Теорема: пусть V_Σ – полное гладкое торическое, $D_1, \dots, D_m$

$$H^*(V_\Sigma) = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m] / \underset{v_{i_1} \dots v_{i_k} = 0}{I} + \underset{\sum_{i=1} \lambda_{ik} v_i = 0}{J_m}$$

План

1. Числа Бетти $\quad H^{odd}(V_\Sigma) = 0 \quad \dim H^{2i}(V_\Sigma) = h_i$, h-вектор
   \+ Клеточное разбиение $\quad V_P$
2. Вычислим эквивар. когомологии $\quad H^*_{T^n}(V_\Sigma)$.

$$H^*_{T^n}(V_\Sigma) = \frac{\mathbb{Z}[v_1 \dots v_m]}{I} = \mathbb{Z}[\Sigma] \qquad \overset{\|}{H^*}(ET^n \times_{T^n} V_\Sigma)$$

кольцо граней (кольцо Стенли-Райснера)

Z_P "момент. угол. комплекс"

$T^m \curvearrowright Z_P \qquad T^{m-n} \subset T^m$ действует свободно на Z_P

$Z_P / T^{m-n} \cong V_P \qquad H_{T^m}(Z_P) \cong H_{T^n}(V_\Sigma)$

3. Рассм. спектр. посл-ть расслоения

$$\begin{array}{ccccc} V_\Sigma & \xrightarrow{i} & ET^n \times_{T^n} V_\Sigma & \xrightarrow{p} & BT^n \\ \uparrow & & \uparrow \simeq & & \uparrow \\ Z_P & \longrightarrow & ET^m \times_{T^m} M^{2n} & \longrightarrow & BT^m \end{array}$$

вырождается в $E_2 = H^*(V_\Sigma) \otimes H^*(BT^n)$

$i^* \; H^*(ET^n \times_{T^n} V_\Sigma) \to H^*(V_\Sigma)$ сюръективно

$/J$

Ядро порождено $\quad p^*(H^+(BT^n)) = J = (\underset{\text{лин. формы}}{t_1 \dots t_{m-n}})$

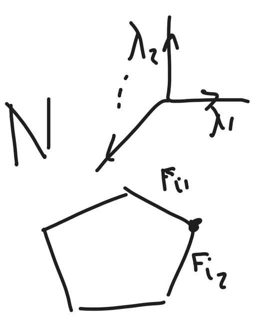
Док-во теоремы: обозн. $V_\Sigma = M^{2n}$ с действием T^n

$p^n = M^{2n}/T^n \qquad \pi: M^{2n} \to P^n$

1. $M^{2n} = \underset{(x,t)}{P^n \times T^n} / \sim \qquad D_1, \dots, D_m$ подмн-ва коразм. 2

$\overset{T^n}{\cup} \qquad D_i = O_{\sigma_i^1}$

$\mathrm{Stab}\, D_i = T(\lambda_i) \cong S^1 \qquad \sigma_i^1 = \mathbb{R}_{\geq}\langle \lambda_i \rangle \qquad \lambda_i \in N$



$F_i = \pi(D_i) \qquad x \in P^n \qquad x \in F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}$

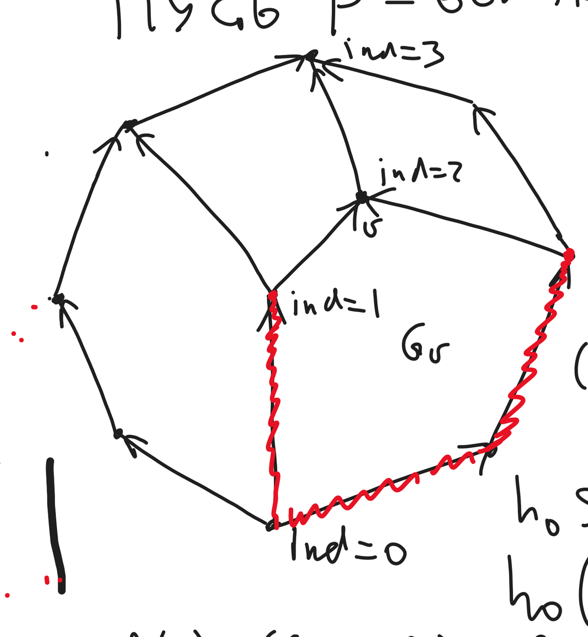
$\mathrm{Stab}\, \pi^{-1}(x) = \underbrace{T(\lambda_{i_1}) \times \dots \times T(\lambda_{i_k})}_{T(x)} \cong T^k$

$(x, t_1) \sim (x, t_2)$, если $t_1 t_2^{-1} \in T(x)$

2. Числа Бетти M^{2n} и соотношение Дена-Соммервиля

Пусть P – выпуклый многогранник (простой)

$\forall$ верш. $v \in P \quad \mathrm{ind}_\nu v = \#$ вход. рёбер



$I_\nu(\ell) = \#$ вершин индекса ℓ

$\nu \quad f_k = \#k$-мерных граней $P = \sum_{\ell \geq k} C_\ell^k I_\nu(\ell)$

(каждая вершина индекса ℓ является верхней для C_ℓ^k k-мерных граней)

$h_0 s^n + h_1 s^{n-1} + \dots + h_n = f_n (s-1)^n + f_{n-1}(s-1)^{n-1} + \dots + f_0$

$h_0 (t+1)^n + h_1 (t+1)^{n-1} + \dots + h_n = f_n t^n + f_{n-1} t^{n-1} + \dots + f_0$

$f(P) = (f_0, \dots, f_n)$ $\underline{f\text{-вектор}}$ $\qquad h(P) = (h_0, h_1, \dots, h_n)$ h-вектор P

$f_k = \sum_{\ell \geq k} C_\ell^k h_{n-\ell} \qquad ? \; h_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_{n-i}^{n-k} f_{n-i}$

$\Rightarrow I_\nu(\ell) = h_{n-\ell}$ (не зависит от ν)

$\nu \to -\nu \qquad \mathrm{ind}_\nu(v) = n - \mathrm{ind}_{-\nu}(v)$

$h_{n-\ell} = I_\nu(\ell) = I_{-\nu}(n-\ell) = h_\ell \Rightarrow \boxed{h_\ell = h_{n-\ell}}$ $\left[\frac{n+1}{2}\right]$

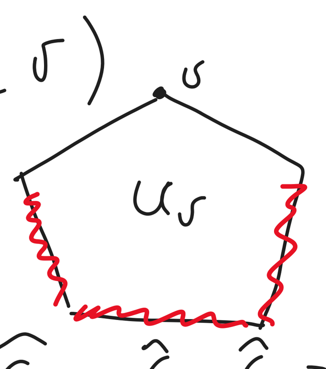
Соотношения Дена-Соммервиля

$\underline{\text{shelling}} \qquad \underline{\text{shellable}} \qquad 2f_1 = nf_0$

$G_v \subset P$ – грань, $\underset{\text{разм. ind } v}{\text{порожд.}}$ всеми рёбрами, входящими в v

$\hat{G}_v = G_v \setminus$ (все грани, не содержащие v)

$\hat{G}_v \cong \mathbb{R}_{\geq}^{\mathrm{ind}\, v} \subset U_v \subset P \qquad \pi^{-1}(U_v) \cong \mathbb{C}^n$



$\pi: M^{2n} = P^n \times T^n / \sim \; \to P^n \qquad P = \bigcup_v \hat{G}_v, \quad \hat{G}_v \cap \hat{G}_{v'} = \emptyset$

$e_v := \pi^{-1} \hat{G}_v \cong \mathbb{C}^{\mathrm{ind}\, v}$ – клетка в M^{2n} разм. $2(\mathrm{ind}\, v)$

$M^{2n} = \bigcup_{\substack{v \in P \\ \text{верш.}}} e_v \quad$ клеточное разбиение

Теорема: $H^{odd}(M^{2n}) = 0$, $\mathrm{rk}\, H^{2i}(M^{2n}) = h_i(P)$

Соотношения Д-С $\leftrightarrow$ Двойственность Пуанкаре

3. Построение универс. пр-ва Z_P, $\Sigma^1 = \{\sigma_1^1, \dots, \sigma_m^1\}$

$V_\Sigma = M^{2n} \quad D_1, \dots, D_m \qquad \mathbb{Z}^{\Sigma^1} = \mathbb{Z}^m \xrightarrow[\text{сюръекц}]{\Lambda} N \cong \mathbb{Z}^n$

$e_i \longmapsto \lambda_i$ – образующая σ_i^1

$Z_P = P \times T^m / \approx \; \longrightarrow P \times T^n / \sim \; = M^{2n} \qquad T^n \cong N \otimes S^1$

$(x, t_1) \approx (x, t_2) \Leftrightarrow t_1 t_2^{-1} \in T_{i_1} \times \dots \times T_{i_k} \subset T^m$

$x = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}$

$(x, t_1) \sim (x, t_2)$

$t_1 t_2^{-1} \in T(x) = T(\lambda_{i_1}) \times \dots \times T(\lambda_{i_k}) \subset T^n$

$T_{i_1} \times \dots \times T_{i_k} = T_{\{i_1, \dots, i_k\}} \subset T^m$

координатная подгруппа

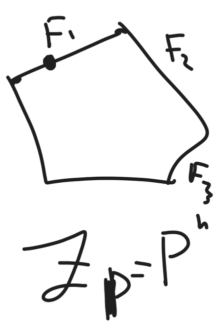
Z_P^{n+m} наз. $\underline{\text{момент-угол-многообразие}}$

$K = \mathrm{Ker}(T^m \xrightarrow{\Lambda} T^n) \qquad K \cong T^{m-n}$ действует на Z_P свободно

$T_i \mapsto T(\lambda_i)$

т.к. не пересекает стабилизаторы, т.е. подгруппы $T_{i_1 \dots i_n} \subset F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$

$M^{2n} = Z_P / T^{m-n}$



$$\begin{array}{ccccc} & & Z_P & \overset{T^{m-n}}{\searrow} & \\ & \swarrow & & & \\ M_1^{2n} & M_2^{2n} & & & M_k^{2n} \\ \searrow \pi_1 & \downarrow \pi_2 & & \swarrow & \\ & P^n & & & \end{array}$$

$Z_P = P^n \times T^m / \sim$

$\lambda_1 \dots \lambda_m$ в $N_\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n \qquad H^*(M^{2n}) = \mathbb{Z}[v_1 \dots v_m] / I + J$

$\mathbb{R}^{m-n} \cong H^2(M^{2n}; \mathbb{R}) \supset v_1, \dots, v_m$