КОБОРДИЗМЫ И ДЕЙСТВИЯ ТОРА
ЛИСТОК 1: ПОНЯТИЕ БОРДИЗМА, КОНСТРУКЦИЯ ПОНТРЯГИНА–ТОМА, ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ БОРДИЗМОВ И КОБОРДИЗМОВ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Пусть Ω_O^n обозначает группу (неориентированных) бордизмов замкнутых гладких n-мерных многообразий. Докажите, что $\Omega_O^0 \cong \mathbb{Z}_2$ и $\Omega_O^1 \cong 0$.

2. Докажите, что $\mathbb{R}P^2$ не является границей никакого 3-мерного многообразия. Выведите отсюда, что $\Omega_O^2 \cong \mathbb{Z}_2$.

3. Пусть ξ и η — векторные расслоения над клеточными пространствами X и Y, соответственно, и пусть $\xi \times \eta$ — расслоение-произведение над $X \times Y$. Докажите гомеоморфизм пространств Тома

$$Th(\xi \times \eta) \cong Th\,\xi \wedge Th\,\eta.$$

4. Пусть η — тавтологическое одномерное вещественное (соответственно, комплексное) векторное расслоение над $\mathbb{R}P^n$ (соответственно, над $\mathbb{C}P^n$). Докажите, что пространство Тома $Th\,\eta$ гомеоморфно $\mathbb{R}P^{n+1}$ (соответственно, $\mathbb{C}P^{n+1}$).

5. Докажите, что кобордизм η-подмногообразий в $E\xi$ является отношением эквивалентности.

6. Докажите, что множество классов кобордизма η-подмногообразий в $E\xi$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $[Th\,\xi, Th\,\eta]$ классов гомотопии отображений пространств Тома, сохраняющих отмеченную точку.

7. Докажите, что в геометрическом определении групп кобордизмов $O^n(X)$ гладкого многообразия X вместо композиции

$$M \hookrightarrow X \times \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow X$$

можно рассматривать композицию

$$M \hookrightarrow E\xi \longrightarrow X,$$

где ξ есть произвольное $(k-n)$-мерное векторное расслоение над X, а $M \hookrightarrow E\xi$ — вложение подмногообразия коразмерности k.

8. Для замкнутого гладкого n-мерного многообразия X докажите изоморфизмы *двойственности Пуанкаре–Атья*

$$O^{n-k}(X) \cong O_k(X) \quad \text{для любого } k.$$

Date: 27 сентября 2021 г.

9. Пусть задано комплексное $(k-l)$-мерное векторное расслоение ξ над гладким многообразием X и вложение $M \hookrightarrow E\xi$, в нормальном расслоении которого введена структура комплексного k-мерного расслоения. Докажите, что композиция

$$M \hookrightarrow E\xi \longrightarrow X$$

задаёт комплексную ориентацию отображения $M \to X$ коразмерности $2l$ и тем самым класс комплекнсых кобордизмов в $U^{2l}(X)$.
Аналогично, вложение $M \hookrightarrow E(\xi \oplus \underline{\mathbb{R}})$, в нормальном расслоении которого введена структура комплексного k-мерного расслоения, задаёт класс комплексных кобордизмов в $U^{2l-1}(X)$ при помощи композиции

$$M \hookrightarrow E(\xi \oplus \underline{\mathbb{R}}) \longrightarrow X.$$

10. Пусть $\pi\colon E \to B$ — расслоение гладких многообразий со слоем F. Докажите, что комплексная ориентация отображения π эквивалентна выбору стабильно комплексной структуры в касательном расслоении $\mathcal{T}_F(E)$ вдоль слоёв расслоения π.

Список литературы

[1] Buchstaber, Victor M.; Panov, Taras E. Toric Topology. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015 (Appendix D).

[2] Stong, Robert. Notes on Cobordism Theory. Math. Notes, vol. 7. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1968. [Русский перевод: Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, «Мир», Москва, 1973.]

КОБОРДИЗМЫ И ДЕЙСТВИЯ ТОРА
ЛИСТОК 2: УМНОЖЕНИЯ, ГОМОМОРФИЗМ ГИЗИНА, ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПУАНКАРЕ–АТЬЯ, ПРОЕКТИВИЗАЦИИ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Докажите, что гомоморфизм двойственности Пуанкаре–Атья
$$D = \,\cdot \frown [X] \colon U^k(X) \to U_{d-k}(X), \quad x \mapsto x \frown [X]$$
является изоморфизмом для любого замкнутого стабильно комплексного многообразия X размерности d.

2. Пусть $f\colon X^d \to Y^{p+d}$ — комплексно-ориентированное отображение многообразий, и пусть $D_X\colon U^k(X) \to U_{d-k}(X)$, $D_Y\colon U^{p+k}(Y) \to U_{d-k}(Y)$ — изоморфизмы двойственности для X, Y, соответственно. Докажите, что гомоморфизм Гизина удовлетворяет соотношению
$$f_! = D_Y^{-1} f_* D_X.$$

3. Пусть ξ — комплексное n-мерное расслоение над многообразием M с тотальным пространством E, и пусть $i\colon M \to E$ — вложение нулевого сечения. Определите гомоморфизм Гизина
$$i_!\colon U^*(M) \to U^{*+2n}(E, E \setminus M) = \widetilde{U}^{*+2n}(Th(\xi))$$
и покажите, что $i_!$ является изоморфизмом. Он называется *изоморфизмом Гизина–Тома*, соответстующим комплексному расслоению ξ.

4. Пусть ξ, γ — комплексные векторные расслоения над клеточным пространством X, причём γ одномерно. Докажите, что расслоения $\mathbb{C}P(\xi \otimes \gamma)$ и $\mathbb{C}P(\xi)$ изоморфны. То же для вещественных векторных расслоений и проективизаций.

5. Пусть ξ — комплексное векторное расслоения над клеточным пространством X, пусть $\mathbb{C}P(\xi) \to X$ — его проективизация, η — тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P(\xi)$ и $\mathcal{T}_F\mathbb{C}P(\xi)$ — касательное расслоение вдоль слоёв расслоения $\mathbb{C}P(\xi) \to X$. Докажите, что
$$\mathcal{T}_F\mathbb{C}P(\xi) \cong \mathrm{Hom}(\eta, \eta^\perp),$$
где $\eta^\perp$ — ортогональное дополонение к η в слоях расслоения ξ.

6. Рассмотрим отображение $q\colon \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1} \cong S^{2n}$. Докажите, что $q^*\alpha = v^n$, где $\alpha \in H^{2n}(S^{2n})$ — стандартная образующая, происходящая из ориентации $\mathbb{C}P^n$, а $v \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к $[\mathbb{C}P^{n-1}] \in H_{2n-2}(\mathbb{C}P^n)$.

Date: 11 октября 2021 г.

КОБОРДИЗМЫ И ДЕЙСТВИЯ ТОРА
ЛИСТОК 3: ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ И ЧИСЛА

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Вычислите полный характеристический класс Чженя касательного расслоения многообразия $\mathbb{C}P^n$.

2.

а) Вычислите кольцо когомологий многообразия $L(n,m) = \mathbb{C}P(\eta \oplus \underline{\mathbb{C}}^m)$, где η — тавтологическое одномерное расслоение над $\mathbb{C}P^n$, а $\underline{\mathbb{C}}^m$ — тривиальное m-мерное расслоение над $\mathbb{C}P^n$.

б) Вычислите кольцо когомологий многообразия $\mathbb{C}P(\eta^{\otimes i_1} \oplus \ldots \oplus \eta^{\otimes i_k})$ для произвольных целых чисел $i_1, \ldots, i_k$.

в)* Вычислите полный характеристический класс Чженя касательного расслоения многообразия $\mathbb{C}P(\eta^{\otimes i_1} \oplus \ldots \oplus \eta^{\otimes i_k})$.

3. Пусть η — тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P^\infty$. Докажите, что не существует комплексного векторного расслоения ζ над $\mathbb{C}P^\infty$ такого, что $\eta \oplus \zeta$ тривиально.

4. Для каждого разбиения $\omega = (i_1, \ldots, k_k)$ числа $n = i_1 + \ldots + i_k$ определим *число Штифеля–Уитни* компактного многообразия M^n:

$$w_\omega[M^n] = \langle w_{i_1} \cdots w_{i_k}(\mathcal{T}M), [M^n] \rangle \in \mathbb{Z}_2,$$

число Чженя компактного комплексного многообразия M^{2n}:

$$c_\omega[M^{2n}] = \langle c_{i_1} \cdots c_{i_k}(\mathcal{T}M), [M^{2n}] \rangle \in \mathbb{Z}$$

и *число Понтрягина* компактного ориентированного многообразия M^{4n}:

$$p_\omega[M^{4n}] = \langle p_{i_1} \cdots p_{i_k}(\mathcal{T}M), [M^{4n}] \rangle \in \mathbb{Z}.$$

Вычислите все числа Штифеля–Уитни пространства $\mathbb{R}P^n$, числа Чженя и Понтрягина пространства $\mathbb{C}P^n$.

5. Докажите, что если M^n является границей компактного многообразия W^{n+1}, то $w_\omega[M^n] = 0$ для любого разбиения ω. Аналогично, если M^{4n} является границей ориентированного компактного многообразия W^{4n+1}, то $p_\omega[M^{4n}] = 0$ для любого ω.

6. Докажите, что $\mathbb{R}P^{2n}$ и $\mathbb{C}P^{2n}$ не являются границами никакого компактного многообразия, а $\mathbb{R}P^{2n+1}$ и $\mathbb{C}P^{2n+1}$ являются границами компактных многообразий.

7. Докажите, что для любого натурального k существует единственный характеристический класс $s_k(\xi) \in H^{2k}(X; \mathbb{Z})$ комплексных векторных расслоений ξ над клеточной базой X, удовлетворяющий условиям:

а) если ξ — расслоение над X и $\dim X < 2k$, то $s_k(\xi) = 0$;

б) $s_k(\xi \oplus \eta) = s_k(\xi) + s_k(\eta)$;

в) если ξ — одномерное расслоение, то $s_k(\xi) = c_1(\xi)^k$.

Date: 18 октября 2021 г.

КОБОРДИЗМЫ И ДЕЙСТВИЯ ТОРА
ЛИСТОК 4: ОБРАЗУЮЩИЕ КОЛЬЦА КОМПЛЕКСНЫХ БОРДИЗМОВ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

Гиперповерхностью Милнора называется неособое комплексное подмногообразие в $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$, $j \geqslant i \geqslant 0$, задаваемое как

$$H_{ij} = \{(z_0 : \dots : z_i) \times (w_0 : \dots : w_j) \in \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \colon z_0 w_0 + \dots + z_i w_i = 0\}.$$

1. Покажите, что $H_{11} \cong \mathbb{C}P^1$.

2.

а) Докажите, что H_{1j} комплексно бордантно $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^{j-1}$, т. е. представляет разложимый элемент в кольце комплексных бордизмов Ω^U. (Указание: вычислите характеристические числа; было бы интересно найти явное геометрическое описание этого бордизма.)

б) Докажите, что H_{1j} не гомеоморфно $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^{j-1}$. (Указание: сравните кольца когомологий.)

3. Представьте полиномиальные образующие a_5 и a_8 (вещественных размерностей 10 и 16) кольца комплексных бордизмов Ω^U в виде линейных комбинаций классов бордизма $[H_{ij}]$.

4. Для каждой пары натуральных чисел i, j определим $2(i+j)$-мерное многообразие $L_{ij} = \mathbb{C}P(\eta \oplus \underline{\mathbb{C}}^j)$, где η — тавтологическое одномерное расслоение над $\mathbb{C}P^i$, а $\underline{\mathbb{C}}^j$ — тривиальное j-мерное комплексное расслоение над $\mathbb{C}P^i$. (Можно заметить, что L_{ij} является проективным торическим многообразием с многогранником моментов комбинаторно эквивалентным произведению симплексов $\Delta^i \times \Delta^j$.)

а) Вычислите кольцо когомологий $H^*(L_{ij}, \mathbb{Z})$.

б) Опишите касательное расслоение $\mathcal{T} L_{ij}$, докажите, что оно раскладывается в сумму одномерных расслоений с точностью до прибавления тривиальных слагаемых.

в) Вычислите $s_{i+j}[L_{ij}]$.

г) Докажите, что классы бордизма $[L_{ij}] \in \Omega^U_{2(i+j)}$ мультипликативно порождают кольцо комплексных бордизмов Ω^U.

5. Пусть M^{2n}_k — неособая гиперповерхность степени k в $\mathbb{C}P^{n+1}$. Докажите, что классы бордизма $[M^{2n}_k]$, $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, мультипликативно порождают кольцо Ω^U.

6*. Докажите, что каждый класс бордизмо $x \in \Omega^U_n$, $n > 0$, содержит неособое алгебраическое многообразие (не обязательно связное).

Date: 15 ноября 2021 г.

КОБОРДИЗМЫ И ДЕЙСТВИЯ ТОРА
ЛИСТОК 5: ФОРМАЛЬНЫЕ ГРУППЫ И РОДЫ ХИРЦЕБРУХА

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Докажите, что если кольцо R свободно от кручения, то свойства а) и б) из определения формальной группы влекут в). Другими словами, любая формальная группа над кольцом без кручения коммутативна. Приведите пример некоммутативной формальной группы.

2. *Рядом Гурвица* на кольцом R без кручения называется формальный ряд с коэффициентами в $R \otimes \mathbb{Q}$ вида

$$h(u) = u + \sum_{i \geqslant 1} \frac{h_i}{(i+1)!} u^{i+1}, \quad h_i \in R.$$

Докажите, что функционально обратный ряд к ряду Гурвица является рядом Гурвица. Докажите, что экспонента и логарифм формальной группы $F \in R[[u, v]]$ являются рядами Гурвица.

3. Докажите, что экспонента и логарифм формальной группы

$$F_{\sigma_1,\sigma_2}(u, v) = \frac{u + v + \sigma_1 uv}{1 - \sigma_2 uv}$$

с коэффициентами в $\mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2]$ имеют вид

$$f(x) = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{ae^{bx} - be^{ax}}, \quad g(u) = \frac{\ln(1 + au) - \ln(1 + bu)}{a - b},$$

где $a + b = \sigma_1$, $ab = \sigma_2$.

4. *Эллиптическим синусом Якоби* называется единственная мероморфная функция $f(x) = \mathrm{sn}(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$(f'(x))^2 = 1 - 2\delta f^2(x) + \varepsilon f^4(x) \tag{1}$$

с начальными условиями $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$, где $\delta, \varepsilon \in \mathbb{C}$. Таким образом, обратная функция к эллиптическому синусу задаётся эллиптическим интегралом

$$g(u) = \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1 - 2\delta t^2 + \varepsilon t^4}}.$$

Докажите *формулу сложения Эйлера*:

$$F_{\mathrm{ell}}(u, v) = \mathrm{sn}(x + y) = \frac{u\sqrt{1 - 2\delta v^2 + \varepsilon v^4} + v\sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}}{1 - \varepsilon u^2 v^2}, \tag{2}$$

где $u = \mathrm{sn}\, x$, $v = \mathrm{sn}\, y$. Эта формула задаёт *эллиптическую формальную группу* с экспонентой $\mathrm{sn}(x)$.

Date: 29 ноября 2021 г.

Убедитесь, что при вырождении $\varepsilon = 0$ эллиптический синус превращается в $f(x) = \frac{\sin\sqrt{2\delta}x}{\sqrt{2\delta}}$, а при вырождении $\varepsilon = \delta^2$ — в $f(x) = \frac{\operatorname{th}\sqrt{\delta}x}{\sqrt{\delta}}$.

5. Рассмотрим формальные группы вида

$$F_E(u,v) = \frac{u^2 - v^2}{u\,B(v) - v\,B(u)}, \tag{3}$$

где $B(u) = 1 + \sum_{k\geqslant 2} b_k u^k$ — формальный ряд с коэффициентами $b_2, b_3, \ldots$ из кольца R. Универсальная формальная группа вида (3) имеет кольцо коэффициентов $R_E = \mathbb{Z}[b_2, b_3, \ldots]/\mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ — идеал соотношений ассоциативности. Докажите, что над кольцом $R_E[\frac{1}{2}]$ формальная группа F_E превращается в эллиптическую формальную группу (2). Покажите также, что $R_E[\frac{1}{2}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon]$, где $\delta = -b_2$ и $\varepsilon = b_2^2 + 2b_4$. (Указание: покажите, что экспонента формальной группы F_E удовлетворяет уравнению (1).)

6. Пусть стабильно комплексная структура на многообразии M задаётся изоморфизмом $c_{\mathcal{T}}\colon \mathcal{T}M \oplus \underline{\mathbb{R}}^{2(m-n)} \to \xi$, где $\xi = \xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_m$ — сумма комплексных одномерных расслоений. Докажите, что значение рода Хирцебруха φ на M задаётся формулой

$$\varphi[M] = \Bigl(\prod_{i=1}^{m} \frac{x_i}{f(x_i)}\Bigr)\langle M\rangle,$$

где $x_i = c_1(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, m$.

7. Докажите, что $\chi_{a,b}$-род комплексного проективного пространства вычисляется по формуле

$$\chi_{a,b}[\mathbb{C}P^n] = (-1)^n(a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n).$$

8. Связная версия комплексной K-теории имеет кольцо коэффициентов $K^*(pt) = \mathbb{Z}[\beta]$. Является ли эта теория точной по Ландвеберу?