Пример: расслоение $\mathcal{O}(k)$ над $\mathbb{C}P^1$

$\mathbb{C}P^1 = \{[z_0:z_1]\} = U_0 \cup U_1$ $\quad U_i = \{z_i \neq 0\}$

лин. рассл над $\mathbb{C}P^1$ функция перехода

$g_{01}: U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ $\quad g_{01} = z^k$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Соотв. расслоение обозначается $\mathcal{O}(k)$

Пример 1 Рассм дивизор $1\cdot[0]$, т.е. точка $0=[0:1]\in\mathbb{C}P^1$

задаётся $f_0 = z$ в карте U_0 $\quad z = \frac{z_1}{z_0}$

$f_1 = 1$ в карте U_1

$g_{01} = \frac{f_0}{1} = z$ соотв. рассл. есть $\mathcal{O}(1)$

$H^0(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}(1)) = \mathbb{Z}$ $\qquad H^0(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}(-1)) = 0$

Пример 2: расслоение Хопфа η (тавтологическое)

"Слой над $[z_0:z_1]$ есть прямая в $\mathbb{C}^2_{w_0 w_1}$ с напр. вектором z_0, z_1"

$\varphi_0 : \eta|_{U_0} \longrightarrow \underset{z_0\neq 0}{U_0} \times \mathbb{C}$ $\qquad \varphi_1 : \eta|_{U_1} \longrightarrow \underset{z_1 \neq 0}{U_1} \times \mathbb{C}$

$([z_0:z_1], (w_0 = z_0 t, w_1 = z_1 t)) \longmapsto ([z_0:z_1], w_0)$

$\longmapsto ([z_0:z_1], w_1)$

$z = \frac{z_1}{z_0}$ $\quad g_{01}(z) = \varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}|_{L_z}$

$\varphi_0 \varphi_1^{-1}([z_0:z_1], w_1) = \varphi_0\left([z_0:z_1], \left(\frac{z_0}{z_1} w_1, w_1\right)\right) = \left([z_0:z_1], \frac{z_0}{z_1} w_1\right)$

$\varphi_0 \varphi_1^{-1}([z_0:z_1], w_1) = ([z_0:z_1], z^{-1} w_1)$

$g_{01}(z) = z^{-1}$ $\quad$ т.е. $\mathcal{O}(-1) = \eta$

Задача: проделать то же для $\mathbb{C}P^n$

$\mathcal{O}(1)$ – расслоение (дивизор гиперпл-ти) $H^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n$

$\mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n$, $z_0 = 0$

В картах $\underset{z_1\neq 0}{U_1}, U_2, \dots \underset{z_n \neq 0}{U_n}$ задаётся ур-нием $x_1 = 0$

$x^{(i)} = \frac{z}{z_i}$ $\quad$ В U_0 постоянная ф-ция

над $\mathbb{C}P^n$ есть тавтологическое расслоение η

$[z_0 : z_1 : \dots : z_n]$

$H^0(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}(-1)) = 0$ $\qquad \eta = \mathcal{O}(-1)$

$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$

$H^0(M, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(M;\mathbb{Z}) \to H^1(M,\mathcal{O}) \longrightarrow H^1(M,\mathcal{O}^*) \to H^2(M;\mathbb{Z}) \to H^2(M,\mathcal{O})$

и
0

если M компактно
полное

$M = \mathbb{C}P^n$, торич. мн-зия

$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H^1(M,\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\cong} H^2(M;\mathbb{Z}) \to 0$

$M = \mathbb{C}^2/\Gamma$

$0 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$