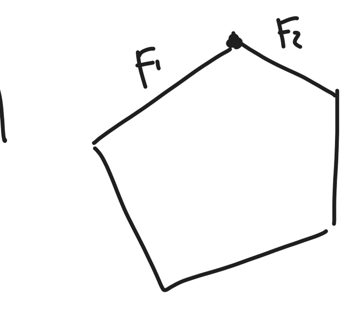
V_Σ – неособое полное торическое n-мерное

$V_\Sigma / T_N = P_\geq$ – n-мерное многообразие с углами

$V_\Sigma = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma$ $\quad U_\sigma \cong \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^{n-k}$ $\quad U_\sigma / T_N \cong \mathbb{R}^k_\geq \times (\mathbb{R}_>)^{n-k}$

$\mathbb{C}/S^1 = \mathbb{R}_\geq$ $\quad \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k_\geq$

$(z_1,\dots,z_k) \mapsto (|z_1|,\dots,|z_k|)$



Если $V_\Sigma = V_{\Sigma_P}$ проективно, то $P_\geq \cong P$

Теорема $H^*(V_\Sigma; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[u_1,\dots,u_m] / I$ $\quad u_i = [D_i] \in H^2(V_\Sigma, \mathbb{Z})$

I порождён соотношениями

1) $u_{i_1} \cdots u_{i_k} = 0$, если $D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_k} = \emptyset \Leftrightarrow F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} = \emptyset$

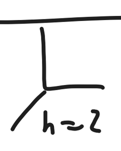
2) $\forall q \in M \cong \mathbb{Z}^n$ $\quad \sum \langle q, v_i \rangle u_i = 0$ $\quad n$ лин. независимых соотношений

$\chi^q : V_\Sigma \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ мером. ф-ция

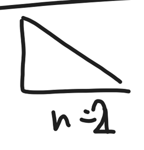
$\operatorname{Div} \chi^q = \sum \langle q, v_i \rangle D_i$ $\quad [\operatorname{Div}\chi^q] = 0$ в $H^2(X_\Sigma, \mathbb{Z})$

$$\underbrace{H^1(V_\Sigma, \mathcal{O}^*)}_{\operatorname{Pic}(V_\Sigma)} \longrightarrow H^2(V_\Sigma, \mathbb{Z}) \quad 0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0$$

$V_\Sigma = \mathbb{C}P^n$



$D_1, \dots, D_{n+1}$ $\quad \Delta^n$



$$H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}[u_1,\dots,u_{n+1}]}{u_1 u_2 \cdots u_{n+1} = 0}$$

$\mathbb{Z}[t]/t^{n+1}$

$\sum_{j=1}^{n+1} \langle q, v_j \rangle u_j = 0$ $\quad v_1 = e_1, \dots, v_n = e_n, v_{n+1} = -e_1 - \dots - e_n$

$q_i = e_i^*$ $\quad u_i - u_{n+1} = 0$

$\Bigg\} \; t = u_1 = \dots = u_{n+1}$, $\; t^{n+1} = 0$

Задача: док-ть, что если V_Σ - гладкое полное, то

$P_\geq = V_\Sigma / T_N$ стягиваемо $\quad P_\geq = \bigcup P_{\sigma,\geq}$

$P_{\sigma,\geq} \cong \mathbb{R}^k_\geq \times \mathbb{R}^{n-k}_>$

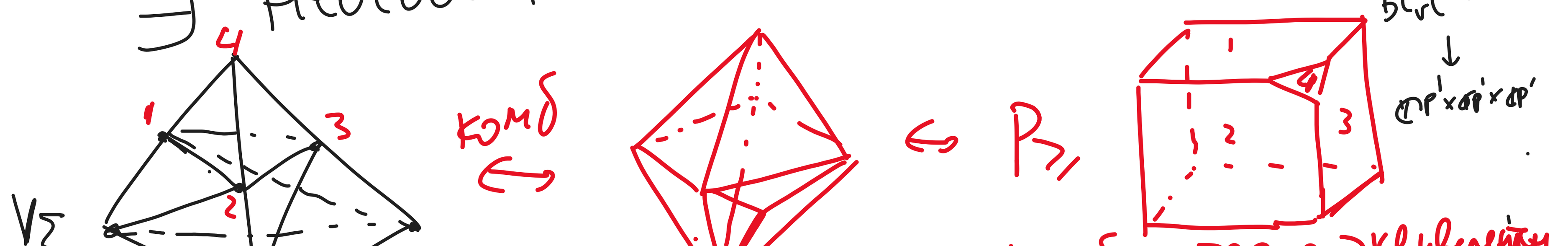
$\exists$ неособое, полное, непроективное V_Σ $\dim = 3$

$bl_v(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)$

$\downarrow$

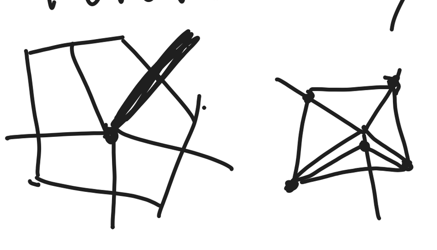
$\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$

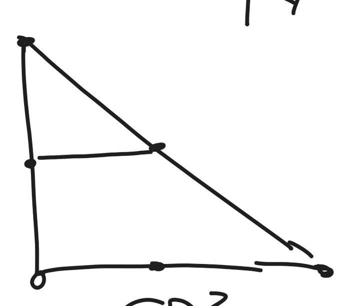
V_Σ



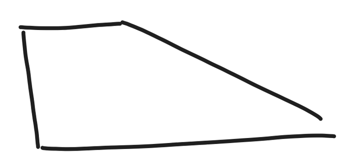
Комбинаторно эквивалентны простому выпуклому мн-ку

В размерности 4 бывают непроективные V_Σ, для которых V_Σ / T_N не комб. эквивал. никакому простому мн-ку

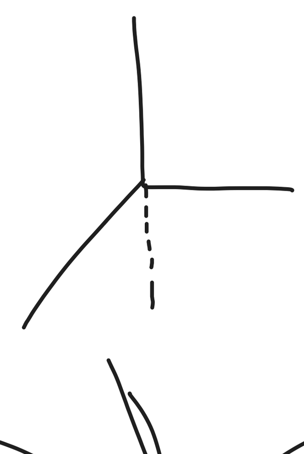


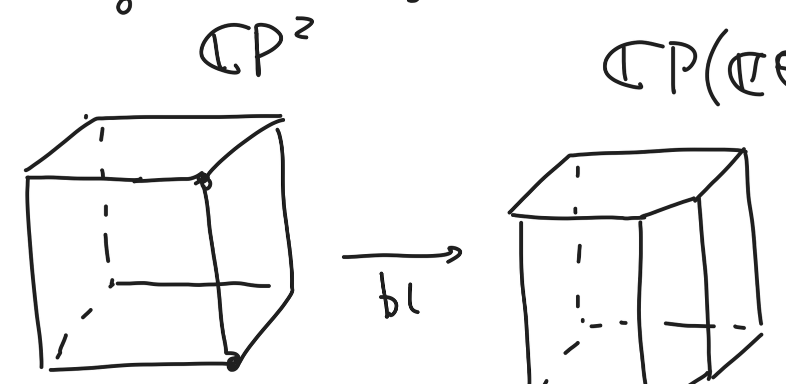


$\mathbb{C}P^2$

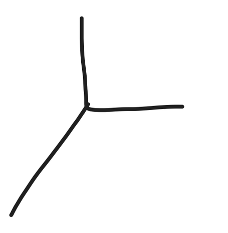


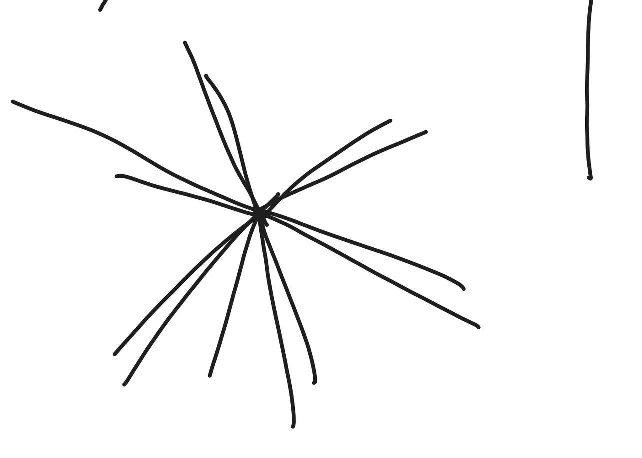
$\mathbb{C}P(\mathbb{C} \oplus \mathcal{O}(1)) = H_1$





$\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$

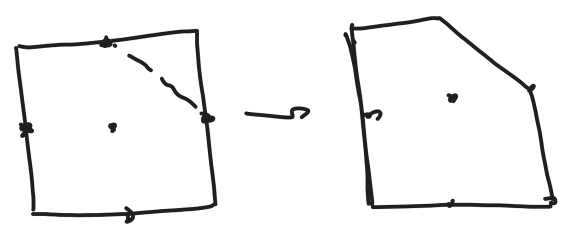


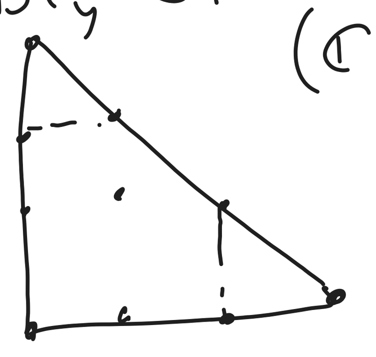


$bl_x(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1) = bl_x bl_y \mathbb{C}P^2$

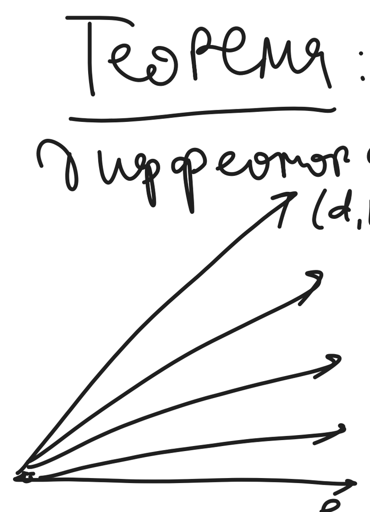
$(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1) \# \overline{\mathbb{C}P}^2 =$

$= \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$





Теорема: любая неособая полная торич. пов-ть диффеоморфна $\mathbb{C}P^2 \# (\overline{\mathbb{C}P}^2)^k$, $k \geq 0$ либо $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$



Торическое мн-зие $\rightsquigarrow$ квазиторическое мн-зие

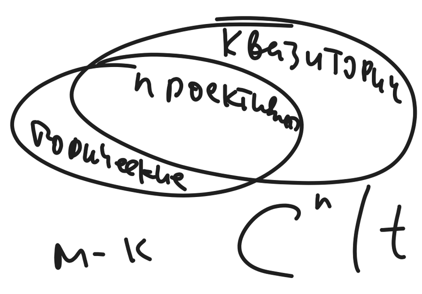
$T^n \curvearrowright M^{2n}$ эффективно

$(S^1)^n \cong T_N \subset (\mathbb{C}^\times)^n \curvearrowright V_\Sigma$

1) лок. стандартно $T^n \curvearrowright \mathbb{C}^n$

2) $M^{2n}/T^n \cong P^n$ простой вып. мн-к

$V_\Sigma / T_N \cong P_\geq$



Дэвис – Янушкевич

Циклический м-к $C^n(t_1, \dots, t_m) \subset \mathbb{R}^n$

$\gamma : t \mapsto (t, t^2, \dots, t^n)$ $\quad C^n_\geq C^n(t_1,\dots,t_m) = \operatorname{conv}(\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m))$

при $n \geq 4$ $\quad$ любые 2 вершины соединены ребром

симплициален $\Rightarrow (C^n)^*$ простой

любые $[\frac{n}{2}]$ вершин порождают грань (смежностный)

$(C^n)^*$ при больших $m (\geq 2^n)$ не явл. пр-вом орбит неособого торич. мн-зия (задача)