Расслоения и дивизоры

Опр: M гладкое мн-зие
комплексное векторное расслоение — это сем-во $\{E_x\}_{x\in M}$ со структурой гладкого мн-зия на $E=\{E_x\}_{x\in M}$
причём
1) $\pi: E\to M$ $\quad E_x \mapsto x$ явл. гладким;
2) $\forall x_0\in M$ $\exists\, U\subset M$ откр. окр. x_0 и диффеоморф.

$$\varphi_U: \pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{C}^k \qquad \pi^{-1}(U)=E_U$$

$$E_x \xrightarrow{\cong} \{x\}\times\mathbb{C}^k \quad \text{лин. изоморфизм}$$

φ_U наз. **тривиализацией** E над U

$$g_{U\cap V}: U\cap V\to GL(k,\mathbb{C})\subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^k)$$

g_{UV} $\quad g_{U\cap V}(x)=\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}\Big|_{\{x\}\times\mathbb{C}^k}$
функции перехода $\quad g_{UV}=g_{U\cap V}$

$$g_{UV}(x)\cdot g_{VU}(x)=id$$
$$g_{UV}(x)\cdot g_{VW}(x)\cdot g_{WU}(x)=id \qquad \forall x\in U\cap V\cap W$$

Задав функции перехода $g_{UV}: U\cap V\to GL(k,\mathbb{C})$ (для нек-го открытого $M=\bigcup_\alpha U_\alpha$)
можно восстановить расслоение E:

$$E=\bigcup_\alpha (U_\alpha\times\mathbb{C}^k)\Big/ \underset{U_\beta\times\mathbb{C}^k}{(x,v)}\sim\underset{U_\alpha\times\mathbb{C}^k}{(x,g_{\alpha\beta}(x)\cdot v)}$$

$g_{\alpha\beta}=g_{U_\alpha U_\beta}$

Опр. **голоморфным** (**алгебраическим**) **векторным расслоением** $E\xrightarrow{\pi}M$ наз. комплексное расслоение со структурой комплексного (алгебраическим) на E, причём тривиализации $\varphi_U: E|_U\to U\times\mathbb{C}^k$ явл. биголоморфными отобр. (алгебраическими изоморфизмами)

Эквивалентно, функции перехода
$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha\cap U_\beta\to GL(n,\mathbb{C})$$
явл. голоморфными (алгебраическими) ф-циями

Одномерные векторные расслоения
line bundles

$$L\xrightarrow{\pi}M \qquad M=\bigcup U_\alpha \qquad \varphi_\alpha: L|_{U_\alpha}\to U_\alpha\times\mathbb{C}$$

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha\cap U_\beta\to GL(1,\mathbb{C})=\mathbb{C}^\times \qquad g_{\alpha\beta}(z)=(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})\Big|_{L_z}\in\mathbb{C}^*$$

$$g_{\alpha\beta}\cdot g_{\beta\alpha}=1 \qquad g_{\alpha\beta}\cdot g_{\beta\gamma}\, g_{\gamma\alpha}=1$$

Т.е. $\{g_{\alpha\beta}\}$ задают 1-коцикл Чеха пучка $\mathcal{O}^*$ не обращающихся в нуль голоморфных (алгебраических) ф-ций на M

Для другой тривиализации
$$\varphi'_\alpha=f_\alpha\cdot\varphi_\alpha, \text{ где } f_\alpha\in\mathcal{O}^*(U_\alpha)$$
$$g'_{\alpha\beta}=(f_\alpha/f_\beta)\cdot g_{\alpha\beta} \qquad g_{\alpha\beta}\cdot g'^{-1}_{\alpha\beta}=f_\alpha f_\beta^{-1} \text{ — кограница Чеха}$$

$\{g_{\alpha\beta}\}$ и $\{g'_{\alpha\beta}\}$ определяют изоморфные расслоения
$\Updownarrow$
соотв. 1-коциклы Чеха отличаются на кограницу

Опр. $\mathrm{Pic}(M)=H^1(M,\mathcal{O}^*)$ **группа Пикара**
(группа классов изоморфизма линейных расслоений над M

$$L\otimes L'\longleftrightarrow\{g_{\alpha\beta}\cdot g'_{\alpha\beta}\} \qquad L^*=\bar{L}\leftrightarrow\{g^{-1}_{\alpha\beta}\}$$

Ан-но классы эквивал. комплексных 1-мерных рассл. задаются эл-тами группы $H^1(M,\mathcal{A}^*)$
$\mathcal{A}^*$ — пучок гладких не обр. в нуль $\mathbb{C}$-значных ф-ций

Связь с топологией

$$\begin{array}{lccccccccc}
\text{гол.} & 0 & \to & \mathbb{Z} & \to & \mathcal{O} & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{O}^* & \to & 0\\
 & & & \downarrow{=} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\text{гладк} & 0 & \to & \mathbb{Z} & \to & \mathcal{A} & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{A}^* & \to & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots\to H^1(M,\mathcal{O}) & \to & H^1(M,\mathcal{O}^*) & \to & H^2(M,\mathbb{Z}) & \to & H^2(M,\mathcal{O}) & \to\ldots\\
\downarrow & & \downarrow & & \| & & \downarrow & \\
\ldots\to H^1(M,\mathcal{A}) & \to & H^1(M,\mathcal{A}^*) & \to & H^2(M,\mathbb{Z}) & \to & H^2(M,\mathcal{A}) & \to\ldots\\
\| & & & & & & \| & \\
0 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Задача: $H^i(M,\mathcal{A})=0$ при $i>0$ (использовать разбиение единицы)

$$H^1(M,\mathcal{A}^*)=H^2(M,\mathbb{Z})$$

Т.е. комплексные 1-мерные расслоения L определяются классом $c_1(L)\in H^2(M;\mathbb{Z})$
(1-й класс Черна)

Вообще говоря, $H^i(M,\mathcal{O})\neq 0$ при $i>0$
и $\quad H^1(M,\mathcal{O}^*)\neq H^2(M,\mathbb{Z})$
(например, это не так для римановых пов-тей)
но это так для торических мн-зий. В частности

Задача $\quad H^i(\mathbb{CP}^n,\mathcal{O})=0$ при $i>0$

Дивизоры

Опр: **дивизор Вейля** — форм. лин. комбинация $D=\sum a_i V_i$ неприводимых подмн-зий $V_i\subset M$ коразмерности 1, $a_i\in\mathbb{Z}$

Опр. пусть $M=\bigcup U_\alpha$ — аффинное покрытие
дивизор Картье задаётся не обр. в 0. рациональными функциями $f_\alpha\in H^0(U_\alpha,\mathcal{M}^*)$,
для которых $\quad f_\alpha/f_\beta\in\mathcal{O}^*(U_\alpha\cap U_\beta)$

Дивизор Картье задаёт дивизор Вейля
$$D=\sum_V \mathrm{ord}_V(f_\alpha)\cdot V$$

При этом наборы $\{f_\alpha\}$ и $\{f'_\alpha\}$ задают один и тот же дивизор Вейля $\Leftrightarrow f_\alpha\cdot f'^{-1}_\alpha\in\mathcal{O}^*(U_\alpha)$

Вывод: $\underset{\text{див-ры Вейля}}{\mathrm{Div}(M)}\supset\underset{\text{див-ры Картье}}{H^0(M,\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)}$
$=$ на неособом мн-зии

Пусть D — дивизор Картье $\{f_\alpha\}$ $f_\alpha\in H^0(U_\alpha,\mathcal{M}^*)$
$$g_{\alpha\beta}=f_\alpha/f_\beta\in\mathcal{O}^*(U_\alpha\cap U_\beta) \quad \text{на неособом } M$$
$$g_{\alpha\beta}\cdot g_{\beta\gamma}\cdot g_{\gamma\alpha}=1 \text{ на } U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma \Rightarrow$$
$\{g_{\alpha\beta}\}$ задают лин. рассл. на M, обозн L_D

Упр: проверить корректность & $L_{D+D'}=L_D\otimes L_{D'}$

Получаем отобр. $\quad \mathrm{Div}(M)\to\mathrm{Pic}(M)$
Если $D=(f)$ — дивизор ф-ции $f\in H^0(M,\mathcal{M})$
то полагаем $f_\alpha=f|_{U_\alpha}$ тогда $g_{\alpha\beta}=1\Rightarrow$ расслоение тривиально

Группа классов дивизоров
$$CL(M)=\mathrm{Div}(M)\Big/\underset{\substack{\text{лин. экв.}\\ D\sim D'+(f)}}{\sim}\xrightarrow{\cong}\mathrm{Pic}(M)$$

В терминах пучков
$$0\to\mathcal{O}^*\to\mathcal{M}^*\to\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*\to 0$$
$$H^0(M,\mathcal{M}^*)\to\underset{\text{дивизоры Картье}}{H^0(M,\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)}\to\underset{\text{группа Пикара}}{H^1(M,\mathcal{O}^*)}\ldots$$