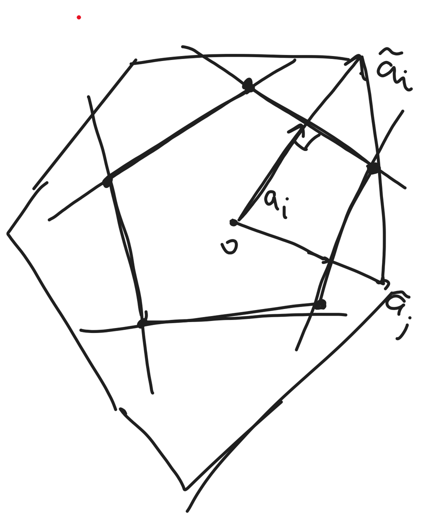
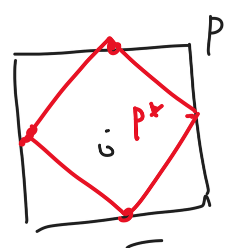
$P^* = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle u, x\rangle \geq 1\}$ (классич. опр-ние полярности)

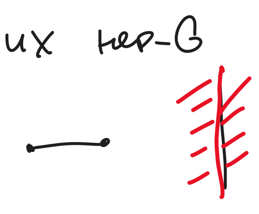


$|a_i| \cdot |\tilde{a}_i| = 1$

$P^* = \mathrm{conv}\,(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m)$



P — многогранник, полной размерности, без лишних нер-в в $M_{\mathbb{R}}$, $0 \in \operatorname{int} P$



$\Sigma_P = \{$конусы над гранями $P^*\}$

Если P простой, то P^* - симплициальный

$\Sigma_P = \{\sigma_Q = \mathbb{R}_{\geqslant}\langle a_i : Q \subset F_i \rangle$

Если P простой, то $Q^{n-k} = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k}$

Тогда $\sigma_Q = \mathbb{R}_{\geqslant}\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\rangle$

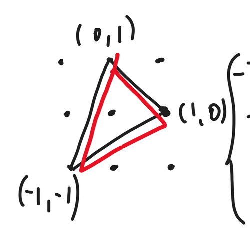
Если P – решёточный многогранник (т. е. вершины в решётке $M \subset M_{\mathbb{R}}$)

$\left(\begin{array}{ll} N \cong \mathbb{Z}^n & N^* = M \\ N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n & M_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n \end{array}\right)$

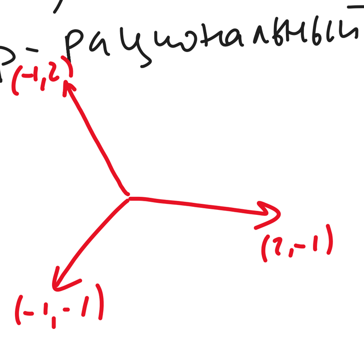
веера многогранники

то можно считать, что a_i - примитивные векторы в N (а $b_i \in \mathbb{Q}$)

т. е. Σ_P - рациональный веер

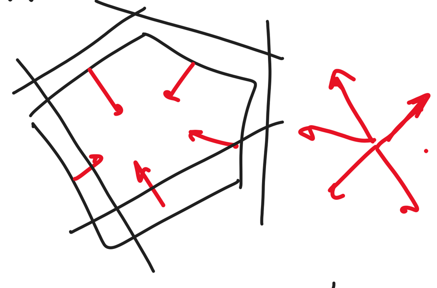


$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 1 \geqslant 0 \\ 2x_1 - x_2 + 1 \geqslant 0 \\ -x_1 - x_2 + 1 \geqslant 0 \end{cases}$



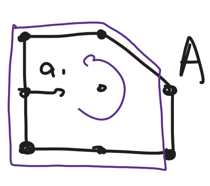
P зависит от a_i, b_i

Σ_P зависит от a_i и комбинаторики P

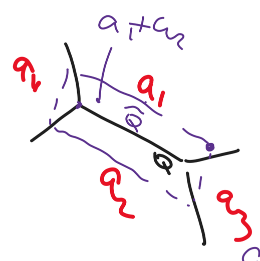


Многогранник $P \subset M_{\mathbb{R}}$ наз Дельзантовым (Delzant), если его нормальный веер неособый (т. е. в каждой вершине $P = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n}$ векторы $a_1, \ldots, a_n$ образуют базис решётки M)

Примеры:



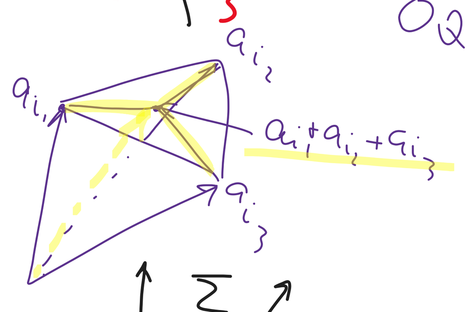
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

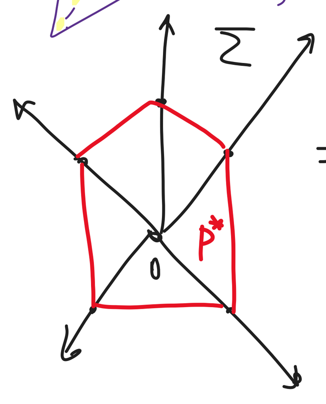


Нормаль к $\tilde{Q}$ – $a_1 + a_2$

$Q = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k} \rightsquigarrow \tilde{Q}$ с норм. $a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}$

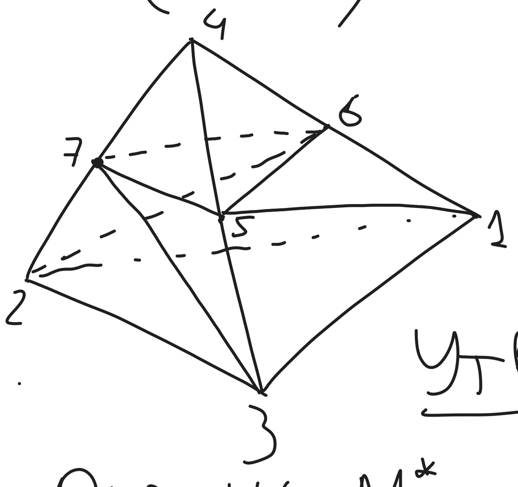
σ_Q подразбивается вектором $a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}$





$\Rightarrow \Sigma = \Sigma_P$ (норм. веер P)

Уже в $\mathbb{R}^3$ бывают полные симплиц. веера Σ, которые не явл. норм. веерами (простых) многогранников



$a_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = e_2$, $a_3 = e_3$

$a_4 = -e_1 - e_2 - e_3$

$a_5 = -e_1 - e_2$, $a_6 = -e_2 - e_3$, $a_7 = -e_1 - e_3$

Получаем полный, неособый веер в $\mathbb{R}^3$

Утв: $\Sigma \neq \Sigma_P$ ни для какого P

Опр. $\psi_P : M^*_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ – опорная ф-ция мн-ка $P \subset M_{\mathbb{R}}$

$$\psi_P(u) = \min_{x \in P} \langle u, x\rangle$$

(св-ва (задачи))

а) ψ_P непр. на $M^*_{\mathbb{R}}$ и линейна на конусах σ_Q норм. веера Σ_P

(Пусть $v \in P$ – вершина, тогда $\psi_P(u) = \langle u, v\rangle$ $\forall u \in \sigma_v$

$\sigma_v = \{u \in M^*_{\mathbb{R}} \ \langle u, v\rangle \leqslant \langle u, x\rangle \ \forall x \in P\}$)

б) ψ_P строго выпукла: $\forall$ макс. (n-мерного) конуса $\sigma_v \in \Sigma_P$ и $u \notin \sigma_v$ $\psi_P(u) < \langle u, v\rangle$

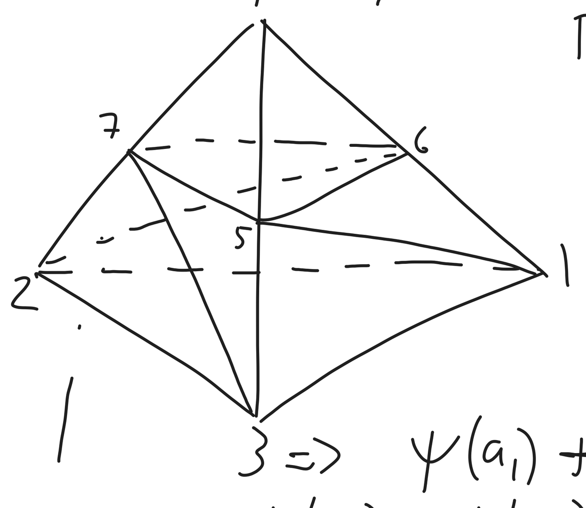
Док-во утверждения:

Предположим, $\Sigma = \Sigma_P$ и рассм. опорную функцию $\psi_P = \psi$

Рассм. конусы $\mathbb{R}_{\geqslant}(a_1, a_3, a_5)$ и $\mathbb{R}_{\geqslant}(a_1, a_5, a_6)$

$\updownarrow \qquad \updownarrow$

$v \in P \qquad v' \in P$



$\psi(a_1) = \langle a_1, v\rangle$

$\psi(a_3) = \langle a_3, v\rangle$

$\psi(a_5) = \langle a_5, v\rangle$

$\psi(a_6) = \langle a_6, v'\rangle$

$\Rightarrow \psi(a_1) + \psi(a_5) - \psi(a_3) = \langle a_1 + a_5 - a_3, v\rangle = \langle a_6, v\rangle > \underbrace{\langle a_6, v'\rangle}_{\psi(a_6)}$

$\psi(a_1) + \psi(a_5) > \psi(a_3) + \psi(a_6)$

Ан-но $\psi(a_2) + \psi(a_6) > \psi(a_1) + \psi(a_7)$

$\psi(a_3) + \psi(a_7) > \psi(a_2) + \psi(a_5)$

Сложив, получим противоречие

$\boxtimes$