Соответствие между орбитами и конусами

$\Sigma = \{\sigma\}$ - веер $\rightsquigarrow V_\Sigma = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} O_\sigma$

O_σ - орбита действия $\mathbb{C}^\times_N \cong (\mathbb{C}^\times)^n$

$O_{\{0\}} = \mathbb{C}^\times_N \subset V_\Sigma$

$O_\sigma \cong (\mathbb{C}^\times)^{n-k}$, где $k = \dim\sigma$

$\overline{O}_\sigma = V_\sigma$ - торическое подмн-зие в V_Σ коразмерности $\underset{\dim\sigma}{k}$

$V_\sigma = V_{\Sigma/\mathrm{span}\,\sigma}$ $\qquad V_\sigma = \overline{O}_\sigma = \bigcup_{\tau\supset\sigma} O_\tau$

В частности если $\Sigma^1 = \{\sigma^1_1, \dots, \sigma^1_m\}$ - 1-мерные конусы,

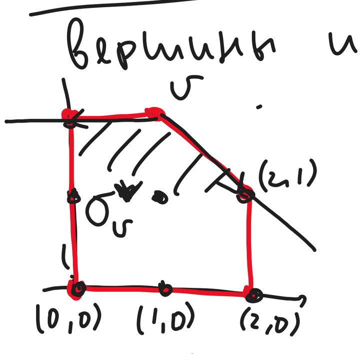
то получаем $D_1 = V_{\sigma^1_1}, \dots, D_m = V_{\sigma^1_m}$ инвариантные дивизоры

$\mathbb{CP}^n$  $m = n+1$ $\qquad D_j \cong \mathbb{CP}^{n-1} = \{[z_0 : z_1 : \dots : z_n] : z_i = 0\}$

Проективные торические многообразия и многогранники

Конструкция: P — многогранник с вершинами в $N^* \cong M$

вершины и целые точки внутри $P \longleftrightarrow \chi^m \in M$ $\qquad \chi^m : \mathbb{C}^\times_N \to \mathbb{C}^\times$, $(t_1, \dots, t_n) \mapsto t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}$



Σ_P — нормальный веер

$\cup$

σ_v, v - вершины P

$\cap$

$N_{\mathbb{R}}$

Положим $V_P := V_{\Sigma_P}$

Предположим, что $\forall v$ (вершины) полугруппа S_{σ_v} (состоящая из целых точек внутри конуса при вершине v) порождена целыми точками из P

Этого всегда можно достичь заменив P на kP $k \gg 0$

(Задача: придумать P, для которого это не выполнено)

Рассмотрим отображение

$$i_P : \mathbb{C}^\times_N \longrightarrow (\mathbb{C}^\times)^{|N^*\cap P|}$$

тор размерности, равной числу целых точек в P

Пример $(t_1, t_2) \longmapsto (1, t_1, t_1^2, t_2, t_1t_2, t_1^2t_2, t_2^2, t_1t_2^2)$

Теорема: если P удовлетворяет условию выше, то $V_{\Sigma_P} = \overline{i_P(\mathbb{C}^\times_N)} \subset \mathbb{CP}^{|N^*\cap P|}$

План док-ва: Запишем $\overline{i_P(\mathbb{C}^*_N)} = \bigcup_{v\in P} U_v$

где $U_v = \overline{i_P(\mathbb{C}^\times_N)} \cap \{z_v \neq 0\}$

Тогда $U_v = \mathrm{Spec}\, S_{\sigma_v}$ – аффинное торическое мн-зие

Следствие: Торические мн-зия, соответствующие мн-кам с вершинами в N^*, проективны

Теорема: любое проективное торическое мн-зие V_Σ имеет вид $V_{\Sigma_P} = V_P$ для нек-го P.

Идея док-ва:

$V_\Sigma \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{CP}^\ell \supset H$ - гиперпл-ть общего положения

$H \cap V_\Sigma$ задаёт на V_Σ (очень обильный) дивизор

Пусть D – дивизор Картье на V

$V = \bigcup U_\alpha$ - аф. покрытие $\qquad f_\alpha \in H^0(U_\alpha, \mathcal{M}^*)$ мероморфные ф-ции

$g_{\alpha\beta} = f_\alpha / f_\beta \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$ – голоморфные нигде не обращ. в нуль на $U_\alpha \cap U_\beta$

$H^0(V, D)$ – голоморфные сечения (лин. расслоения, соотв.) D

$\Downarrow$

$f \qquad \mathrm{Div} f + D \geqslant 0 \qquad \dim H^0(V,D) = k$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbb{C}\langle s_1, \dots, s_k\rangle$

$V \longrightarrow H^0(V,D)^*$

$x \longmapsto (s_1(x) : \dots : s_k(x))$

D наз. называется дивизором без базисных точек, если определено отобр. $f_D : V \longrightarrow \mathbb{CP}(H^0(V,D)^*)$,

т.е. $\forall x \in V\ \exists s \in H^0(V,D) : s(x) \neq 0$

D наз. очень обильным (very ample), если f_D – вложение

(D наз. обильным, если kD очень обилен для нек-го целого $k > 0$)

Для торических мн-зий

Будем рассматривать только тор-инвариантные дивизоры

Вейля $\sum_{i=1}^m b_i D_i$ $\qquad D_i = V_{\sigma^1_i}$ соотв. 1-мерным конусам

Дивизоры Картье в аффинных картах U_σ задаются характерами χ^{m_σ}

Утв: T-инвар. дивизор Картье на U_σ (аф.-тор.) имеет вид $\mathrm{Div}(\chi^m) \Rightarrow \mathrm{Pic}\, U_\sigma = 0$

$\sum b_i D$ – дивизор Картье $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \sigma \in \Sigma \quad \sum_{i=1}^m b_i D_i \Big|_{U_\sigma} = \sum_{i=1}^k \langle m_\sigma, v_i \rangle D_i \qquad m_\sigma \in M = N^*$

$v_1, \dots, v_k$ - примитивные образующие лучей σ $\qquad \mathrm{ord}_{D_i} \chi^{m_\sigma} = m_i$

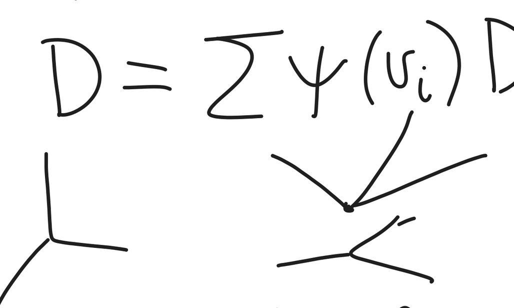
$t_1^{m_1} \dots t_k^{m_k}$

Вывод: дивизоры Картье на V

$\Updownarrow$

Рац. кусочно-линейные функции, линейные на (максимал) конусах Σ

$D = \sum \psi(v_i) D_i$ $\qquad$ где v_i - образующая σ^1_i



Дивизор Картье задаётся данными Картье $\{m_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$, $m_\sigma \in M$

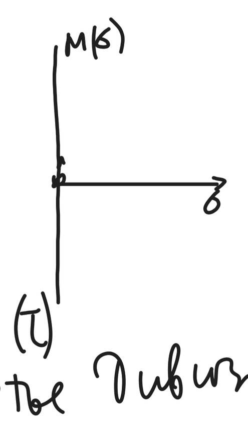
+ условие согласования на гранях

$$D = \sum b_i D_i \Big|_{U_\sigma} = \sum \langle -m_\sigma, v_i \rangle D_i$$

$$\sum_{i \in \sigma^1} b_i D_i$$

$b_i = -\langle m_\sigma, v_i \rangle$

$i = 1, \dots, m$



$M(\sigma) = M \cap \sigma^\perp$

$\tau < \sigma$ – грань $\qquad m_\sigma = m_\tau \mod M(\tau)$

$\{-m_\sigma\}$ – данные Картье дивизора $D = \sum b_i D_i$