V_Σ $\quad D_1, \dots, D_m$ инвариантные неприводимые дивизоры,
$\updownarrow$
$\sigma_1^1, \dots, \sigma_m^1$ 1-мерные конусы в Σ
$v_1, \dots, v_m$ - примитивные образующие

$D = \sum_{i=1}^m b_i D_i$ инвариантный дивизор Вейля

$D|_{U_\sigma} = -\sum \overbrace{\langle m_\sigma, v_i \rangle}^{\psi_\sigma(v_i)} D_i$ - дивизоры Картье

задают $\psi : N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ кусочно линейна, линейна на $\sigma \in \Sigma$,

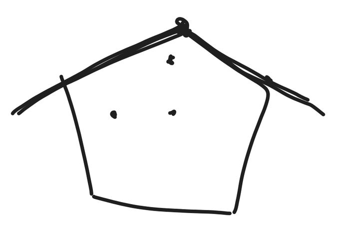
$\psi_\sigma = \psi|_\sigma$ $\quad \{ \underset{M = N^*}{m_\sigma} : \sigma \in \Sigma \}$ данные Картье

D явл. дивизоров без базисных точек $\Leftrightarrow \psi$ выпукла

D явл. обильным $\Leftrightarrow \psi$ строго выпукла

1. $D = \sum b_i D_i$

$P_D = \{ x \in M_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}^* : \langle v_i, x \rangle + b_i \geq 0 \}$



Если D - обильный дивизор, то

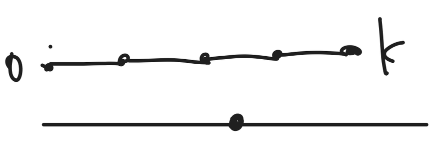
$\dim P = n = \dim N_{\mathbb{R}}$ и $\psi(u) = \min_{x \in P} \langle u, x \rangle$ - опорная функ P

Теорема: $\exists$ взаимно однозначное соответствие

$\underset{\text{очень обильный дивизор}}{(V_\Sigma, D)} \longleftrightarrow \underset{\text{очень обильный}}{(P}, X_P = \overline{(\mathbb{C}^\times)^n} \subset \mathbb{CP}^{N-1})$

x^{m_i}, $m_i \in P$ $\quad [x^{m_1} : \dots : x^{m_\ell}]$

Пример: 1. $P = [0, k] \subset \mathbb{R}$



Σ_P

$\overline{\{ [1 : t : t^2 : \dots : t^k] \}} \subset \mathbb{CP}^k$

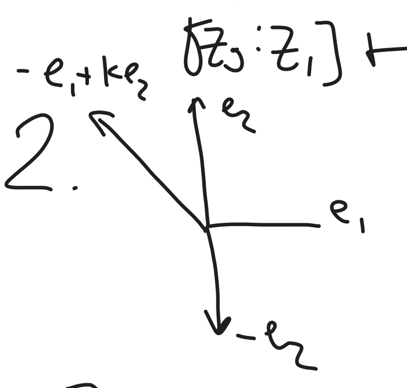
$1 = y_0 \quad t = y_1 \quad \dots \quad t^k = y_k$

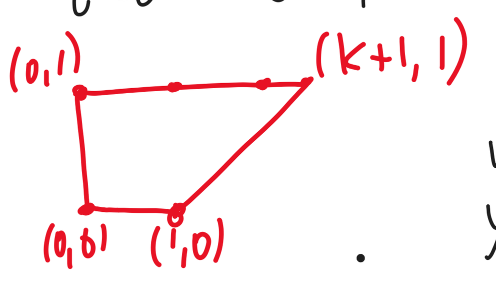
$t = \frac{z_1}{z_0} \quad [1 : \frac{z_1}{z_0} : \dots : \frac{z_1^k}{z_0^k}] = [z_0^k : z_0^{k-1} z_1 : \dots : z_1^k]$

$\mathbb{CP}^1 \hookrightarrow \mathbb{CP}^k_k$ $\quad$ Вложение Веронезе

$[z_0 : z_1] \longmapsto [z_0^k : z_0^{k-1} z_1 : \dots : z_1^k]$

2.





Задача: явно задать мн-ть Хирцебруха H_k уравнениями в $\mathbb{CP}^{N-1}$

Пространство орбит компактного тора

$\mathbb{C}^\times_N = N \otimes \mathbb{C}^* = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{C}^\times) \supset T_N = N \otimes S^1 = \mathrm{Hom}(M, S^1)$, $T_N \cong \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{m}$

Как устроено V_Σ / T_N ?

$V_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma \quad U_\sigma = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap N]$

$\mathbb{C}$-точки V_Σ $\quad \mathrm{Hom}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap N], \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{sg}(\sigma^\vee \cap N, \mathbb{C}_m)$ мультиплик. полугруппа

$\mathbb{R}$-точки $\quad \mathrm{Hom}_{sg}(\sigma^\vee \cap N, \mathbb{R}_m)$

"$\mathbb{R}_\geq$-точки" $\quad \mathrm{Hom}_{sg}(\sigma^\vee \cap N, \mathbb{R}_\geq) = P_{\sigma, \geq}$ (по умножению)

В частности, если σ - неособый k-мерный, то получаем $\mathbb{R}^k_\geq \times \mathbb{R}^{n-k}_>$

$\sigma = \mathbb{R}_\geq \langle e_1, \dots, e_k \rangle \quad \sigma^\vee = \mathbb{R} \langle e_1^*, \dots, e_k^*, \pm e_{k+1}^*, \dots, \pm e_n^* \rangle$

Утв: $P_{\sigma, \geq} \cong U_\sigma / T_N$

Например, если σ неособый, то $U_\sigma \cong \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^\times)^{n-k}$

$U_\sigma / T_N \cong \mathbb{R}^k_\geq \times \mathbb{R}^{n-k}_>$

Док-во: $\mathbb{C}^\times = S^1 \times \mathbb{R}_>$

$z = \rho e^{i\varphi}$

$\mathbb{C}^\times_N = T_N \times \mathrm{Hom}(M, \mathbb{R}_>) = T_N \times \mathrm{Hom}(M, \mathbb{R}) = T_N \times N_{\mathbb{R}}$

$V_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} O_\sigma \quad O_\sigma = \mathrm{Hom}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^\times) \cong (\mathbb{C}^\times)^{n - \dim \sigma}$

$(O_\sigma)_\geq = \mathrm{Hom}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{R}_\geq) = \mathrm{Hom}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{R}) = N_{\mathbb{R}} / \mathbb{R}\langle \sigma \rangle$

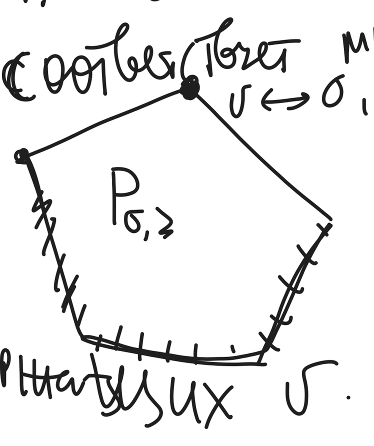
Т.е $(O_\sigma)_\geq = O_\sigma / T_N \quad O_\sigma = (T_N / \mathrm{Stab}\, O_\sigma) \times N_{\mathbb{R}} / \mathbb{R}\langle \sigma \rangle$

$V_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma \quad V_\Sigma / T_N = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma / T_N = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} P_{\sigma, \geq}$

Если $V_\Sigma = V_P$ (V_Σ проективно, соответствует мн-ку P)

$v \leftrightarrow \sigma, \dim \sigma = n$

То макс конусы σ соотв вершинам $v \in P$



$P_{\sigma, \geq}$ - P без всех граней, не содержащих v.

Вывод: $V_{\Sigma_P} / T_N \cong P$

Если V_Σ неособо, то V_Σ / T_N - "многообразие с углами" т.е покрывается картами $U \subset \mathbb{R}^n_\geq$

Более того, $\mathbb{C}^n = T^n \times \mathbb{R}^n_\geq / \sim$

$P_\geq = \bigcup_\sigma P_{\sigma, \geq}$ $\quad \mathbb{C} = S^1 \times \mathbb{R}^1_\geq / \sim$

$(\varphi_1, 0) \sim (\varphi_2, 0)$

$T_N \times P_\geq \longrightarrow V_\Sigma$

$V_\Sigma = T_N \times P_\geq / \sim$ - топологическая модель для V_Σ

Когомологии неособых компактных торических мн-й

Пусть Σ - полный неособый веер $\quad D_1, \dots, D_m$ инвар. дивизоры
$v_1, \dots, v_m$ - образующие

$u_i = [D_i] \in H^2(V_\Sigma; \mathbb{Z})$

$V_\Sigma / T_N = P_\geq \quad D_i \longrightarrow F_i$ гипергрань в $P_\geq$

(1) $u_{i_1} \cdot \ldots \cdot u_{i_k} = 0$ в $H^*(V_\Sigma; \mathbb{Z})$, если $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} = \varnothing$

(2) $\sum \langle m, v_i \rangle [D_i] = 0$ в $H^2(V_\Sigma; \mathbb{Z})$ $\quad \sum_{i=} \langle m, v_i \rangle u_i = 0$

$m \in M$

Теорема (Данилов, Юркевич): V_Σ полное неособое

$H^*(V_\Sigma; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[u_1, \dots, u_m] /$ соотнош. (1) и (2)