,/\,(u^2 = \pi^*v) \cong \\ \cong H^*(B)[u, \pi^*v]\,/\,\big((\pi^*v)^n + c_1(\xi)(\pi^*v)^{n-1} + \ldots + c_n(\xi) = 0,\ u^2 = \pi^*v\big) = \\ = H^*(B)[u]\,/\,(u^{2n} + c_1(\xi)u^{2n-2} + \ldots + c_n(\xi) = 0). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при u^k со второй формулой (40), получим требуемое. $\square$

Рассмотрим отображение $r\colon BU(n) = G_n(\mathbb{C}^\infty) \to G_{2n}(\mathbb{R}^\infty) = BO(2n)$, задаваемое овеществлением (забыванием комплексной структуры) n-мерных комплексных плоскостей. По определению, это отображение классифицирует овеществление тавтологического комплексного расслоения γ^n над $BU(n)$.

Предложение 11.4. *Гомоморфизм*

$$H^*(BO(2n);\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \ldots, w_{2n}] \to \mathbb{Z}_2[c_1, c_2, \ldots, c_n] = H^*(BU(n);\mathbb{Z}_2),$$

индуцированный забыванием комплексной структуры $r\colon BU(n) \to BO(2n)$, переводит w_{2k} в c_k и w_{2k+1} в 0.

Доказательство. Пусть γ — тавтологическое комплексное расслоение над $BU(n)$, а γ' — тавтологическое вещественное расслоение над $BO(2n)$. Тогда $r^*\gamma' = \gamma_{\mathbb{R}}$,

$$r^* w_{2k} = r^*(w_{2k}(\gamma')) = w_{2k}(r^*\gamma') = w_{2k}(\gamma_{\mathbb{R}}) = c_k(\gamma) = c_k \mod 2,$$
$$r^* w_{2k+1} = r^*(w_{2k+1}(\gamma')) = w_{2k+1}(r^*\gamma') = w_{2k+1}(\gamma_{\mathbb{R}}) = 0. \qquad \square$$

11.3. **Кватернионные классы Понтрягина.** *Кватернионы* определяются как элементы четырёхмерного векторного пространства $\mathbb{H} = \mathbb{R}\langle 1, i, j, k\rangle$ с базисом $1, i, j, k$, т. е. как линейные комбинации $a + bi + cj + dk$, где a, b, c, d — вещественные числа. Правило умножения символов i, j, k

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

распространённое по билинейности, превращает $\mathbb{H}$ в ассоциативную (но не коммутативную алгебру) алгебру с делением над $\mathbb{R}$.

Кватернионным векторным пространством называется вещественное векторное пространство V со структурой левого $\mathbb{H}$-модуля, продолжающей структуру $\mathbb{R}$-модуля (т. е. умножение на вещественные скаляры осуществляется как в исходном V). Вещественная размерность кватернионного векторного пространства кратна 4.

Если W — кватернионное векторное пространство, то его *комплексификацией* $W_{\mathbb{C}}$ называется комплексное векторное пространство, получаемое забыванием умножений на j, k (остаётся только умножение на комплексные скаляры). Если W имело размерность n над $\mathbb{H}$, то $W_{\mathbb{C}}$ имеет размерность $2n$ над $\mathbb{C}$.

Если V — комплексное векторное пространство, то его *кватернионизацией* называется кватернионное пространство $V_{\mathbb{H}} = V \otimes \mathbb{H}$. В более явном виде, $V_{\mathbb{H}}$ представляет собой пространство $V \oplus \overline{V}$, в котором умножение на кватернионную единицу j определено формулой $j(x, y) = (-y, x)$. Так как $i(x, y) = (ix, -iy)$ в $V \oplus \overline{V}$, имеем $k(x, y) = ij(x, y) = (-iy, -ix)$. Непосредственная проверка показывает, что эти формулы действительно определяют структуру левого $\mathbb{H}$-модуля на $V \oplus \overline{V}$.

Кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$ определяется как множество одномерных кватернионных подпространств (прямых) в $\mathbb{H}^{n+1}$, аналогично вещественному и комплексному случаям (умножение на кватернионные скаляры всегда осуществляется слева).

Кватернионным n-мерным векторным расслоением называется вещественное $4n$-мерное расслоение, слои которого являются кватернионными векторными пространствами, а тривиализации — $\mathbb{H}$-линейными отображениями. Описанные выше операции над векторными пространствами определены и для векторных расслоений. Так, определены комплексификация $\eta_{\mathbb{C}}$ кватернионного векторного расслоения η, кватернионизация $\xi_{\mathbb{H}}$ комплексного расслоения ξ и кватернионная проективизация $\mathbb{H}P(\eta)$.

Следующая теорема выводится из теоремы Лере–Хирша аналогично теореме 9.3.

Теорема 11.5. *Пусть η — кватернионное n-мерное векторное расслоение над клеточным пространством B. Тогда кольцо $H^*(\mathbb{H}P(\eta); \mathbb{Z})$ изоморфно факторкольцу кольца многочленов с коэффициентами в $H^*(B)$ от одной образующей $v_\eta \in H^4(\mathbb{H}P(\eta))$ по единственному соотношению*

$$v_\eta^n + p_1(\eta) \cdot v_\eta^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(\eta) \cdot v_\eta + p_n(\eta) \cdot 1 = 0,$$

где классы $p_i(\eta) \in H^{4i}(B)$, $i = 1, \ldots, n$, определяются расслоением η.

Классы $p_i(\eta) \in H^{4i}(B)$ называются *кватернионными классами Понтрягина* n-мерного кватернионного векторного расслоения η.

Следующая теорема, аналогичная теореме 11.3, показывает, что кватернионные классы Понтрягина сводятся к классам Чженя.

Теорема 11.6. *Пусть η — кватернионное n-мерное расслоение над B и $\eta_{\mathbb{C}}$ — его комплексификация. Тогда $p_k(\eta) = (-1)^k c_{2k}(\eta_{\mathbb{C}})$ и $c_{2k+1}(\eta_{\mathbb{C}}) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим проективизацию $\mathbb{H}P(\eta) \to B$, тавтологическое одномерное кватернионное расслоение $\gamma = \gamma(\mathbb{H}P(\eta))$ над $\mathbb{H}P(\eta)$, его овеществление $\gamma_{\mathbb{C}}$ (двумерное комплексное расслоение над $\mathbb{H}P(\eta)$) и проективизацию $\mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})$. Мы имеем $\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})$, так как любая комплексная прямая в слое $\eta_{\mathbb{C}}$ однозначно задаёт содержащую её кватернионную прямую в слое η. Получаем последовательность расслоений

$$\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{H}P(\eta) \to B,$$

где π — расслоение со слоем $\mathbb{C}P^1$.

Согласно теоремам 9.3 и 11.5 о когомологиях проективизации имеем

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{H}P(\eta)) &\cong H^*(B)[v] \,/\, (v^n + p_1(\eta)v^{n-1} + \ldots + p_n(\eta) = 0), \\ H^*(\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}})) &\cong H^*(B)[u] \,/\, (u^{2n} + c_1(\eta_{\mathbb{C}})u^{2n-1} + \ldots + c_{2n}(\eta_{\mathbb{C}}) = 0), \\ \| \quad & \\ H^*(\mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})) &\cong H^*(\mathbb{H}P(\eta))[t] \,/\, (t^2 + \pi^*c_1(\gamma_{\mathbb{C}})t + \pi^*c_2\big(\gamma_{\mathbb{C}}) = 0\big). \end{aligned} \tag{41}$$

Мы имеем $v = c_2(\gamma_{\mathbb{C}}) = p_1(\gamma)$. Обозначим $\gamma' = \gamma(\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}})) = \gamma(\mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}}))$ — тавтологическое одномерное комплексное расслоение над $\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})$. Тогда $u = t = c_1(\gamma')$.

Мы имеем $\pi^*\gamma_{\mathbb{C}} \cong \gamma' \oplus \overline{\gamma}'$; изоморфизм переводит $(x, y) \in E(\gamma' \oplus \overline{\gamma}')$ в $x + jy$. Поэтому $\pi^*c_1(\gamma_{\mathbb{C}}) = 0$ и $\pi^*c_2(\gamma_{\mathbb{C}}) = -c_1(\gamma')^2$, т. е. $\pi^*v = -t^2 = -u^2$. Подставим это в (41):

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}})) = H^*(\mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})) &\cong H^*(\mathbb{H}P(\eta))[u] \,/\, (u^2 = -\pi^*v) \cong \\ &\cong H^*(B)[u, \pi^*v] \,/\, \big((\pi^*v)^n + p_1(\eta)(\pi^*v)^{n-1} + \ldots + p_n(\eta) = 0,\ u^2 = -\pi^*v\big) = \\ &= H^*(B)[u] \,/\, (u^{2n} - p_1(\eta)u^{2n-2} + \ldots + (-1)^n p_n(\eta) = 0). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при u^k со второй формулой (41), получим требуемое. □

Кватернионное векторное расслоение — это весьма богатая геометрическая структура, и естественно возникающих кватернионных расслоений мало.

Одна из трудностей, возникающих при работе с кватернионными расслоениями, заключается в том, что множество $\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(U, W)$ кватернионно-линейных отображений кватернионных пространств U и W не является кватернионным пространством (левым $\mathbb{H}$-модулем), в силу некоммутативности умножения кватернионов. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(U, W)$ не имеет даже естественной комплексной структуры и является лишь вещественным векторным пространством.

Пример 11.7. Рассмотрим касательное расслоение $\mathcal{T}\mathbb{H}P^n$ к кватернионному проективному пространству. По аналогии с предложением 8.6 доказывается, что имеет место изоморфизм *вещественных* расслоений $\mathcal{T}\mathbb{H}P^n \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \gamma^{\perp})$, где γ — тавтологическое одномерное кватернионное расслоение над $\mathbb{H}P^n$. Тогда мы имеем

$$\mathcal{T}\mathbb{H}P^n \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma,\gamma) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma,\gamma^{\perp}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma,\gamma) = \\ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma,\gamma^{\perp}\oplus\gamma) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma,\underline{\mathbb{H}}^{n+1}) = \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma,\underline{\mathbb{H}}).$$

Расслоение $\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma,\underline{\mathbb{H}})$ изоморфно, как вещественное расслоение, расслоению $\gamma_{\mathbb{R}}$. Расслоение $\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma,\gamma)$ является четырёхмерным вещественным расслоением, которое оказывается нетривиальным (в отличие от комплексного случая).

Можно доказать, что кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$ не является кватернионным многообразием даже в слабом смысле, т. е. касательное расслоение $\mathcal{T}\mathbb{H}P^n$ не является кватернионным расслоением, и даже не допускает комплексной структрукры.

11.4. **Классы Понтрягина вещественных расслоений.** Пусть ξ — вещественное векторное расслоение над клеточной базой B. Его k-м *характеристическим классом Понтрягина* называется

$$p_k(\xi) = (-1)^k c_{2k}(\xi_{\mathbb{C}}) \in H^{4k}(B).$$

Также вводится полный класс Понтрягина $p(\xi) = 1 + p_1(\xi) + p_2(\xi) + \ldots$

Связь с кватернионными классами Понтрягина описывается через комплексные расслоения:

Предложение 11.8. *Для комплексного расслоения ζ имеем $p_k(\zeta_{\mathbb{R}}) = p_k(\zeta_{\mathbb{H}})$, где слева стоит класс Понтрягина вещественного расслоения, а справа — кватернионного.*

Доказательство. Имеем

$$p_k(\zeta_{\mathbb{R}}) = (-1)^k c_{2k}((\zeta_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}) = (-1)^k c_{2k}(\zeta\oplus\overline{\zeta}) = (-1)^k c_{2k}((\zeta_{\mathbb{H}})_{\mathbb{C}}) = p_k(\zeta_{\mathbb{H}}),$$

где последнее равенство вытекает из теоремы 11.6. □

Предложение 11.9. *Пусть ξ — вещественное векторное расслоение.*

а) $\xi_{\mathbb{C}} \cong \overline{\xi}_{\mathbb{C}}$ *(изоморфизм комплексных расслоений);*
б) $2c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}}) = 0$. *Если $\xi_{\mathbb{C}} = \eta_{\mathbb{C}}$ для кватернионного η, то $c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}}) = 0$.*

Доказательство. Комплексификация $\xi_{\mathbb{C}}$ представляет собой расслоение $\xi\oplus\xi$ с оператором комплексной структуры $i(x,y) = (-y,x)$, а комплексная структура на $\overline{\xi}_{\mathbb{C}}$ задаётся как $i(x,y) = (y,-x)$. Тогда отображение $(x,y)\mapsto(x,-y)$ задаёт $\mathbb{C}$-линейный изоморфизм $\xi_{\mathbb{C}} \to \overline{\xi}_{\mathbb{C}}$, что доказывает а).

Так как $c_{2k+1}(\overline{\zeta}) = -c_{2k+1}(\zeta)$ для любого комплексного расслоения ζ, получаем $c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}}) = c_{2k+1}(\overline{\xi}_{\mathbb{C}}) = -c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}})$, т. е. $2c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}}) = 0$. Второе утверждение из б) следует из теоремы 11.6. □

Теорема 11.10 (формула Уитни для классов Понтрягина). *Для любых вещественных расслоений ξ и η имеем $2(p(\xi\oplus\eta) - p(\xi)p(\eta)) = 0$.*

Доказательство. Это следует из формулы Уитни для классов Чженя и предложения 11.9 б). □

Если ζ — n-мерное комплексное расслоение, то, пользуясь принципом расщепления (34), мы можем записать $c(\zeta) = \prod_{i=1}^n (1+t_i)$. Тогда имеем $c(\overline{\zeta}) = \prod_{i=1}^n (1-t_i)$, $c((\zeta_\mathbb{R})_\mathbb{C}) = c(\zeta \oplus \overline{\zeta}) = \prod_{i=1}^n (1-t_i^2)$ и

$$p(\zeta_\mathbb{R}) = \prod_{i=1}^n (1+t_i^2),$$

т. е. $p_i(\zeta_\mathbb{R}) = \sigma_i(t_1^2, \dots, t_n^2)$.

Пример 11.11. Вычислим классы Понтрягина (овеществления касательного расслоения) $\mathbb{C}P^n$. Мы имеем $\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong \overline{\gamma}^{\oplus(n+1)}$, откуда $c(\mathbb{C}P^n) = (1+t)^{n+1}$, где $t = c_1(\overline{\gamma}) \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ — образующая. Следовательно,

$$p(\mathbb{C}P^n) = (1+t^2)^{n+1}, \quad p_k(\mathbb{C}P^n) = C_{n+1}^k t^{2k} \text{ при } k \leqslant \frac{n}{2}.$$

Так как любое вещественное n-мерное расслоение ξ над клеточной базой B классифицируется отображением $f\colon B \to BO(n)$, можно рассмотреть *универсальные классы Понтрягина* $p_k = p_k(\gamma^n)$, где γ^n — тавтологическое расслоение над $BO(n) = G_n(\mathbb{R}^\infty)$. Тогда мы имеем $p_k(\xi) = f^* p_k$.

Целочисленное кольцо когомологий $H^*(BO(n))$ не порождается классами p_k и устроено достаточно сложно. Как мы увидим, кольцо когомологий $BO(n)$ порождается универсальным классами Понтрягина, если в кольце коэффициентов обратить 2. Далее в этом разделе все когомологии будут рассматриваться с коэффициентами в коммутативном кольце $R \ni \frac{1}{2}$. Например, $R = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ или $R = \mathbb{Q}$.

Предложение 11.12. *Пусть $R \ni \frac{1}{2}$. Кольцо $H^*(BO(n); R)$ содержит подкольцо многочленов $R[p_1, \dots, p_{[\frac{n}{2}]}]$.*

Доказательство. Пусть вначале $n = 2k$. Рассмотрим отображение $f\colon BU(k) \to BO(2k)$, классифицирующее овеществление тавтологического k-мерного комплексного рассслоения над $BU(k)$, которое в течение этого доказательства мы будем обозначать γ'. Через γ будем обозначать тавтологическое $2k$-мерное вещественное расслоение над $BO(2k)$. Мы имеем $f^*\gamma = \gamma'_\mathbb{R}$, $p_i = p_i(\gamma)$, $i = 1, \dots, k$. Мы имеем

$$1 - p_1(\gamma) + p_2(\gamma) - \ldots + (-1)^k p_k(\gamma) = 1 + c_2(\gamma_\mathbb{C}) + c_4(\gamma_\mathbb{C}) + \ldots + c_{2k}(\gamma_\mathbb{C}),$$

$$\begin{aligned} f^*(1 - p_1 + p_2 - \ldots + (-1)^k p_k) &= 1 + c_2(f^*\gamma_\mathbb{C}) + c_4(f^*\gamma_\mathbb{C}) + \ldots + c_{2k}(f^*\gamma_\mathbb{C}) = \\ = 1 + c_2((\gamma'_\mathbb{R})_\mathbb{C}) + \ldots + c_{2k}((\gamma'_\mathbb{R})_\mathbb{C}) &= 1 + c_2(\gamma' \oplus \overline{\gamma}') + c_4(\gamma' \oplus \overline{\gamma}') + \ldots + c_{2k}(\gamma' \oplus \overline{\gamma}') = \\ &= (1 + c_1 + c_2 + \ldots + c_k)(1 - c_1 + c_2 - \ldots + (-1)^k c_k), \end{aligned}$$

где $c_i = c_i(\gamma') \in H^*(BU(k); R)$ — универсальные классы Чженя. Следовательно,

$$f^* p_i = 2c_{2i} - 2c_{2i-1}c_1 + 2c_{2i-2}c_2 - \ldots + (-1)^{i-1} 2c_{i+1}c_{i-1} + (-1)^i c_i^2.$$

Отсюда вытекает, что классы $f^*p_1, \dots, f^*p_k$ алгебраически независимы в кольце $H^*(BU(k); R) = R[c_1, \dots, c_k]$ (т. е. никакой многочлен от них не равен нулю). Следовательно, то же верно и для классов $p_1, \dots, p_k$ в $H^*(BO(2k); R)$, т. е. $H^*(BO(2k); R)$ содержит подкольцо $R[p_1, \dots, p_k]$.

Пусть теперь $n = 2k+1$. Рассмотрим отображение $g\colon BO(2k) \to BO(2k+1)$, классифицирующее $(2k+1)$-мерное расслоение $\gamma^{2k} \oplus \underline{\mathbb{R}}$. Тогда $g^* p_i = g^* p_i(\gamma^{2k+1}) = p_i(\gamma^{2k}) = p_i$ при $i = 1, \dots, k$. Так как классы $p_1, \dots, p_k$ алгебраически независимы в $H^*(BO(2k); R)$, они также алгебраически независимы в $H^*(BO(2k+1); R)$. $\square$

11.5. **Классы Понтрягина ориентированных расслоений.**

Предложение 11.13. *Для ориентированного $2k$-мерного вещественного расслоения ξ имеем $p_k(\xi) = e(\xi)^2$.*

Доказательство. Имеем изоморфизм $(\xi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong \xi \oplus \xi$ (неориентированных) вещественных расслоений. В левой части этого равенства ориентация задаётся базисом $(e_1, 0), (0, e_1), \dots, (e_{2k}, 0), (0, e_{2k})$, а в правой части — базисом $(e_1, 0), \dots, (e_{2k}, 0)$, $(0, e_1), \dots, (0, e_{2k})$. Поэтому для ориентируемых расслоений получаем изоморфизм $(\xi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong (-1)^{\frac{2k(2k-1)}{2}} \xi \oplus \xi \cong (-1)^k \xi \oplus \xi$. Отсюда

$$p_k(\xi) = (-1)^k c_{2k}(\xi_{\mathbb{C}}) = (-1)^k e((\xi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}) = e(\xi \oplus \xi) = e(\xi)^2. \qquad \square$$

Напомним, что через $S\xi$ обозначается пространство сферического расслоения $S\xi \to B$ со слоем S^{n-1}.

Теорема 11.14 (точная последовательность Гизина)**.** *Пусть $\xi = (p\colon E \to B)$ — ориентированное n-мерное векторное расслоение и $p\colon S\xi \to B$ — соответствующее расслоение сфер. Имеет место точная последовательность*

$$\ldots \to H^i(B) \xrightarrow{\cdot e(\xi)} H^{i+n}(B) \xrightarrow{p^*} H^{i+n}(S\xi) \to H^{i+1}(B) \xrightarrow{\cdot e(\xi)} \ldots$$

Доказательство. Рассматривая точную последовательность пары $(E, E \setminus B)$, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{CD}
@>>> H^j(E, E\setminus B) @>>> H^j(E) @>>> H^j(E\setminus B) @>>> H^{j+1}(E, E\setminus B) @>>> \\
@. @A{\cong}A{\cdot\theta(\xi)}A @A{\cong}AA @A{\cong}AA @A{\cong}A{\cdot\theta(\xi)}A \\
@>>> H^{j-n}(B) @>{\cdot e(\xi)}>> H^j(B) @>>> H^j(S\xi) @>>> H^{j+1-n}(B) @>>>
\end{CD}$$

где левая стрелка — изоморфизм Тома, а два другие вертикальные изоморфизма индуцированы гомотопическими эквивалентностями. Нижняя строка — требуемая точная последовательность. $\square$

Множество всех ориентированных k-мерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^N$ называется *ориентированным многообразием Грассмана* и обозначается $\widetilde{G}_k(\mathbb{R}^N)$. Имеется двулистное накрытие $\widetilde{G}_k(\mathbb{R}^N) \to G_k(\mathbb{R}^N)$, задаваемое забыванием ориентации подпространств. Также определён бесконечномерный ориентированный грассманиан $\widetilde{G}_k = \widetilde{G}_k(\mathbb{R}^\infty)$ и тавтологическое ориентированное k-мерное расслоение $\widetilde{\gamma}^k$ над $\widetilde{G}_k$. Для ориентированных расслоений имеет место аналог теоремы 8.15: ориентированное расслоение ξ классифицируется отображением базы $\widetilde{f}\colon B \to \widetilde{G}_k$, т. е. $\xi \cong \widetilde{f}^* \widetilde{\gamma}^k$, и гомотопные отображения $\widetilde{f}$ индуцируют изоморфные ориентированные расслоения. В связи с этим пространство $\widetilde{G}_k$ называется *классифицирующим пространством* ориентированных k-мерных расслоений и обозначается $BSO(k)$.

Имеем двулистное накрытие $BSO(n) \to BO(n)$. Таким образом, ориентация вещественного n-мерного расслоения ξ над B — это в точности класс гомотопии поднятия классифицирующего отображения $f\colon B \to BO(n)$ до отображения $\widetilde{f}\colon B \to BSO(n)$:

$$\begin{tikzcd}
 & BSO(n) \arrow[d] \\
B \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"] & BO(n)
\end{tikzcd}$$

Теорема 11.15. *Пусть R — коммутативное кольцо, содержащее $\frac{1}{2}$. Тогда*

$$H^*(BSO(n);R) \cong \begin{cases} R[p_1,\dots,p_k], & \text{если } n = 2k+1, \\ R[p_1,\dots,p_{k-1},e], & \text{если } n = 2k, \end{cases}$$

где $p_i = p_i(\widetilde{\gamma}^n)$ и $e = e(\widetilde{\gamma}^n)$ — универсальные характеристические классы и $p_k = e^2$ при $n = 2k$.

Доказательство. В доказательстве все когомологии рассматриваются с коэффициентами в R. Аналогично предложению 11.12 доказывается, что кольцо $H^*(BSO(n))$ содержит подкольцо $R[p_1,\dots,p_k]$ или $R[p_1,\dots,p_{k-1},e]$ в зависимости от чётности n. Далее используем индукцию по n. При $n=1$ имеем двулистное накрытие $BSO(1) = S^\infty \to \mathbb{R}P^\infty = BO(1)$. Поэтому $H^*(BSO(1)) \cong \mathbb{R}$. При $n=2$ имеем $BSO(2) = BU(1)$, так как ориентация двумерного подпространства эквивалентна заданию в нём комплексной структуры. Поэтому $H^*(BSO(2)) \cong H^*(BU(1)) \cong \mathbb{R}[c_1] = \mathbb{R}[e]$.

Чтобы применить шаг индукции, рассмотрим универсальное ориентированное расслоение $E\widetilde{\gamma}^n \to BSO(n)$. Пространство расслоения сфер $S\widetilde{\gamma}^n$ представляет собой множество векторов v длины 1 в ориентированных n-мерных подпространствах в $\mathbb{R}^\infty$. Рассмотрим отображение $S\widetilde{\gamma}^n \to BSO(n-1)$, сопоставляющее вектору v его ортогональную ориентированную $(n-1)$-мерную плоскость $v^\perp$. Тогда $S\widetilde{\gamma}^n \to BSO(n-1)$ — локально тривиальное расслоение со стягиваемым слоем S^∞, и поэтому $S\widetilde{\gamma}^n \simeq BSO(n-1)$. Индуцированный проекцией $S\widetilde{\gamma}^n \to BSO(n)$ гомоморфизм $H^*(BSO(n)) \to H^*(S\widetilde{\gamma}^n)$ превращается в гомоморфизм $H^*(BSO(n)) \to H^*(BSO(n-1))$, индуцированный отображением $BSO(n-1) \to BSO(n)$, классифицирущим расслоение $\widetilde{\gamma}^{n-1} \oplus \underline{\mathbb{R}}$. Поэтому этот гомоморфизм переводит классы $p_i \in H^{4i}(BSO(n))$ в соответствующие классы $p_i \in H^{4i}(BSO(n-1))$ для $1 \leqslant i < \frac{n}{2}$.

Пусть $n = 2k$. Рассмотрим последовательность Гизина расслоения $E\widetilde{\gamma}^n \to BSO(n)$:

$$\dots \to H^{2i+2k-1}(S\widetilde{\gamma}^n) \to H^{2i}(BSO(2k)) \xrightarrow{\cdot e} H^{2i+2k}(BSO(2k)) \to H^{2i+2k}(S\widetilde{\gamma}^n) \to$$
$$\to H^{2i+1}(BSO(2k)) \to \dots$$

Здесь $H^{2i+2k-1}(S\widetilde{\gamma}^n) = H^{2i+2k-1}(BSO(2k-1)) = 0$ по предположению индукции. Гомоморфизм $H^{2i+2k}(BSO(2k)) \to H^{2i+2k}(S\widetilde{\gamma}^n) = H^{2i+2k}(BSO(2k-1))$ сюръективен, так как $H^*(BSO(2k-1)) = R[p_1,\dots,p_{k-1}]$ по предположению индукции и $p_i \in H^*(BSO(2k-1))$ накрывается соответствующим $p_i \in H^*(BSO(2k))$. В итоге получаем короткую точную последовательность в верхней строке диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{2i}(BSO(2k)) \arrow[r, "\cdot e"] & H^{2i+2k}(BSO(2k)) \arrow[r, "\varphi"] & H^{2i+2k}(BSO(2k-1)) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & R[p_1,\dots,p_{k-1},e]^{2i} \arrow[r, "\cdot e"] \arrow[u, hook] & R[p_1,\dots,p_{k-1},e]^{2i+2k} \arrow[r] \arrow[u, hook] & R[p_1,\dots,p_{k-1}]^{2i+2k} \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

Чтобы завершить шаг индукции, докажем, что средняя вертикальная стрелка — эпиморфизм. Применив вспомогательную индукцию по размерности группы когомологий, можно считать, что левая вертикальная стрелка — изоморфизм. Пусть $a \in H^{2i+2k}(BSO(2k))$. Запишем $\varphi(a) = Q(p_1,\dots,p_{k-1})$, где Q — многочлен. Тогда $\varphi(a - Q(p_1,\dots,p_{k-1})) = 0$, следовательно, $a - Q(p_1,\dots,p_{k-1}) = R(p_1,\dots,p_{k-1},e)\cdot e$, где R — многочлен. Итак, $a = Q(p_1,\dots,p_{k-1}) + R(p_1,\dots,p_{k-1},e)\cdot e \in R[p_1,\dots,p_{k-1},e]$ и средняя стрелка сюръективна.

Пусть теперь $n = 2k+1$. Тогда $e(\widetilde{\gamma}^n) = 0$, так как n нечётно и $R \ni \frac{1}{2}$. Поэтому гомоморфизм умножения на e в точной последовательности Гизина расслоения $E\widetilde{\gamma}^n \to BSO(n)$ нулевой, и она распадается в короткие точные последовательности:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{2i}(BSO(2k+1)) \arrow[r] & H^{2i}(BSO(2k)) \arrow[r, "\varphi"] & H^{2i-2k}(BSO(2k+1)) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & R[p_1,\ldots,p_k]^{2i} \arrow[r, "\psi"] \arrow[u, hook] & R[p_1,\ldots,p_{k-1},e]^{2i} \arrow[r] \arrow[u, equal] & R[p_1,\ldots,p_k]^{2i-2k} \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0
\end{tikzcd}$$

Равенство посередине — по предположению индукции. Имеем $\psi(p_i) = p_i$ при $i < k$ и $\psi(p_k) = e^2$, здесь $e = e(\widetilde{\gamma}^{2k})$. Тогда $R[p_1,\ldots,p_{k-1},e]$ — свободный $R[p_1,\ldots,p_k]$-модуль с образующими 1 и e, и из сравнения рангов получаем $H^{2i}(BSO(2k+1)) = R[p_1,\ldots,p_k]^{2i}$. $\square$

Следствие 11.16. *Любой характеристический класс ориентированных n-мерных расслоений с коэффициентами в $R \ni \frac{1}{2}$ есть многочлен от классов Понтрягина и, если n чётно, от класса Эйлера.*

Задачи и упражнения.

11.17. Пусть V — комплексное векторное пространство. Докажите, что формула $j(x,y) = (-y,x)$ задаёт на $V \oplus \overline{V}$ естественную структуру кватернионного пространства (называемого кватернионизацией V).

11.18. Вычислите классы Понтрягина касательного расслоения кватернионного проективного пространства $\mathbb{H}P^n$. [*Указание:* пример 11.7.]

11.19. Докажите, что $p_i(\xi) = w_{2i}^2(\xi) \mod 2$ для вещественного расслоения ξ.

11.20. Докажите изоморфизм

$$H^*(BSO(n);\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_2,w_3,\ldots,w_n],$$

где $w_i = w_i(\widetilde{\gamma}^n)$. Докажите, что при гомоморфизме

$$H^*(BO(n);\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1,w_2,\ldots,w_n] \to \mathbb{Z}_2[w_2,\ldots,w_n] = H^*(BSO(n);\mathbb{Z}_2),$$

индуцированном накрытием $BSO(n) \to BO(n)$, класс w_1 переходит в нуль, и w_i переходит в w_i при $i \geqslant 2$. [*Указание:* используйте аналог точной последовательности Гизина с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ для двулистного накрытия — расслоения сфер одномерного вещественного расслоения.]

11.21. Докажите, что если $R \ni \frac{1}{2}$, то имеет место изоморфизм

$$H^*(BO(n);R) \cong R[p_1,\ldots,p_{[\frac{n}{2}]}].$$

Опишите гомоморфизм $H^*(BO(n);R) \to H^*(BSO(n);R)$, индуцированный накрытием $BSO(n) \to BO(n)$.