$\mu_\Sigma : \mathbb{C}^m \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\Gamma} \mathfrak{k}^*$ $\qquad 1 \to K \to \mathbb{T}^m \to T_N \to 1$

На $\underbrace{\mu_\Sigma^{-1}(\Gamma b)}_{Z_P}/K = V_P$ есть "остаточное" действие $\mathbb{T}^m/K = T_N \cong T^n$

Предложение: образ отображения моментов $\mu_V : V_P \to \mathfrak{t}_N^*$ есть P

Док-во: $0 \to \mathfrak{k} \to \mathbb{R}^m \xrightarrow{\Lambda} N_{\mathbb{R}} \to 0$, $e_i \mapsto \lambda_i$ $\qquad 0 \to N_{\mathbb{R}}^* \xrightarrow{\Lambda^*} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\Gamma} \mathfrak{k}^* \to 0$, $e_i \mapsto \gamma_i$, $u \mapsto (\langle u,\lambda_1\rangle, \dots, \langle u,\lambda_m\rangle)$

$Z_P \overset{i}{\subset} U(\Sigma_P) \subset (\mathbb{C}^m, \omega)$ $\qquad \omega'$ на V_P

$/K \downarrow p$ $\qquad p^*\omega' = i^*\omega$

(V_P, ω') $\qquad H_{e_i} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |z_i|^2$, $\quad H_{\lambda_i} : V_P \to \mathbb{R}$, $\lambda_i \in N_{\mathbb{R}}$ ($Lie(T_N)$)

инв. век. поле Z на Z_P $\qquad X_{e_i}$ на Z_P $\quad p_* X_{e_i} = Y_{\lambda_i}$ $\quad Y_{\lambda_i}$ на V_P

$$dH_{e_i}(Z) = i^*\omega(X_{e_i}, Z) = p^*\omega'(X_{e_i}, Z) = \omega'(Y_{\lambda_i}, p_* Z) =$$

$$= dH_{\lambda_i}(p_* Z) = d(p^* H_{\lambda_i})(Z)$$

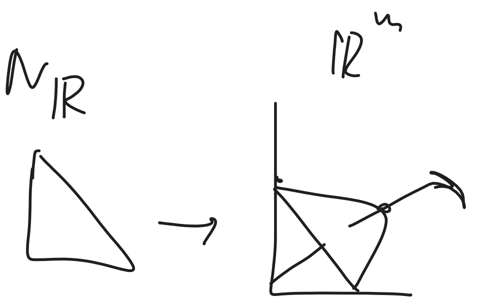
$\Rightarrow p^* H_{\lambda_i} = H_{e_i}$ с точностью до константы

$|z_i|^2 = H_{e_i}(z) = H_{\lambda_i}(p(z))$

$\mu_V(V_P) \subset \underset{N_{\mathbb{R}}^*}{\mathfrak{t}_N^*} \subset \mathbb{R}^m$ отождествляется с $\mu(Z_P) \subset \mathbb{R}^m$ с точностью до сдвига в $\mathfrak{t}_N^* \cong N_{\mathbb{R}}$

$\mu(Z_P) = \Lambda^*(P) + b = \{u \in N_{\mathbb{R}}^* : \underbrace{\langle \lambda_k, u\rangle + b_k}_{y_k} \geq 0\}$

$Z_P = \{z \in \mathbb{C}^m : \sum_k \gamma_k |z_k|^2 = \sum_k \gamma_k b_k\}$



$\mu(Z_P) = \{y \in \mathbb{R}^m_{y_k \geq 0} : \sum \gamma_k y_k = \sum \gamma_k b_k\}$

$\exists c \in \mathbb{R}^m : \quad \Lambda^*(\mu_V(V_P)) + c = \Lambda^*(P) + b$

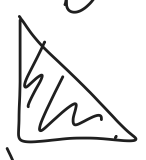
т.е. $\Lambda^*(\mu_V(V_P))$ и $\Lambda^*(P)$ отличаются на константу $b - c$

Λ^* мономорфно $\Rightarrow \mu_V(V_P) = P$ ∎

Опр: $V_P = \mu_\Sigma^{-1}(\Gamma b)/K = \mathbb{C}^m/\!/K$ наз. гамильтоновым торическим мн-зием, соотв. Делзанову мн-ку P

Теорема (Делзан): любое симплектическое мн-зие V разм. $2n$ с гамильтоновым действием T^n есть V_P для нек-го P.

Пример: $P = \Delta^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0,\ -x_1 - x_2 - \dots - x_n + 1 \geq 0\}$



Σ_P – норм. веер, обр. $\lambda_i = e_i$, $i = 1, \dots, n$, $\lambda_{n+1} = -e_1 - \dots - e_n$

$1 \to G \to (\mathbb{C}^\times)^{n+1} \to (\mathbb{C}^\times)^n \to 1$ $\qquad U(\Sigma_P) = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$

$G \overset{diag}{\cong} \mathbb{C}^\times$ $\qquad 0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\Gamma^*} \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{R}^n = Lie(T^n) \to 0$

$\Gamma = \underbrace{(1\ 1 \dots 1)}_{n+1}$ $\qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \delta = \Gamma b = 1$

$\mu_\Sigma(z_1, \dots, z_{n+1}) = \sum \gamma_k |z_k|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2$

$Z_P = \mu_\Sigma^{-1}(1) = S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$

$V_P = \{\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0\}/G = \mathbb{C}^\times \cong S^{2n+1}/K = S^1 = \mathbb{C}P^n$ ∎